SUJET 4 -

On rappelle que, si X et Y sont deux variable aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité h définie par $h(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toute la loi exponentielle de paramètre λ. On définit la variable aléatoire réelle N égale au plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

① a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Écrire une fonction Python $N(\ell)$ qui prend en entrée un paramètre $\ell > 0$ et qui simule la variable aléatoire N avec $\lambda = \ell$.

c) Écrire une fonction Python espN (ℓ) qui prend en entrée un paramètre $\ell > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de N si elle existe (encore une fois avec $\lambda = \ell$). Que peut-on conjecturer ?

② Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, U suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et V suivant la loi exponentielle de paramètre $\delta > 0$.

a) Déterminer une densité de $-V$.

b) Déterminer une densité de $U - V$.

c) En déduire que $P(U > V) = \frac{\delta}{\mu+\delta}$.

③ Montrer que $P(N = 1) = \frac{1}{2}$.

④ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n puis reconnaître la loi de M_n et préciser son paramètre.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(N > n)$.

c) En déduire que, si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a $P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

⑤ Déterminer $P(N = 0)$.

⑥ La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?