MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire et Variables aléatoires à densité

Le sujet se compose de ***deux problèmes****. On prendra soin de lire l'ensemble des énoncés avant de commencer à composer.*
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Problème 1 : Agro-Véto A 2013

λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1, alors f est une densité de probabilité.

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.
Montrer que f_λ est une densité de probabilité.

② Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

a) En utilisant $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout $t > A$,

$$0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

En déduire que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent pour tout $\alpha > 0$.

③ a) Calculer $\Gamma(1)$.
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

④ On considère la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par : $\varphi_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Reconnaître $\varphi_{1,\lambda}$.
b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\varphi_{n,\lambda}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le changement de variable : $t = \lambda x$.
c) Soit U une variable aléatoire ayant $\varphi_{n,\lambda}$ pour densité. On dira que U admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$ converge absolument et que, sous cette condition : $\mathbb{E}(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$. Montrer que U admet une espérance et la calculer.

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① Préciser la continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y et justifier notamment que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x \geq 1$ et $y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② Démontrer grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (*on ne demande pas leur valeur*).

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) Calculer $B(1,q)$.

b) Pour $p \geq 2$, calculer $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$.

c) En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (*)$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x, y réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x, 1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$.

b) En posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, montrer par ailleurs que $B(x,1-x) = B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du$.

c) Calculer $\Gamma(0.5)$ en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$.

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

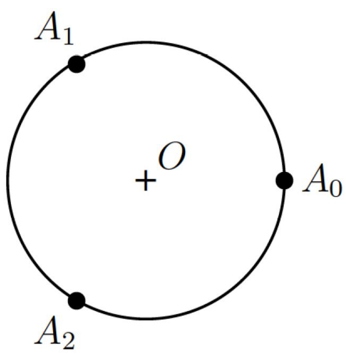
a) Pour tout $\alpha > 1$, montrer en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^\alpha}dx$ converge.
En déduire que $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^\alpha}dx$ converge.

b) A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrer que $I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

c) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.

Problème 2 : Agro-Véto A 2020

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère un repère orthonormal du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et le cercle unité $\mathcal{C}$ sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants $A_0, \ldots, A_{p-1}$ tels que A_0 soit d'affixe 1.
Ainsi pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, A_k est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.
Pour $p = 3$, on a la représentation suivante :



1 Résultats préliminaires

① On considère la matrice $D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Inverser les matrices D_3 et D_4.

b) Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse en fonction de D_p^T.
On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p.

② Soit $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum\limits_{k=1}^{p} x_k$.

a) Prouver que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

b) La fonction f est-elle injective ?

c) La fonction f est-elle surjective ?

d) Déterminer la dimension du noyau de f.

③ Calculez $\frac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} z_k$ en pensant à la somme des termes d'une suite géométrique. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

④ Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ z = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.
On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$.

2 Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$. Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0; p-1]\!]$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n}. La variable aléatoire U_0 est donc constante égale à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et à $p-1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$. La variable U_2 est à valeurs dans $\{2; 0; p-2\}$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2) = \mathbb{P}(U_2 = p-2) = \frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}$.

5. Justifier que pour tout entier n, on a :

$$X_{n+1} = M_p X_n \text{ où } M_p = \frac{1}{2}\left(D_p + D_p^T\right)$$

Indication : une récurrence n'est pas nécessaire. Ce résultat pourra être admis pour la suite

6. Soit n un entier. Donner sans justifications l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n.

7. On suppose ici que $p = 3$ et on a donc $M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles $M_3 - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

   b) Déterminer pour chacune de ces valeurs de λ une base de l'espace vectoriel $E_\lambda(M_3)$ défini par $E_\lambda(M_3) = \ker(M_3 - \lambda I_3)$ et vérifier que pour tout $X \in E_\lambda(M_3)$, on a : $M_3 X = \lambda X$.

   c) Si on suppose que M_3 est la matrice d'un endomorphisme f_3 de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors $M_3 X = \lambda X \Leftrightarrow f_3(u) = \lambda u$.
   Montrer que l'union des bases de $E_{\lambda_1}(M_3)$ et $E_{\lambda_2}(M_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que M_3 et $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

   d) Donner une matrice P, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_3 = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1}.

   e) Déterminer $\underset{n \to \infty}{lim} D^n$ et en déduire, pour tout $k \in [\![0; 2]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez le résultat obtenu.

8. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\exists X \neq 0 / D_p X = \lambda X$ alors $\lambda^p = 1$.

   En déduire p valeurs distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ pour lesquelles $D_p X_k = \lambda_k X_k$, avec $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

9. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. On cherche à montrer que Q est inversible :

   On pose $R = Q^T$ et on considère le système homogène (S) : $RX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $1, z_1, \cdots z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots a_{p-1} X^{p-1}$.

   b) Conclure que la seule solution de (S) est la solution nulle.

   c) En déduire l'inversibilité de Q.

10. Posons $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v_k)$ ou $\mathcal{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Montrer que la famille $(v_0, v_1, \cdots, v_{p-1})$ est une base de $\mathbb{C}^p$.

11. Soit $D_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g_p)$ où g_p est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{B}_2$ est sa base canonique. Montrer que :

$$D_p = Q \Delta_p Q^{-1} \text{ où } \Delta_p = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$$

12. Justifier l'inversibilité de D_p et exprimer D_p^{-1} en fonction de Q et Δ_p.
    En déduire, en utilisant la question 5, qu'il existe une base de $\mathbb{C}^p$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f_p dont M_p est la matrice dans la base canonique, est diagonale. Donner cette matrice diagonale.

13. Montrer que M_p est semblable à $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\pi/p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$

14. On suppose dans cette question que p est impair.

    a) Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$.

    b) En déduire $\underset{n \to \infty}{lim} T_p^n$

    c) En déduire enfin, pour tout $l \in [\![0; p-1]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = l)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

    d) Interprétez le résultat obtenu.

- FIN -