13 T.D. V.A.R. discrètes.

- Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
- Espérance. Propriétés. Théorème de transfert.
- Inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments, propriétés.
- Lois discrètes usuelles. Loi de Poisson. Espérance. Variance. Approximation d'une loi binomiale par une loi de poisson. Loi géométrique. Espérance et variance. Propriété d'invariance temporelle.

Exercice 1 : ✶

Soit une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}(X = k) = \frac{a(k+1)}{k!} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Déterminer a puis calculer $\mathbb{E}(X)$, si elle existe.

Exercice 2 : ✶

Trouver toutes les lois de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui forment des suites arithmético-géométriques.
C'est-à-dire, vérifiant :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / p_{n+1} = ap_n + b,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 3 : ✶✶ [Oral Agro-Véto 2005]

Soit un nombre réel $a \in]0, 1[$. Un joueur effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce. A chaque lancer, il obtient « pile » avec la probabilité a et « face » avec la probabilité $b = 1 - a$. S'il obtient « pile » il gagne un point et s'il obtient « face » il gagne deux points.
Pour tout nombre entier $n \geq 1$ donné, le joueur joue jusqu'à ce qu'il ait un total de points supérieur ou égal à n, et on note alors p_n la probabilité qu'il ait n points exactement.

① Calculer p_1 et p_2.

② Exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.

③ En déduire une expression de p_n en fonction de a et de n.

④ Écrire une fonction Python `simuLancers(n,a)` qui permette de simuler cette expérience aléatoire ainsi qu'une fonction `estime_p(m,n,a)` qui permette de valider votre réponse à la question 3.

Exercice 4 : ✶✶ [Oral Agro-Véto 2018]

Un jeu de Memory est constitué d'un paquet de n paires de cartes numérotées de 0 à $n-1$. Il y a 2 cartes numérotées i pour chaque entier i compris entre 0 et $n-1$ et ces cartes sont mélangées dans le paquet.
On tire simultanément deux cartes à chaque tirage.
Si on tire deux cartes de même numéro (une paire), on retire cette paire du paquet puis on mélange le paquet. Sinon, on remet les deux cartes dans le paquet.
On note T_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les n paires.
Pour $i \geq 1$, on note C_i l'événement : « on obtient une paire au i-ième tirage ».

① **a.** Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui retourne la liste des $2n$ cartes.
b. Écrire une fonction qui simule le tirage de deux cartes, renvoyant `True` si une paire est obtenue et `False` sinon.
c. Écrire une fonction qui retourne le nombre de tirages nécessaires pour vider la liste.

② Déterminer la loi et l'espérance de T_1.

③ Montrer que $\mathbb{P}(C_1) = \dfrac{1}{2n-1}$.

④ Pour chaque entier $k \geq 2$, exprimer l'événement $(T_2 = k)$ en fonction des événements C_i puis calculer $\mathbb{P}(T_2 = k)$.

⑤ Montrer que $\mathbb{E}(T_2)$ existe et la calculer.

⑥ **a.** Justifier que $\mathbb{P}_{C_1}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_{n-1} = k - 1)$.
b. Exprimer de façon analogue $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(T_n = k)$.
c. On admet l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ pour tout n entier ≥ 1.
A l'aide des relations précédentes, montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$ et en déduire l'expression de $\mathbb{E}(T_n)$.
Utiliser vos fonctions Python pour valider votre réponse.

Exercice 5 ✶ :

On considère un élevage de phasmes constitué de 998 femelles et de 2 mâles.

① On effectue des prélèvements de dix individus de l'élevage, un à un avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de mâles obtenus. Donner sa loi, son espérance et sa variance.

② On réitère l'expérience précédente jusqu'à obtenir le premier mâle. On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre d'individus prélevés.

a. Déterminer la loi de Y_1 puis préciser son espérance et sa variance.
b. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et $Z_1 = \min(Y_1, m)$. Déterminer $\mathbb{E}(Z_1)$

③ Soit T, variable aléatoire égale au nombre de femelles qui ont précédé l'apparition du premier mâle. Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.

④ Dans les mêmes conditions qu'à la question 3., on note Y_2, variable aléatoire égale au rang d'apparition du second mâle.

a. Écrire une fonction Python permettant de modéliser cette expérience et estimer grâce à elle $\mathbb{E}(Y_2)$.
b. Justifier mathématiquement ce résultat.

Exercice 6 : ✶✶ (oral 2018)

Sur une plage, le drapeau permettant ou non la baignade peut être de trois couleurs : vert, orange ou rouge.
Une étude statistique sur une grande période a permis de montrer que :

- Si le drapeau est vert un jour donné, alors il est encore vert le jour suivant avec la probabilité $1/2$ ou orange ou rouge de façon équiprobable.
- Si le drapeau est orange un jour donné, alors il est vert le jour suivant avec la probabilité $1/2$ ou orange avec la probabilité $1/4$ ou encore rouge.
- Si le drapeau est rouge un jour donné, alors il est orange le jour suivant avec la probabilité $2/3$ ou rouge avec la probabilité $1/3$.

On note V_n l'événement : « le drapeau est vert le jour numéro n » et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$. On définit de même O_n et o_n, ainsi que R_n et r_n.

① Déterminer v_{n+1}, o_{n+1} et r_{n+1} en fonction de v_n, o_n et r_n.

② Déterminer une matrice M carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que, si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ o_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a : $X_{n+1} = MX_n$.

③ Quel est le rang de M ? Que peut-on en déduire ?

④ Calculer $M\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour M en terme de valeurs propres ?

⑤ Justifier que 1 est valeur propre de M et donner les vecteurs propres associés.

⑥ Montrer qu'il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$ et préciser ces matrices. Vérifier avec Python que P est inversible (*On rappelle l'instruction* `inv` *du package* `numpy.linalg` *qui permet de calculer un tel inverse*)

⑦ Exprimer X_n en fonction de X_1 et P, D et n.

⑧ On suppose que le jour numéro 1 le drapeau est vert. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de v_n, o_n et r_n.

⑨ Écrire une fonction Python prenant en argument v_1, o_1, r_1 et n et renvoyant les prévisions de la couleur du drapeau pour le jour numéro n.

Exercice 7 : ✶✶ (oral 2018)

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On montre alors que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Une course comporte n coureurs. Les temps de parcours des coureurs sont dees variables aléatoires à densité $(Y_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

① On note T_1 le temps de parcours du gagnant.
  a. Montrer que T_1 est une variable à densité et en donner une densité.
  b. Quel est le temps moyen mis par le gagnant ?

② On note X_k le temps de parcours du coureurs arrivé en k-ième position et, pour tout réel $x \in [0, 1]$, N_x le nombre de coureurs ayant fini au plus tard à l'instant x.
  a. Simuler X_k à l'aide de Python (*Indication : Si L est une liste Python, sorted(L) est une nouvelle liste comportant les éléments de L triés par ordre croissant).*
  b. Utiliser cette fonction pour valider la réponse obtenue en 1.b).
  c. Soit $x \in [0, 1]$, montrer que $(X_k \leq x) = (N_x \geq k)$.
  En déduire que $\mathbb{P}(X_k \leq x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$.

③ On s'intéresse au 3-ième coureur.
  a. Montrer que $\mathbb{P}(X_3 \leq x) = 1 - \Big((1-x)^n + nx(1-x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^2(1-x)^{n-2}\Big)$. On note $G(x)$ cette expression.
  b. Justifier que G est strictement croissante.
  c. A l'aide de la méthode de dichotomie, trouver le temps de parcours qui permet d'être sur le podium (c'est-à-dire au pire 3-ième) dans 95% des cas. Quelle est la valeur obtenue pour $n = 10$?