

**Programme de colle quinzaine 10 - semaine 1**

Les questions possibles sont les suivantes :

- **Q1** : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp}(f^n)$  et  $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$ .
- **Q2** : Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- **Q3** :  $A$  et  $A^T$  ont même valeurs propres et  $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(A^T))$ .
- **Q4** : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim(E) = n = \text{Card}[\text{Sp}(f)]$  et  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $g^3 + 2g = f$ .  
Montrer successivement que  $g \circ f = f \circ g$ , les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et  $g$  est diagonalisable.
- **Q5** : Variables aléatoires discrètes : Inégalité de Markov.
- **Q6** : Loi de Poisson. Espérance et/ou variance.
- **Q7** : Savoir traiter l'exercice suivant : « Un magasin possède  $n$  caisses. On suppose que le nombre de clients se présentant dans le magasin suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda$  et que ceux-ci, une fois entrés, se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les différentes caisses. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de clients qui se présentent à la caisse n°1. »
- **Q8** : Loi géométrique. Espérance et variance.
- **Q9** : Loi géométrique sur  $\mathbb{N}$ . Espérance et variance.
- **Q10** : Propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique.

**Exercices :**

On donnera, au choix, un ou deux exercices sur l'un des points ci-dessous.

- valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation.
- variables aléatoire discrètes (pas de vecteurs aléatoires cette semaine).

**Bonnes colles !**