SUJET 5 -

On rappelle que, si X et Y sont deux variable aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$. On rappelle également qu'en langage Python, la suite d'instruction :

```
from numpy.random import random
x = random()
```

affecte dans x la réalisation d'une variable aléatoire selon la loi uniforme sur $]0,1[$.

① On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Soient λ, μ deux réels strictement positifs.

a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\dfrac{1}{\mu}\ln(V)$.

b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.
Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie (sans recours à la fonction `min` une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

d) Déterminer la loi de $-Y$.

e) Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f) Calculer alors la probabilité de l'événement $(X \leq Y)$.

② Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
— X_1, X_3 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
— X_2, X_4 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.
Si $i \geq 2$, on dit que l'événement « X_i est un **creux** » est réalisé si $(X_i \leq X_{i-1})$ et $(X_i \leq X_{i+1})$ sont réalisés tous les deux.

a) A l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».

b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.

③ a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux » ?

b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont-ils indépendants ?

c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \cdots, X_{40}$