12 T.D. Réduction d'endomorphismes.

Diagonaliser une matrice ;
Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans aide de calcul).

Exercice 1 : ✶

① Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés pour les matrices A et B suivantes, considérées respectivement comme les matrices d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[;$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

② Dire, parmi ces matrices, celles qui sont inversibles.

③ Calculer les puissances $n$ièmes de ces matrices.

Exercice 2 : ✶ Agro-Véto 2008

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$, de degré inférieur ou égale à 4, fonction nulle comprise. On considère l'application φ qui à toute fonction P de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(1/x)$$

① Montrer que φ est un endomorphisme de E.

② Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ. Montrer que φ est inversible et déterminer son inverse.

③ Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3 : ✶

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice canoniquement associée à f et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

① Donner une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$

② Montrer que tout vecteur de $\mathrm{Im} f$ est vecteur propre de f.

③ En déduire sans calcul supplémentaire le spectre de f. f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

④ En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de N.

Exercice 4 : ✶ Agro-Véto 2007

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 0, 1)$

① Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\text{Im} f$ et déterminer une base de $\text{Ker} f$.

② Soit g définie sur $\text{Im} f$ par $g(x) = f(x)$. Justifier brièvement que g est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base (e_1, e_2).

③ Déterminer une base de vecteurs propres de g, puis de f.

Exercice 5 : ✶✶✶

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$. On cherche, si elles existent, les matrices de carré égale à A.

① On suppose que A est diagonale et qu'il existe X telle que $X^2 = A$.

- **a.** Préciser la taille de X et montrer que $AX = XA$.
- **b.** Calculer les coefficients de AX et de XA et en déduire que X est une matrice diagonale.
- **c.** Conclure, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la forme et l'existence des matrices X possibles.

② A est cette fois non diagonale telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Déterminer les matrices B telles que $B^2 = A$.

③ *Application* : Déterminer les matrices de carré égale à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : ✶✶

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ canoniquement associée à $f \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$.

① Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice A.

② Soit g, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 + 2g = f$

- **a.** Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.
- **b.** En déduire que tous les sous-espaces propres de f sont stables par g et que g est diagonalisable.
- **c.** Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^3 + 2g = f$.

Exercice 7 : ✶✶✶ Agro-Véto 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

① Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. A est-elle diagonalisable ?

② Déterminer une base $\mathcal{B}_3'$ de $\text{Ker}(f - 3id)^2$ et montrer que la juxtaposition d'une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(f - id)$ et de $\mathcal{B}_3'$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

③ En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

④ Calculer T^n pour n entier naturel non nul et en déduire A^n.

Exercice 8 : ✶✶ Agro-Véto 2019

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

① On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 et j^4.

② **a.** Soit r et s deux nombres complexes non nuls.

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Donner une base de vecteurs propres de M.

b. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?

③ Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si `L=[a1,...,an]`, la liste `[a2,...,an,a1]`.
Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a1,a2,a3)` qui renvoie la matrice A.
On pourra par exemple compléter le script suivant :

```python
def matrice(a1,a2,a3):
    A = ...
    L = ...
    for i in ...
        A.append(L[:])
        ...
    return ...
```

④ Si a_1, a_2, a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?

⑤ Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

⑥ On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans le justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.

a. Calculer AX_1 et AX_2.
En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2 X_2$ et $AX_2 = r^2 X_1$.

b. Déterminer le spectre de A.
On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6. et utiliser la question 2.

⑦ Préciser si A est diagonalisable : (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et (b) $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$