SUJET 3 -

Exercice :

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

① a) Vérifier que f est une densité de probabilité de variable aléatoire réelle.
On dit qu'une variable aléatoire réelle suit la loi *logistique standard* si elle admet f pour densité.
On notera dans la suite de l'exercice X une variable aléatoire suivant la loi logistique standard.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

② a) Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $]0,1[$.
Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.

b) Écrire une fonction Python `logis()` qui simule la variable aléatoire X.

c) Écrire une fonction `esp_logis()` qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X.
Que peut-on conjecturer ?

d) En supposant cette conjecture comme exacte, écrire une fonction Python `var_logis()` qui renvoie une valeur approchée de la variance de X.

③ Montrer que X admet une espérance et que : $\mathbb{E}(X) = 0$.

④ On admet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que X admet une variance et que :

$$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = 4\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}dx$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx$

d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

e) Déterminer $\mathbb{V}(X)$.