TD 13 - Exercice 4

2 cartes n° = i pour tout $0 \leq i \leq n-1$
On tire simultanément 2 cartes à chaque tirage.
Si on tire une paire, on la retire de la liste, sinon on remet les 2 cartes dans la liste.

Soit T_n = nombre de tirages pour obtenir les n paires.

et C_i l'év. : "On obtient une paire au $i^{ème}$ tirage"

1) On s'autorise ici à utiliser la fonction 'sample()' du module 'random' qui retourne pour une liste L et un entier k ($\leq$ len(L)) k éléments distincts de la liste L

Ainsi rdm.sample([1,2,3,4], 2) retourne par exemple [2,1], [3,1], ...
et rdm.sample([1,2,3,4], 4) retourne une permutation des éléments de L=[1,2,3,4].

a) une rédaction possible est :

```
def liste(n)
    L=[k for k in range(n)]
    Liste_cartes = L + L
    return rdm.sample(Liste_cartes, 2*n)
```

b) on choisit les deux indices des cartes qui seront extraites du jeu

```
def tiragePaire(Lc):
    nl = len(Lc)
    i,j = rdm.sample(range(nl),2)
    return Lc[i]==Lc[j]
```

c) le nombre de paires diminue à chaque fois qu'une paire est extraite...

```
def simulT(n):
    k=0
    while n>0:
        if tiragePaire(liste(n)):
            n -= 1
        k += 1
    return k
```

② $T_1(\Omega) = \{1\}$; $P(T_1 = 1) = 1$

T_1 est la VAR certaine égale à 1 et donc $E(T_1) = 1$

③ $\text{card}(\Omega) = \binom{2n}{2}$; $\text{card}(C_1) = n$ [n paires]

Il y a équiprobabilité, donc :

$$P(C_1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{(2n)!} \cdot 2!(2n-2)! = \frac{2n}{2n(2n-1)}$$

Conclusion : $\boxed{P(C_1) = \frac{1}{2n-1}}$

④ $T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

$\forall k \leq 2$, $(T_2 = k) = ?$ $P(T_2 = 0) = P(T_2 = 1) = 0$

$(T_2 = 2) = C_1 \cap C_2 \Rightarrow P(T_2 = 2) = P(C_1) \cdot \underbrace{P_{C_1}(C_2)}_{=1 \text{ (la 1ère paire a disparu)}}$

$= \frac{1}{2n-1}$

Soit $P(T_2 = 2) = \frac{1}{3}$

$(T_2 = 3) = \overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3 \Rightarrow P(T_2 = 3) = P(\overline{C_1}) \cdot P_{\overline{C_1}}(C_2) \cdot \underbrace{P_{\overline{C_1} \cap C_2}(C_3)}_{=1}$

$P(\overline{C_1}) = 1 - P(C_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P_{\overline{C_1}}(C_2) = P(C_1) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow P(T_2 = 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Plus généralement, $\forall k \geq 3$:

$P(T_2 = k) = P(\overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_{k-2}} \cap C_{k-1} \cap C_k)$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{3}$

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![\\ \forall k \geq 2,\ P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \end{array}}$

Vérification : $\sum_{k \geq 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ CV et $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{1-2/3} = 3$ ☐

⑤ On étudie la convergence de $\sum_{k\geq 2} k\,\mathbb{P}(T_2=k)$

Soit $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{3} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ qui est de même nature que

$$\sum_{k\geq 2} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \underset{i=k-1}{=} \sum_{i\geq 1}(i+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

or $\sum_{i\geq 1} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ converge de somme $S_1 = \frac{1}{(1-2/3)^2} = 9$

$\sum_{i\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \sum_{j\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}$ CV de somme $S_2 = \frac{1}{1-2/3} = 3$

Donc $\sum_{k\geq 2} k\left(2/3\right)^{k-2}$ CV par somme de deux séries convergentes de somme : $S_1+S_2 = 12$

<u>conclusion</u> $\boxed{\mathbb{E}(T_2) \text{ existe et } \mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{3}(S_1+S_2) = 4.}$

⑥ a) Si C_1 est réalisé, la paire obtenue a été retirée du jeu qui ne contient plus que $(n-1)$ paires.
Dès lors, obtenir les n paires en k tirages, revient à obtenir les $(n-1)$ paires restantes en $(k-1)$ tirages.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\mathbb{P}_{C_1}(T_n=k) = \mathbb{P}(T_{n-1}=k-1)}$

b) $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(T_n=k) = \mathbb{P}(T_n=k-1)$ car on obtient les n paires restantes en $(k-1)$ tirages ...

c) On admet que $\mathbb{E}(T_n)$ existe $\forall n\geq 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n=k) &= \mathbb{P}((T_n=k)\cap C_1) + \mathbb{P}((T_n=k)\cap \overline{C_1}) \\ &= \mathbb{P}(T_{n-1}=k-1)\cdot\frac{1}{2n-1} + \mathbb{P}(T_n=k-1)\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2n-1}\left[\mathbb{P}(T_{n-1}=k-1) + (2n-2)\,\mathbb{P}(T_n=k-1)\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{2n-1}\left[\sum_{k=n}^{\infty} k\,\mathbb{P}(T_{n-1}=k-1) + (2n-2)\sum_{k=n} k\,\mathbb{P}(T_n=k-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2n-1}\left[\sum_{i=n-1}^{\infty}(i+1)P(T_{n-1}=i) + (2n-2)\sum_{i=n-1}^{\infty}(i+1)\underbrace{P(T_n=i)}_{=0 \text{ pour } i=n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2n-1}\left[E(T_{n-1})+1+(2n-2)\left(E(T_n)+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)E(T_n) = E(T_{n-1})+1+(2n-2)E(T_n)+2n-2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(T_n) = E(T_{n-1}) + (2n-1) \quad \forall n \geq 2.}$$

On rappelle que $E(T_1) = 1$

on retrouve que $E(T_2) = 1+3 = 4$.

Et plus généralement on montre que : $E(T_n) = n^2$

En effet, par récurrence,

(i) $E(T_1) = 1 = 1^2$; $E(T_2) = 4 = 2^2$

(ii) on suppose que $E(T_n) = n^2$ pour n fixé $(n \geq 1)$

(iii) Alors $E(T_{n+1}) = E(T_n) + 2n+1$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

(iv) conclusion $\boxed{E(T_n) = n^2 \quad \forall n \geq 1}$

On validera cette réponse en exécutant par exemple :

```
>>> Lt = [simulT(n) for k in range(1000)]
>>> sum(Lt)/1000
```