$\boxed{\text{Exercice 6 (Oral Agro.Véto 2018)}}$ $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, VAR indépendantes

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

(1) $M_n(\Omega) = [0,1]$

$\forall x < 0$, $F_{M_n}(x) = 0$

$\forall x > 1$, $F_{M_n}(x) = 1$

$$\forall x \in [0,1],\ F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{F_X(x)}_{}$$

$$= x^n$$

Fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$.

F_{M_n} continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

Donc M_n est une var à densité dont une densité f_n s'obtient en dérivant F_{M_n}.

Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ n x^{n-1} & \text{si } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Conclusion $\boxed{M_n \text{ VAR à densité de densité } f_n : x \mapsto n x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)}$

(2) On étudie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x)\,dx = \int_0^1 x f_n(x)\,dx$ [Rel° de Chasles]

$= n \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ avec $x \mapsto x^n$ continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ est une intégrale définie.

Conclusion : $\boxed{E(M_n) \text{ existe et vaut } n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}}$

(3) $P(M_n > E(M_n)) = P\left(M_n > \frac{n}{n+1}\right) = 1 - F_{M_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$= 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Par ailleurs $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln \frac{n}{n+1}} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

avec $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} -1$

Donc $\lim_{n\to\infty} -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1$

la fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$ on peut conclure que : $\lim_{n\to\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e}$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty} P(T_n > E(T_n)) = 1 - \frac{1}{e}}$

④ On rappelle que rdm.random() modélise la loi uniforme sur [0,1)

Une réalisation possible est la suivante :

```
def simulT(n):
    x1 = rdm.random()
    for k in range(2, n+1):
        x2 = rdm.random()
        if x2 > x1 :
            x1 = x2
    return x1
```

⑤

```
def estimation(n):
    L= [simulT(n)< rdm.random() for k in range(10 000)]
    return sum(L)/10000
```

Pour n=5, cette fonction retourne 0,1733
n=10, " " " 0,0884

⑥ a) loi de $Y = -X_{n+1}$?

(i) $X_{n+1}(\Omega) = [0,1) \Rightarrow -X_{n+1}(\Omega) = [-1,0)$

(ii) $\forall x < -1$ $F_{-X_{n+1}}(x) = 0$; $\forall x \geq 0$, $F_{-X_{n+1}}(x) = 1$

$\forall -1 \leq x \leq 0$, $F_{-X_{n+1}}(x) = P(-X_{n+1} \leq x) = P(X_{n+1} \geq -x)$

$= 1 - F_{X_{n+1}}(-x) = 1-(-x) = 1+x$

En dérivant, on obtient qu'une densité de $-X_{n+1}$ est $f_Y : x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)$; Conclusion $\boxed{-X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,0]}}$

b) Soit h une densité de $M_n - X_{n+1} = M_n + Y$

avec $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ indépendante de $-X_{n+1}$ puisque les VAR $X_1, \dots, X_n$ et X_{n+1} le sont [lemme de coalition]

Dès lors,

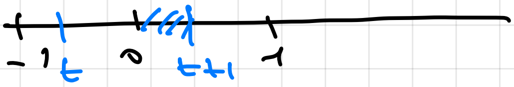
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u) f_Y(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} n u^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(u) \cdot \mathbb{1}_{[-1,0]}(t-u)\,du$$

avec $\mathbb{1}_{[-1,0]}(t-u) = 1$ si $-1 \leq t-u \leq 0 \Leftrightarrow t \leq u \leq t+1$
$= \mathbb{1}_{[t,t+1]}(u)$

D'où

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n u^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1] \cap [t,t+1]}(u)\,du.$$

- Si $t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1$, $h(t) = 0$
- si $0 < t+1 < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 0$, $h(t) = \int_0^{t+1} n u^{n-1}\,du = [u^n]_0^{t+1}$
$= (t+1)^n$



- si $1 < t+1 < 2 \Leftrightarrow 0 < t < 1$, $h(t) = \int_t^1 n u^{n-1}\,du = [u^n]_t^1$
$= 1 - t^n$

- si $t+1 > 2 \Leftrightarrow t > 1$, $h(t) = 0$.

Conclusion

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} (t+1)^n & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1 - t^n & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

c) $P(X_{n+1} > M_n) = P(M_n - X_{n+1} < 0) = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt$

$$= \int_{-1}^{0} (t+1)^n\,dt = \left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

Résultat conforme à ceux obtenus à la question 5