SUJET 6 -

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan, on note A, B, C, M, N, P et Q les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, (X, X), (X, Y), (Y, Y) et (Y, X).
On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant pour densité respectives f et g, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

est une densité de la variable $T = U + V$.

① On note U la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si l'événement « 1/2 est compris strictement entre X et Y est réalisé ».
Écrire une fonction `simulU` qui simule la variable U et une fonction `espU` qui estime l'espérance de U.

② On note Z l'aire du carré $MNPQ$ (éventuellement réduit à un point).

a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.

b) Calculer l'espérance de Z.

c) Donner une densité de $X - Y$.

d) En déduire une densité de Z et confirmer la réponse obtenue en 2.b).

③ On note I le centre du carré $OABC$

a) Quelle est la probabilité que I soit le centre du carré $MNPQ$?

b) Quelle est la probabilité que I soit à l'intérieur du carré $MNPQ$?

④ Soit E un point de coordonnées $(a, b) \in [0, 1]^2$. On note $p(a, b)$ la probabilité que E soit à l'intérieur du carré $MNPQ$.

a) Exprimer $p(a, b)$ en fonction de a, et b si $a \geq b$.

b) Déterminer $p(a, b)$ si $a \leq b$.

c) Justifier que cette probabilité est maximale pour $a = b = \dfrac{1}{2}$.

d) Préciser la ligne de niveau $k \in]0, 1/2[$ de $(a, b) \longmapsto p(a, b)$.
Tracer les lignes de niveau k pour $k \in \left\{ \dfrac{i}{40}, 1 \leq i \leq 9 \right\}$ à main levée ou au moyen d'un script Python.