$$\boxed{\text{Exercice 5 (oral Agro.Véto 2021)}}$$

① $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, U et V indépendantes.
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$

a) Soit $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$.

- $U(\Omega) =]0,1[\Rightarrow \ln(U(\Omega)) = \mathbb{R}_-^* \Rightarrow T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ car $-\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}_-^*$
- $\forall x \leq 0$, $F_T(x) = P(T \leq x) = 0$
- $\forall x > 0$, $F_T(x) = P[-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \leq x) = P(\ln(U) \geq -\lambda x)$

$$= P[U \geq e^{-\lambda x}) = 1 - F_U(\underbrace{e^{-\lambda x}}_{\in]0,1[\ \forall x > 0}) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Conclusion $\boxed{-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) ; -\frac{1}{\mu}\ln(V) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)}$

b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ 2 VAR indépendantes
Si on ne veut pas avoir recours à la fonction "min" on écrira en posant $T = \min(X,Y)$:

```
def simulT(lbd, mu):
    X = - log(rdm.random())/ lbd
    Y = - log(rdm.random())/ mu
    if Y < X:
        return Y
    else:
        return X
```

c) $T = \min(X,Y)$; $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ car $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^* = Y(\Omega)$.

$\forall x \leq 0$, $F_T(x) = P(T \leq x) = 0$
$\forall x > 0$, $F_T(x) = P[\min(X,Y) \leq x) = 1 - P[\min(X,Y) > x)$

$$= 1 - P((X > x) \cap (Y > x))$$

$$= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$$

car X et Y indépendants

$$= 1 - e^{-\lambda x} \cdot e^{-\mu x} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)x}$$

Conclusion $\boxed{T = \min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)}$

d) $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ donc $-Y(\Omega) = \mathbb{R}_-^*$.
$\Rightarrow \forall x \geq 0$, $F_{-Y}(x) = 1$ ou encore $f_{-Y}(x) = 0$

$\forall x<0$, $F_{-Y}(x) = \mathbb{P}(-Y \le x) = \mathbb{P}(Y \geq -x) = 1 - F_Y(-x)$

On obtient une densité de $-Y$ par dérivation de F_{-Y}. Soit

$$\forall x<0, \quad f_{-Y}(x) = F_Y'(\underbrace{-x}_{>0}) = \mu e^{\mu x}$$

Conclusion $\boxed{f_{-Y}(x) = \mu e^{\mu x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)}$

e) Soit h une densité de $X-Y = X+(-Y)$.

→ On utilise le rappel de cours après avoir souligné que X et $-Y$ sont indépendantes car X et Y le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t) \cdot f_{-Y}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t) \mu e^{\mu t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(t)\, dt.$$

$$= \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda+\mu)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(t)\, dt.$$

avec $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t) = 1$ si $x-t>0 \Leftrightarrow t<x$

$$= \mathbb{1}_{]-\infty, x)}(t).$$

et donc:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(t) = \mathbb{1}_{]-\infty,x) \cap \mathbb{R}_-^*}(t)$$

1er cas si $x<0$ alors $]-\infty, x) \cap \mathbb{R}_-^* =]-\infty, x)$

Donc

$$h(x) = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} e^{(\lambda+\mu)t}\, dt$$

or $\forall b<0$, $\displaystyle\int_b^x e^{(\lambda+\mu)t}\, dt = \left[\frac{1}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t}\right]_b^x$

$$= \frac{e^{(\lambda+\mu)x} - e^{(\lambda+\mu)b}}{\lambda+\mu} \xrightarrow[b \to -\infty]{} \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu}$$

Donc, si $x<0$:

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} e^{(\lambda+\mu)x} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x}$$

2ème cas : si $x \geq 0$, alors $]-\infty, x] \cap \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_-^*$

Donc,

$$h(x) = \lambda \mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda+\mu)t} \, dt$$

$$= \lambda \mu e^{-\lambda x} \lim_{b \to -\infty} \frac{1 - e^{(\lambda+\mu)b}}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x}$$

conclusion

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

f) $\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X - Y \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} h(x)\, dx$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \int_{-\infty}^{0} e^{\mu x} dx = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \underbrace{\lim_{b \to -\infty} \frac{1 - e^{\mu b}}{\mu}}_{= \frac{1}{\mu}}$$

conclusion

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

② les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellt indépendantes.

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{2n} \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.

$\forall i \geq 2$:

« X_i est un creux » $= (X_i \leq X_{i-1}) \cap (X_i \leq X_{i+1})$

a) « X_2 est un creux » $= (X_2 \leq X_1) \cap (X_2 \leq X_3)$

« X_3 est un creux » $= (X_3 \leq X_2) \cap (X_3 \leq X_4)$

```
def estimProba_Xcreux(i, m=10000):
    S=0
    for k in range(m):
        if i%2 ==0 : # i pair, i-1 et i+1 impairs
            xg = -log(rdm.random())
            xd = -log(rdm.random())
            xi = -log(rdm.random())/2
        else:
            xg = -log(rdm.random())/2
            xd = -log(rdm.random())/2
            xi = -log(rdm.random())
        if xg>=xi and xi <=xd :
            S += 1
    return S/m
```

b) $P[(X_2 \leq X_1) \cap (X_2 \leq X_3)]$

$$= P(X_2 \leq \min(X_1, X_3)) \text{ où } X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$$

$$\min(X_1, X_3) \hookrightarrow \mathcal{E}(1+1)$$

(d'après ①.c)...)

Or X_2 étant indépendante de X_1 et X_3 et donc de $\min(X_1, X_3)$ d'après le lemme de coalition, on a :

$$\boxed{P(\text{"}X_2 \text{ est un vieux"}) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}}$$

[Notre fonction Python renvoyait 0,4937]

De même,

$$P[(X_3 \leq X_2) \cap (X_3 \leq X_4)] = P(X_3 \leq \min(X_2, X_4))$$

où $\begin{cases} X_3 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \\ \min(X_2, X_4) \hookrightarrow \mathcal{E}(4) \\ X_3 \text{ et } \min(X_2, X_4) \text{ indépendantes} \end{cases}$

Soit

$$\boxed{P(\text{"}X_3 \text{ est un vieux"}) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}}$$

[Notre fonction a renvoyé 0.1998...]

③ a) $P(\text{"}X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont des vieux"})$

$$= P((X_2 \leq X_1) \cap \underbrace{(X_2 \leq X_3) \cap (X_3 \leq X_2)}_{(X_2 = X_3)} \cap (X_3 \leq X_4))$$

$$= P((X_2 \leq X_1) \cap \underbrace{(X_2 - X_3 = 0)}_{= \emptyset \text{ car } X_2 - X_3 \text{ VAR à densité.}} \cap (X_3 \leq X_4))$$

$$= P(\emptyset) = 0$$

b) "X_4 est un vieux" $= (X_3 \geq X_4) \cap (X_4 \leq X_5)$

"X_8 est un vieux" $= (X_7 \geq X_8) \cap (X_8 \leq X_9)$

Or X_3, X_4, X_5 indépendantes de X_7, X_8 et X_9 donc les événements "X_4 est un vieux" et "X_8 est un vieux" sont indépendants.

c) Comme précédemment on peut assurer que les 10 variables aléatoires X_4, X_8 à X_{40} sont indépendantes avec

$$P(\text{"}X_{4i} \text{ est un vieux"}) = P(\text{"}X_2 \text{ est un vieux"}) = \frac{1}{2}.$$

Si N est le nombre de vieux,

alors $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 1/2)}$