SUJETS DE PROBABILITES

Sujet 3 :

① a) La variable $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $x>0$, on a

$$P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)\leqslant x\right)=P\left(U\leqslant 1-e^{-\lambda x}\right)=1-e^{-\lambda x}\quad \text{car } 1-e^{-\lambda x}\in\left]0,1\right[$$

Ainsi $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) On écrira par exemple :

```python
def N(L):
    T0 = -log(1-rdm.random())/L
    res = 1
    while -log(1-rdm.random())/L > T0:
        res += 1
    return res
```

c) On répète un nombre m de fois (supposé grand) et de façon indépendantes la fonction précédente :

```python
def espN(L, m=10000):
    S = 0
    for _ in range(m):
        S += N(L)
    return S/m
```

On conjecture que N semble ne pas admettre d'espérance.

② a) La variable $-V$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_-^-$et si $x\leqslant 0$, on a $P(-V\leqslant x)=P(V\geqslant -x)=e^{\delta x}$.
En dérivant, on obtient une densité de $-V$ donnée par $f_{-V}(x)=\begin{cases}\delta e^{\delta x} & \text{si } x\leqslant 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$

b) Par indépendance, on peut utiliser la formule de convolution sur U et $-V$. On a donc :

$$f_{U-V}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\mu t}\delta e^{\delta(x-t)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t)\mathrm{d}t=\mu\delta e^{\delta x}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\mu+\delta)t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t)=1 \text{ si } x-t\leq 0\Leftrightarrow t\geq x \text{ soit } \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t)=\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(t)$$

et donc

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t)=\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\cap[x,+\infty[}=\begin{cases}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(t) & \text{si } x\geq 0\\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) & \text{si } x<0\end{cases}$$

Dès lors :
— Si $x\geq 0$,

$$f_{U-V}(x)=\mu\delta e^{\delta x}\int_x^{+\infty}e^{-(\mu+\delta)t}\mathrm{d}t=\mu\delta e^{\delta x}\times\frac{e^{-(\mu+\delta)x}}{\mu+\delta}=\frac{\mu\delta}{\mu+\delta}e^{-\mu x}$$

— Si $x<0$, on a

$$f_{U-V}(x)=\mu\delta e^{\delta x}\int_0^{+\infty}e^{-(\mu+\delta)t}\,\mathrm{d}t=\mu\delta e^{\delta x}\times\frac{1}{\mu+\delta}=\frac{\mu\delta}{\mu+\delta}e^{\delta x}$$

c) On a $P(U > V) = \int_0^{+\infty} f_{U-V}(t)\mathrm{d}t = \dfrac{\mu\delta}{\mu+\delta} \times \dfrac{1}{\mu} = \frac{\delta}{\mu+\delta}$.

③ D'après le résultat de la question précédente, on a $P(N = 1) = P(T_0 > T_1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda} = \dfrac{1}{2}$.

④ a) Si $t < 0, F_{M_n}(t) = 0$. Si $t \geqslant 0, F_{M_n}(t) = 1 - P(M_n > t) = 1 - P(T_0 > t)^n = 1 - \left(e^{-\lambda t}\right)^n = 1 - e^{-n\lambda t}$.
Ainsi M_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

b) On a $P(N > n) = P(M_n > T_0) \underset{2\cdot(c)}{=} \dfrac{\lambda}{n\lambda + \lambda} = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Comme $n - 1 \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$P(N = n) = P(N > n) - P(N > n-1) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

⑤ On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$, donc

$$P(N = 0) = 1 - P(N = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

⑥ Si $m \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{n=0}^{m} nP(N = n) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en conclut que N n'admet pas d'espérance.