

**Programme de colle quinzaine 9 - semaine 2**

Les questions possibles sont les suivantes :

- **Q1 : Somme de variables aléatoires indépendantes** (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur  $[0, 1]$ .
- **Q2 : Somme de variables aléatoires indépendantes** (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de même paramètre  $\lambda$ .
- **Q3** : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , bijectif. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

- **Q4** : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp}(f^n)$  et  $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$ .
- **Q5** : Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- **Q6** : Si deux matrices sont semblables alors elles ont même valeurs propres. Preuve et exemple de réciproque fausse.
- **Q7** :  $A$  et  $A^T$  ont même valeurs propres et  $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(A.T))$ .
- **Q9** : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim(E) = n = \text{Card}[\text{Sp}(f)]$  et  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $g^3 + 2g = f$ .  
Montrer successivement que  $g \circ f = f \circ g$ , les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et  $g$  est diagonalisable.

**Exercices :**

On donnera, au choix, un ou deux exercices sur l'un des points ci-dessous.

- Formule du produit de convolution.  
*☞ : Toute simulation Python des variables aléatoires en jeu sera la bienvenue.*
- valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation.

**Bonnes colles !**