SUJET 6 -

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose, pour tout entier naturel n, $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

① Montrer que M_n est une variable à densité et en donner une densité f_n.

② Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

③ Calculer $\mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n))$ et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

④ Simuler M_n à l'aide de Python.

⑤ Écrire une fonction qui, à l'aide de 10000 simulation de la variable aléatoire M_n donne une estimation de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$.

⑥ a) Quelle est la loi de $-X_{n+1}$?

b) *On rappelle que si X et Y sont deux variables indépendantes de densité f_X et f_Y, alors $X+Y$ est une variable à densité de densité f définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du$$

Déterminer une densité de $M_n - X_{n+1}$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$