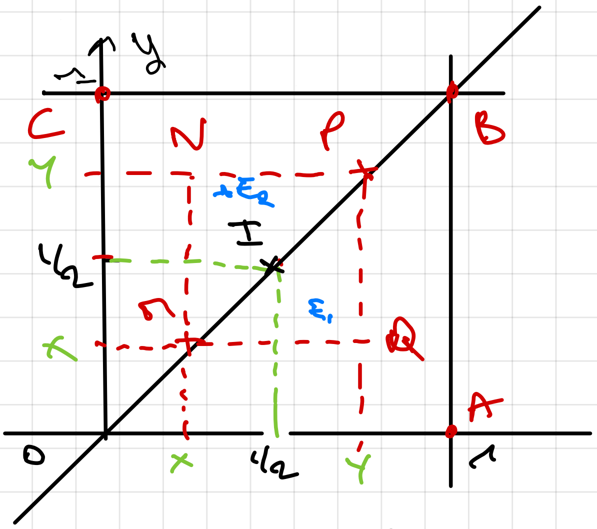
Exercice 6 (Oral Agro Véto 2021)



① $U \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où
$p = P[(X < 1/2 < Y) \cup (Y < 1/2 < X)]$

```
def simulU():
    X, Y = rdm.random(), rdm.random()
    return (X<1/2<Y) or (Y<1/2<X)

def expU(n=10000):
    return np.mean([simulU() for k in range(n)])
```

On obtient $\boxed{E(U) \simeq 1/2}$

② a) $Z = (Y-X)^2 - (X-Y)^2$ ($(Z=0)$ réalisé si $X=Y$ ...)

b) $\boxed{E(Z)} = E[(Y-X)^2] = E(Y^2+X^2-2X\cdot Y)$
$= E(Y^2) + E(X^2) - 2E(X\cdot Y)$ où $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$ car X, Y indpdts...
$= E(X^2) + E(X^2) - 2E(X)^2$ car X et Y ont m̂ loi.
$= 2[E(X^2) - E^2(X)] = 2V(X) = 2\cdot\frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}} < 1$ ok.

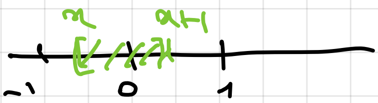
c) On commence par écrire $Y_1 = -Y$ et mq $-Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,0]}$ (question très classique...)
Alors
$X - Y = X + Y_1$ avec X et Y_1 indépendantes.
Soit h une densité de $X+Y_1$.

On commence par noter que $(X+Y_1)(\Omega) = [-1,1]$, donc.
• $\forall x \notin [-1,1]$, $h(x) = 0$

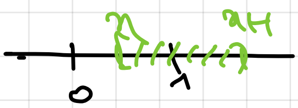
• $\forall x \in [-1,1]$, $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, \underbrace{\mathbb{1}_{[-1,0]}(x-t)}_{=1 \text{ si } -1 \leq x-t \leq 0 \Leftrightarrow x \leq t \leq x+1.}\, dt$

Soit

$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]\cap[x,x+1]}(t)\, dt$



1er cas $-1 \leq x < 0$: $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,x+1]}(t)\,dt = x+1.$



2ième cas : $0 \leq x \leq 1$: $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[x,1]}(t)\,dt = 1-x.$

Conclusion $\boxed{h(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}} = \boxed{\begin{cases} 1-|x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

d) Soit F_Z la fonction de répartition de Z.

$(X-Y)(\Omega) = [-1,1] \Rightarrow Z(\Omega) = (X-Y)^2(\Omega) = [0,1]$.

$\forall x < 0$, $F_Z(x) = 0$

$\forall x > 1$, $F_Z(x) = 1$

$\forall 0 \leq x \leq 1$, $F_Z(x) = P((X-Y)^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X-Y \leq \sqrt{x})$

$$= F_{X-Y}(\sqrt{x}) - F_{X-Y}(-\sqrt{x})$$

Par dérivation : $\forall\ 0 \leq x \leq 1$

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} h(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} h(-\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} 2(1-\sqrt{x}) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Conclusion $\boxed{f_Z(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)}$

Rq $E(Z) = \int_0^1 x f_Z(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x\,dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \dots$$

③ I = centre du carré OABC

a) $P(I$ centre de $MNPQ) = P(X = 1-Y) = P(X+Y=1)$

(ou $= P(\frac{X+Y}{2} = 1/2) \dots$)

or $X+Y$ est une VAR à densité … donc cette probabilité est nulle.

b) $P(I \in MNPQ) = P[(X < 1/2 < Y) \cup (Y < 1/2 < X)]$

$= 2P[(X < 1/2) \cap (Y > 1/2)]$ [incompatibilité symétrie…]

$= 2P(X \leq 1/2) \cdot (1 - P(Y \leq 1/2))$ [X et Y indépdts]

$= 2F_X(1/2) \cdot (1 - F_Y(1/2)) = 2 \frac{1}{2}(1 - 1/2)$

Soit $\boxed{P(I \in MNPQ) = 1/2}$ (on retrouve ① …)

④ $E = (a,b) \in [0,1]^2$; a) On suppose $a > b$.

$p(a,b) = P[((X < a < Y) \cap (X < b < Y)) \cup ((Y < a < X) \cap (Y < b < X))]$

$= 2P((X < a) \cap (Y > a) \cap (X < b) \cap (Y > b))$ [incompatibilité + symétrie…]

$= 2P[(X < b) \cap (Y > a)]$ car $a > b$)

Soit $p(a,b) = 2\mathbb{P}(X \leq b).(1-\mathbb{P}(Y \leq a)) = 2F_X(b)(1-F_X(a))$

Conclusion $\boxed{p(a,b) = 2b(1-a)}$

b) Si $a \leq b$. Par symétrie des comportements des variables X et Y, on peut écrire que

$$\boxed{p(a,b) = 2a(1-b) \text{ si } a \leq b.}$$

c) Note:

$p(0,b) = 0 \quad \forall b \in [0,1] = p(1,b)$: probabilité nulle si
$p(a,1) = 0 \quad \forall a \in [0,1] = p(a,0)$ $\quad E \in$ bord de $[0,1]^2$.

Si $a = 1/2 = b$ alors $p(a,b) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(I \in D\cap P\cap Q)$

Rq $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $p(a,b) \leq \frac{1}{2}$.

1er cas Si $a \geq b$, pour tout $a \in]0,1[$:

$$p(a,b) = 2(\underbrace{1-a}_{>0})b \leq 2(1-a)a \leq \frac{1}{2}$$

avec $(1-a)a = 1/4$ pour $a = 1/2$ (on peut étudier $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$)

Soit

$\forall a \in]0,1[, \forall b \in]0,a] : \quad p(a,b) \leq p(1/2, 1/2) = 1/2$

2ème cas Par symétrie, si $b \geq a$

$\forall b \in]0,1[, \forall a \in]0,b], p(a,b) = 2(1-b)a \leq 2(1-b)b \leq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

avec $p(1/2, 1/2) = 1/2$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité que } E \in D\cap P\cap Q \text{ est maximale par } E = I}$

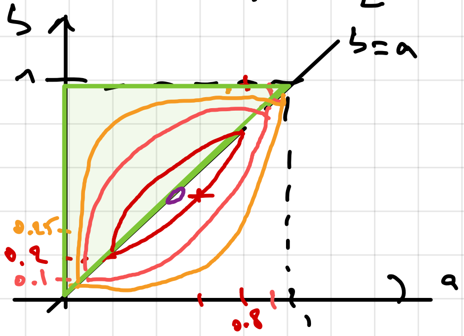
d) $\forall k \in]0; 1/2[$, $p(a,b) = k \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-a)b = k \text{ si } b \leq a \\ 2(1-b)a = k \text{ si } a \leq b. \end{cases}$

D'après ce qui précède, $p(a,b) \leq 1/2 \ \forall (a,b) \in [0,1]^2$

Donc $p(a,b) = k$ donne lieu à une ligne de niveau pour chaque valeur de k dans $]0, 1/2[$.

si $k \in]0, 1/2[$ et $b \leq a$: $p(a,b) = k \Leftrightarrow 2(1-a)b = k$

$\Leftrightarrow b = \frac{k}{2(1-a)}$



si $\boxed{a \leq b}$, $p(a,b) = k \Leftrightarrow 2(1-b)a = k$

$\Leftrightarrow -ab = \frac{k}{2} - a$

$\Leftrightarrow b = \frac{2a-k}{2a} = 1 - \frac{k}{2a}$

Note Etudier $x \mapsto \frac{k}{2(1-x)}$ et $x \mapsto 1 - \frac{k}{2x}$.