MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire et Variables aléatoires à densité

Problème 1 : Agro-Véto A 2013

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrons que f_λ est une densité de probabilité :

a) f est continue sur $]-\infty, 0]$ car constante égale à 0 et sur $]0, +\infty[$ car $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs $\underset{x\to 0}{lim} f_\lambda(x) = \lambda \neq f_\lambda(0) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

b) $\lambda > 0$ donc il est immédiat que $\boxed{f_\lambda \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ par application de la relation de Chasles.
Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.
Donc $\underset{t\to+\infty}{lim} F(t) = 1$ car $\lambda > 0$. Soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabilité}}$.

② a) Si $0 < \alpha < 1$ alors $\underset{t\to+\infty}{lim} t^{\alpha-1} = 0 = \underset{t\to+\infty}{lim} e^{-t/2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$ et si $\alpha \geq 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$.
Quel que soit le cas de figure, il existe donc un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

D'autre part , $\forall t > 0, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1 \ (*)}$$

La fonction : $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
$\forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ s'obtient en multipliant $(*)$ par $e^{-t/2}$.
et $\int_A^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente (car $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente pour tout $a > 0$)
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt \text{ converge}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La limite est en général trouvée. Par contre l'encadrement est rarement justifié et le théorème sur les intégrales de fonctions positives rarement cité.*
On constate des confusions avec les suites : « à partir d'un certain rang ... »
Plusieurs candidats affirment que $\displaystyle\int_A^{+\infty}$ *dx converge.*
D'autres pensent que la fonction étant bornée, l'intégrale converge. Ou encore que la fonction ayant une limite nulle, l'intégrale converge... On peut lire aussi :

$$0 \leq f \leq g \textit{ sur } [A, +\infty[\textit{ donc } \int_A^{\infty} f(x)dx \leq \int_A^{\infty} g(x)dx$$

or $\int_A^{\infty} g(x)dx$ *converge donc* $\int_A^{\infty} f(x)dx$ *converge.* »

b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$

$\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ est convergente car, si on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^A t^{\alpha-1}dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_x^A$, soit $G(x) = \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha}$,

alors $\underset{x\to 0}{lim} G(x) = \underset{x\to 0}{lim} \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha} = \dfrac{A^\alpha}{\alpha}$ puisque $\alpha > 0$. Soit $\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge.

Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

Lu dans le rapport de jury : « *Le problème de la borne* 0 *est très rarement perçu.* »

Et par application de la relation de Chasles, on peut conclure à l'aide des questions 2.a) et 2.b) que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

③ a) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (on reconnaît f_1 étudiée à la question 1)).

b) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$.

On pose : $\begin{cases} u(t) = t^\alpha & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ si $0 < \alpha < 1$ et sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 1$.

✐ On évitera de distinguer les cas en écrivant que pour tout $\alpha > 0$, u, v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ car $\alpha > 0$

On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée :

$\Gamma(\alpha + 1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

✐ *Remarque :* Si on souhaite repasser par une intégrale définie de première année, il faut faire l'intégration par parties sur :

$$\int_x^y t^\alpha e^{-t}dt \text{ puis faire la limite quand } x \text{ tend vers 0 et } y \text{ tend vers } +\infty...$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des intégrations par parties sont effectuées directement (sans précaution) sur des intégrales impropres* ».

c) Une récurrence s'impose :

— Pour $n = 1$, on a $\Gamma(n) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ d'après 3.a)

— On suppose que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour n fixé $(n \geq 1)$

— Alors, d'après la question précédente : $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$.

— ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n - 1)!}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certaines notions élémentaires ne sont pas comprises. Ici, aucune « suite géométrique de raison n... »*

Rappelons que le résultat étant donné par l'énoncé, une justification « récurrence immédiate » ne peut suffire. »

④ a) pour $n = 1$, on obtient immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_{n,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda}{0!}x^0 e^{-\lambda x} = f_\lambda(x)$ et pour tout x négatif, $\varphi_{n,\lambda}(x) = 0 = f_\lambda(x)$

Conclusion : $\boxed{\varphi_{n,\lambda} = f_\lambda}$

b) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx$

A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

c) On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi_{n,\lambda}(x)|dx = \int_0^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$,

d'après la relation de Chasles et parce que $\varphi_{n,\lambda}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\int_0^{+\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx$ qui est une intégrale convergente.

Donc $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut : $\frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx = \dfrac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① *Précisons l'ensemble de continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y :*

— Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $x - 1 \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc continue sur $[0,1]$.

— Si $0 < x < 1$ et $y \geq 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1]$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1]$.

— Si $x \geq 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$.

— Si $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.

✐ On retiendra que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x, y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② *Démontrons grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (on ne demande pas leur valeur).*

Il suffit de poser $u = 1 - t = \varphi(t)$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et strictement décroissante.

Dès lors, $B(y,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$ est de même nature que :

$$\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}(-du) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = B(x,y)$$

Conclusion : $\boxed{B(y,x) \text{ et } B(x,y) \text{ sont de même nature et } B(y,x) = B(x,y) \text{ en cas de convergence}}$

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) *Calculons $B(1,q)$: * $B(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}dt = \left[-\dfrac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 = \dfrac{1^q}{q}$

$$\boxed{B(1,q) = \frac{1}{q}}$$

b) Pour $p \geq 2$, *calculons $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$:*

Menons une intégration par parties en notant que, puisque $p-1 \geq 1$ et $q \geq 1$, les intégrales $B(p,q)$ et $B(p-1,q+1)$ sont des intégrales définies.

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (1-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(1-t)^q}{q} \end{cases} \qquad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]$$

$$B(p,q) = \left[-t^{p-1}\frac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$$

$$\boxed{B(p,q) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)}$$

c) *En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ autrement dit : $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$*

Menons une récurrence sur p en posant : $\forall p \geq 1, H_p =$« $\forall q \geq 1, B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ »

Initialisation : H_1 est vrai d'après a)
Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que H_p est vrai
$B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}$ d'où H_{p+1} est vrai
Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x,y réels strictement positifs.

a) *Montrons que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$:*
Si $x \in]0,1[$, alors on a également $1-x \in]0,1[$. Donc, d'après la question II/1) nous savons que l'intégrale $B(x,1-x)$ est doublement généralisée.
Mais, si la relation $(*)$ reste vraie pour tous les réels x,y strictement positifs, elle est donc vraie pour $x > 0$ et $1-x > 0$.
Dès lors :

$$B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

puisque $\Gamma(1) = 1$ d'après I/3)a.
Or on a vu dans la première partie du problème que $\Gamma(\alpha)$ converge pour tout $\alpha > 0$ donc $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ convergent.
Conclusion : $\boxed{B(x,1-x) \text{ converge et vaut } \Gamma(x)\Gamma(1-x)}$

b) A l'aide de II/2) et en posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, *montrons que* $B(x, 1-x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u} du$ *:*

On commence par noter que $B(x, 1-x) = B(1-x, x)$ en utilisant la question II/2).
Puis en suivant l'indication : $t = \dfrac{1}{1+u} \Leftrightarrow 1 + u = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{t} - 1 = \psi(t)$.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante.
Ce changement de variable ne change donc pas la nature de l'intégrale.
Pour préparer le changement de variable, on note par ailleurs que

$$1 - t = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \text{ et } dt = -\frac{1}{(1+u)^2} du$$

Dès lors $B(1-x, x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1} dt$ qui converge d'après 4.a) est égale à :

$$J = \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{1+u}\right)^{-x} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(-\frac{du}{(1+u)^2}\right) \text{ avec } \alpha = \lim_{t\to 0} \psi(t) = +\infty \text{ et } \beta = \lim_{x\to 1} \psi(t) = 0$$

Soit

$$\boxed{B(1-x, x) = J = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u} du}$$

c) *Calculons* $\Gamma(0.5)$ *en pensant au changement de variable :* $v = \sqrt{u}$ *:*
En prenant $x = 0.5$, puisque $1 - x = 0.5$, on obtient :

$$\Gamma^2(0.5) = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\sqrt{u}} du$$

C'est alors qu'on utilise le changement de variable recommandé. La fonction $u \longmapsto \sqrt{u} = v$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante. Donc, puisqu'on est assuré de la convergence de $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et que ce changement de variable ne change pas sa nature, on a immédiatement :

$$\Gamma^2(0.5) = \int_0^\infty \frac{2v dv}{(1+v^2)v} = 2 \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \pi$$

Conclusion : $\boxed{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}}$

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) *Pour tout* $\alpha > 1$, *montrons en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que* $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha} dx$ *converge :*
Puisque $\alpha > 1$, si $x \geq 1$ alors $x^\alpha \geq x$ et donc $-x^\alpha \leq -x$.
Dès lors

$$\forall x \geq 1,\ e^{-x^\alpha} \leq e^{-x}$$

Or $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} dx$ converge puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t\to+\infty} (e^{-1} - e^{-t})$ existe et vaut $1/e$.
Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives : $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha} dx \text{ converge}}$.

On peut en déduire que $\boxed{I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx \text{ converge}}$ par application de la relation de Chasles car la fonction $x \longmapsto e^{-x^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$.

b) *A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrons que : $I_\alpha = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:*

Posons $\varphi(x) = x^\alpha = t$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante.
Par ailleurs : $t = x^\alpha \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc

$$dx = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt \text{ et } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Donc $I_\alpha = \int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx$ est de même nature que :

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-t} dt$$

D'après la question précédente, ces deux intégrales sont convergentes. On peut donc conclure à leur égalité et conclure : $\boxed{I_\alpha = J_\alpha = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$

c) *Montrons qu'on peut en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss :*
Il suffit de prendre $\alpha = 2$ dans l'intégrale précédente.
Alors $I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or on a montré que 4.c) que $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ donc $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour terminer, il suffit de noter que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est paire.

Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \text{ converge et vaut } 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}}$

Problème 2 : Agro-Véto A 2020

1. a) On calcule les inverses par l'une des méthodes vues en cours. Par exemple, pour l'inversibilité de D_3 on pourra écrire : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$D_3 X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} y &= a \\ z &= b \\ x &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= c \\ y &= a \\ z &= b \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Conclusion : $\boxed{D_3 \text{ est inversible et } D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

De même, D_4 est inversible et $D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Plusieurs réponses sont possibles :

i. On raisonne comme dans la question précédente et on passe par la résolution de (S) $D_p X = Y$, soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= a_1 \\ x_3 &= a_2 \\ \vdots & \\ x_p &= a_{p-1} \\ x_1 &= a_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= a_p \\ x_2 &= a_1 \\ \vdots & \\ x_{p-1} &= a_{p-2} \\ x_p &= a_{p-1} \end{cases}$$

par simple permutation circulaire des lignes, à savoir : $L_1 \leftarrow L_p \leftarrow L_{p-1} \leftarrow \cdots \leftarrow L_2 \leftarrow L_1 \cdots$
Soit $\boxed{D_p \text{ inversible et } D_p^{-1} = {}^tP}$

ii. On utilise l'indication de l'énoncé et d'après la question précédente, on conjecture que D_p est inversible et que son inverse est sa transposée notée D_p^T. On prouve la conjecture en calculant le produit $D_p D_p^T$: soit $A = D_p D_p^T$, et $a_{i,j}$ le coefficient de A sur la ligne i et la colonne j.

— *Rédaction 1 :* On utilise la définition du produit, à savoir, si on note $d_{i,j}$ les coefficients de D_p et $d^T_{i,j}$ les coefficients D_p^T :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} d^T_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} d_{j,k}$$

or, si $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a : $d_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dès lors $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 = j+1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $a_{p,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} d_{p,k} d_{j,k} = 1$ si $j = p$ car $d_{p,k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$...

— *Rédaction 2 : « à la main »* Ce coefficient $a_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit (matriciel) de la ligne i de D_p par la colonne j de D_p^T, dont les coefficients sont ceux de la ligne j de D_p. Or chaque ligne de D_p ne comporte qu'un seul 1, qui se trouve en position $i+1$ pour la ligne i (position 1 pour la ligne p) ; le 1 de la ligne i est donc dans la même position que celui de la ligne j si et seulement $i = j$, donc $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Conclusion : $\boxed{\text{Tout ça prouve que } A = I_n\text{, ce qui montre que } D_p \text{ est inversible d'inverse } D_p^T.}$

2. a) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

   On a $X + \lambda X' = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x'_1 \\ \vdots \\ x_p + \lambda x'_p \end{pmatrix}$ d'où :

$$f(X + \lambda X') = \sum_{k=1}^{p}(x_k + \lambda x'_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k + \lambda \sum_{k=1}^{p} x'_k = f(X) + \lambda f(X'),$$

   ce qui prouve que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

   b) La fonction f n'est pas injective car par exemple $f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$ (le noyau de f contient un vecteur non nul).

   c) La fonction f est surjective : soit $x \in \mathbb{C}$, cet élément de l'espace d'arrivée a pour antécedent par f par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

   d) La dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel est 1, donc le rang de f vaut 1 puisqu'elle est surjective, et donc d'après le théorème du rang, la dimension de son noyau est $\dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - 1$ c'est-à-dire $p - 1$.

3. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, puisque $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^k$. On en déduit :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k = \frac{1}{p}\frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{2i\pi}{p}}} = 0.$$

   Géométriquement, $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k$ est l'affixe de l'isobarycentre des points $A_0, \ldots, A_{p-1}$, et on a trouvé que cet isobarycentre est le centre O du cercle sur lequel sont placés ces points.

4. Soit z un complexe non nul ; on peut l'écrire $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel quelconque. On a alors :

$$z^p = 1 \iff r^p e^{pi\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^p = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, p\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi/p \end{cases}$$

1 Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

5. Il s'agit de relier la loi de U_{n+1} à celle de U_n. On va utiliser le système complet d'événements $\{(U_n = k)\}_{k \in [\![0, p-1]\!]}$ et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = i) \times \mathbb{P}(U_n = j)$$

Commençons en distinguant les cas $i = 0$ et $i = p - 1$:

— Pour $i = 0$:
$\mathbb{P}_{(U_n=p-1)}(U_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n=1)}(U_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall 2 \leq j \leq p-2$. Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(U_n = 1) + \mathbb{P}(U_n = p-1))$$

— Pour $i = p - 1$:
$\mathbb{P}_{(U_n=p-2)}(U_{n+1} = p-1) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n=0)}(U_{n+1} = p-1)$ et $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall j \in [\![1, p-1]\!] \setminus \{p-2\}$. Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = p-1) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(U_n = 0) + \mathbb{P}(U_n = p-2))$$

— Pour $1 \leq i \leq p-2$:
Lorsque la particule se trouve en A_j, elle ne peut se déplacer que vers A_{j+1} ou A_{j-1} et ceci avec probabilité $1/2$. On a donc :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i-1) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i+1)$$

Ceci montre qu'on a bien une formule du type $X_{n+1} = MX_n$, où M est la matrice carrée dont les coefficients sont les $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = i)$. Autrement dit la matrice qui a des $1/2$ sur la surdiagonale, la sousdiagonale, et les coins en haut à droite et en bas à gauche, et des 0 partout ailleurs. Ou encore :

$$M_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(D_p + D_p^T).$$

6. On a $X_n = M_p^n X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. a) On cherche donc les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $rg(M_3 - \lambda I_3) < 3$; on calcule ce rang par pivot, et on trouve après calculs (je ne les ai pas rédigés mais ils doivent figurer sur la copie) :

$$rg(M_3 - \lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & (1+2\lambda)(2-2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = -1/2 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) On détermine ensuite les noyaux demandés, à partir de la dernière matrice du calcul ci-dessus :

$$E_{-1/2} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Conclusion : $\boxed{E_{-1/2} = \text{Vect}\{u_1, u_2\} \text{ où } u_1 = (-1,1,0) \text{ et } u_2 = (-1,0,1)}$

$$E_1 = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect((1,1,1)).$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{u_3\} \text{ où } u_3 = (1,1,1)}$

Par ailleurs, on vérifie comme nous le demande l'énoncé, que :

$$X \in E_\lambda(M_3) \Leftrightarrow (M_3 - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (f_3 - \lambda id_3)(u) = 0 \Leftrightarrow f_3(u) - \lambda u = 0 \Leftrightarrow f_3(u) = \lambda u$$

Conclusion : $\boxed{f_3(u_1) = -\frac{1}{2}u_1,\ f_3(u_2) = -\frac{1}{2}u_2 \text{ et } f_3(u_3) = u_3}$

c) Montrons que M_3 et $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables : Cela découle immédiatement de la question précédente, à condition de montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si c'est le cas, alors par construction, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f_3) = D$.

Montrons donc que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$: C'est une famille de cardinal égale à 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On fait le choix ici de calculer le rang de cette famille de vecteurs en passant par le rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur qui n'est autre que la matrice de passage qui est demandée en fin de question.

$$\text{rg}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

On peut donc conclure que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\boxed{M_3 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

d) Après calcul, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [✐ *A faire. C'est très rapide*]

e) D'après la question 6), X_n est la première colonne de M_3^n. On a, par une récurrence à écrire dans la copie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M_3^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1/2)^n & -(-1/2)^n & 1 \\ (-1/2)^n & 0 & 1 \\ 0 & (-1/2)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La limite de $P(U_n = k)$ quand n tend vers $+\infty$ est donc $1/3$, quel que soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Les trois positions tendent à devenir équiprobables lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

8. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur et λ un complexe. On a :

$$\begin{aligned} D_pX = \lambda X \quad &\iff \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_p = \lambda x_{p-1} \\ x_1 = \lambda x_p \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_p = \lambda^{p-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^p x_1 \end{cases} \\ &\iff \quad X = 0 \text{ ou } \left(\lambda^p = 1 \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix} x_1 \right) \end{aligned}$$

Conclusion : Les valeurs de λ pour lesquelles il existe $X \neq 0$ avec $D_pX = \lambda X$ sont donc les complexes λ tels que $\lambda^p = 1$.

En prenant $x_1 = 1$, on obtient qu'il existe p valeurs λ complexes, à savoir les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, obtenus à la question I.4. pour lesquelles $D_pX_k = z_kX_k$ avec $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$.

9. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. *On cherche à montrer que Q est inversible :*

✐ La question qu'il faut se poser c'est, quel est l'intérêt de montrer cette inversibilité. La réponse est immédiate si on note que la matrice Q est la matrice des coordonnées des vecteurs X_k obtenus à la question précédente (puisque $z_0 = 1$). Dès lors, montrer l'inversibilité de Q c'est montrer que son rang vaut p et donc que la famille $\{X_0 \cdots, X_{p-1}\}$ est libre...

Allons-y et, conformément à l'énoncé, on pose $R = {}^tQ$ et on considère le système homogène (S) : $RX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$.

— *Montrons que* $1, z_1, \cdots z_{p-1}$ *sont racines du polynôme* $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_{p-1}X^{p-1}$ *:*

Le système (S) donne :

$$RX = 0 \Leftrightarrow {}^tQX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{p-1} \\ 1 & z_{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_1 a_1 + \cdots + z_1^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_2 a_1 + \cdots + z_2^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + z_{p-1} a_1 + \cdots + z_{p-1}^{p-1} a_{p-1} & = 0 \end{cases}$$

ou encre : $1, z_1, \cdots, z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-1}$.

— *Concluons que la seule solution de (S) est la solution nulle :* Il suffit de dire que le polynôme P est un polynôme de degrés inférieur ou égale à $p-1$. Or il possède p racines distinctes (cf. 1.4.).
Conclusion : $\boxed{P \text{ est le polynôme nul ou encore } a_0 = 0 = a_1 = \cdots a_{p-1}}$

— On en déduit que le système homogène (S) : $RX = 0$ admet une unique solution qui est la solution nulle. C'est un système de Cramer. La matrice $R = {}^tQ$ associée au système est donc inversible.
Et si on rappelle que $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ)$, alors $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ) = p = ordre(Q)$.
Conclusion : $\boxed{Q \text{ est inversible}}$

10. Posons $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v_k)$ ou $\mathcal{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^p$. *Montrons que la famille $(v_0, v_1, \cdots, v_{p-1})$ est une base de $\mathbb{C}^p$:* Cela découle immédiatement de la question précédente. Le rang de la famille $(v_0, \cdots, v_{p-1})$ est égale au rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur, autrement dit la matrice Q.
Dès lors, $\text{rg}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = \text{rg}(Q) = p$. Ce qui prouve que cette famille est libre.
Par ailleurs $\text{Card}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = p = \dim(\mathbb{C}^p)$.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}'' = (v_0, \cdots, v_{p-1}) \text{ est une base de } \mathbb{C}^p.}$

11. Soit $D_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g_p)$ où g_p est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{B}_2$ est sa base canonique.
On sait grâce à la question 9. que $D_p X_k = z_k X_k$, soit $g_p(v_k) = z_k v_k$.
L'expression de la matrice de g_p dans la base $\mathcal{B}''$ donne immédiatement :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(g_p) = \Delta = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$$

Et d'après les formules de changement de base, puisque par construction $Q = Pass(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'')$, on a : $\boxed{D_p = Q\Delta_p Q^{-1}}$

12. *Justifions l'inversibilité de D_p et exprimons D_p^{-1} en fonction de Q et Δ_p :*
La matrice Δ_p est inversible car elle est diagonale et n'a pas de 0 sur sa diagonale.
On en déduit, à l'aide de la formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour des matrices A et B inversibles, que $D_p^{-1} = (Q^{-1})^{-1}\Delta_p^{-1}Q^{-1} = Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}$.

Par ailleurs, grâce à la question 7., $M_p = \dfrac{1}{2}(D_p + D_p^{-1}) = \dfrac{1}{2}\left(Q\Delta_p Q^{-1} + Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}\right)$, soit :

$$M_p = \frac{1}{2}Q(\Delta_p + \Delta_p^{-1})Q^{-1} = \frac{1}{2}Q\begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On peut alors conclure que dans la base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{C}^p$, la matrice de l'endomorphisme f_p dont M_p est la matrice, est diagonale.

13. *Montrons que M_p est semblable à* $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\pi/p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$ *:*

   Il suffit pour ça de dire que :

   $$\tfrac{1}{2}\left(z_k + \tfrac{1}{z_k}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{2ik\pi}{p}} + e^{-\frac{2ik\pi}{p}}\right) = \cos\left(\tfrac{2k\pi}{p}\right)$$

   ✐ Remarque que les valeurs sur la diagonales sont donc toutes réelles...

14. On suppose dans cette question que p est impair.
   a) Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. *Déterminons* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$:
   Cette limite vaut 0 car avec les hypothèses sur k, p étant impair, l'angle $\frac{2k\pi}{p}$ est dans l'intervalle $]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, et donc son cosinus est strictement compris entre -1 et 1.
   b) En déduire $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} T_p^n$. On commence par rappeler qu'on obtient la puissance n-ième d'une matrice diagonale en élevant les termes de sa diagonale à la puissance n. Dès lors :

   $$\mathop{lim}_{n\to\infty} T_p^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   c) Comme $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} X_n = \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} M_p^n X_0 = \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} QT_p^n Q^{-1}X_0 = Q \cdot \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} T_p^n \cdot Q^{-1}X_0$
   on obtient :

   $$\lim_{n\to\infty} X_n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   La première colonne de la matrice obtenue par le produit de

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ par } Q^{-1}$$

a tous ses coefficients égaux au coefficient en haut à gauche de Q^{-1}. On ne connaît pas ce coefficient, mais on sait que la somme des coefficients de X_n vaut 1 (et la multiplication par X_0 retournera justement cette première colonne...), donc la somme de leurs limites (qui est la limite de la somme) vaut 1 aussi. Donc ce coefficient vaut forcément $1/p$.

d) *Interprétons le résultat obtenu :* Comme dans le cas particulier $p = 3$, les différentes positions possibles pour la particules tendent vers l'équiprobabilité lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

- FIN -