SUJET 2 -

Exercice :

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
Si X *est une variable aléatoire, on notera* $\mathbb{E}(X)$ *son espérance et* $\mathbb{V}(X)$ *sa variance.*
Soient $a \in]0,1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

① Montrer que f est une densité.

② On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

③ On considère la variable aléatoire Y donnée par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On pose $U = 1 - e^{-Y}$. Montrer que U suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

c) En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y.

d) Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.

④ a) Donner une densité, qu'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a.

b) A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.

c) En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.

d) En déduire que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.