Devoir Maison n° 4

Problème : Étude de l'évolution d'une forêt

Nous supposerons que les arbres de l'espèce A ont une durée de vie plus longue et que seulement 1% d'entre-eux meurt en moyenne quelle que soit l'année tandis que c'est le cas pour 5% de l'espèce B.
Parce que leur croissance est plus rapide, les arbres de l'essence B ont plus de chance que ceux de l'essence A de s'imposer sur un emplacement laissé vacant . Ainsi, 75% des places nouvellement libres sont colonisées par des arbres de l'espèce B tandis que seulement 25% d'entre elles le sont pas l'espèce A.

① *Montrons que l'évolution du système peut être modélisé par la relation matricielle $X_{n+1} = M \cdot X_n$ où*

$$M = \begin{pmatrix} 0,9925 & 0,0125 \\ 0,0075 & 0,9875 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de montrer que $\begin{cases} A_{n+1} & = 0.9925A_n + 0.0125B_n \\ B_{n+1} & = 0.0075A_n + 0.9875B_n \end{cases}$.

Les arbres d'espèce A à l'issue de l'année $n+1$, dont le nombre vaut A_{n+1}, sont :

- Soit des arbres de l'espèce A qui ne sont pas mort. Leur nombre vaut : $0.99A_n$.
- Soit des arbustes nés dans l'année ayant colonisé des places laissées vacantes par les morts de l'année passées.
  Les arbres d'espèce A s'implantent dans 25% des cas dans les emplacements libres. Le nombre de ces arbustes vaut donc, d'après les hypothèses : $0.25 * (0.01A_n + 0.05B_n)$.
  D'où :

$$\boxed{A_{n+1} =}(0.99 + 0.25 * 0.01)A_n + (0.25 * 0.05)B_n = \boxed{0.9925A_n + 0.0125B_n}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$\boxed{B_{n+1} =}(0.75 * 0.01)A_n + (0.95 + 0.75 * 0.05)B_n = \boxed{0.0075A_n + 0.9875B_n}$$

Pour la suite, on suppose qu'on débute avec une répartition formée de $A_0 = 10$ et $B_0 = 990$.

② *Écrivons une fonction python* `evolution` *permettant de simuler l'évolution de cette forêt au cours du temps en fonction de ces conditions initiales :*

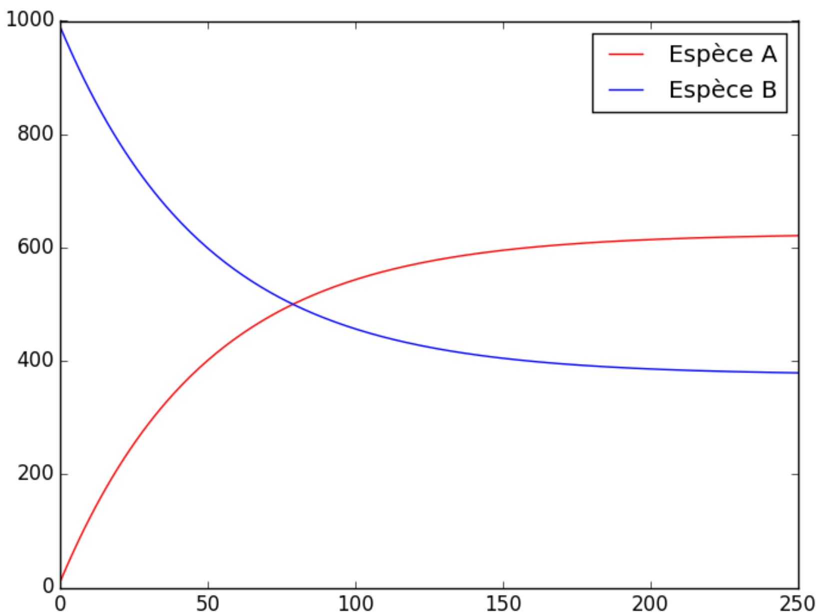
Il suffit de travailler matriciellement grâce à la bibliothèque `numpy` en initialisant deux variables qui sont la matrice $M = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_2 \\ 1-p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ où $p_1 = 0.9925$ et $p_2 = 0.9875$ et la matrice colonne $X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 990 \end{pmatrix}$.
On indiquera en paramètre d'entrée le nombre d'années n souhaitées dans la simulation.
Le nombre d'itérations étant connues, on répétera le calcul de $X_{k+1} = M \cdot X_k$ pour k allant de 1 à n grâce à la mise en place d'une boucle « Pour ». Une écriture possible est la suivante :

```
p1,p2=0.9925,0.9875
M = np.matrix([[p1,1-p2],[1-p1,p2]])
Na = 10 # Nombre d'arbres d'espèce A initialement
```

```
def evolution(Na,M,n):
    A = [Na];B = [1000-Na] # initialisation du nombre d'arbres
    X=np.matrix([[Na],[1000-Na]]) # matrice colonne X0
    for k in range(1,n+1):
       Y=M*X
       A.append(Y[0])
       B.append(Y[1])
       X=Y
    return A,B
```

Pour obtenir la représentation graphique de l'évolution de la forêt on pourra écrire :

```
temps=range(n+1)
plt.plot(temps,A,'r',label='Espèce A')
plt.plot(temps,B,'b',label='Espèce B')
plt.legend(('Espèce A', 'Espèce B'), loc = 'upper right')
```



③ Recherchons une explication à ce phénomène :

a. *Montrons qu'il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2$, telles que : $M - \lambda I_2$ est non inversible :*

Rappelons que $M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} p_1 - \lambda & 1 - p_2 \\ 1 - p_1 & p_2 - \lambda \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M - \lambda I_2 \text{ non inversible } &\Leftrightarrow \det(M - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (p_1 - \lambda)(p_2 - \lambda) - (1 - p_1)(1 - p_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow p_1 p_2 - (p_1 + p_2)\lambda + \lambda^2 - 1 + p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 + p_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Dès lors, en notant que $\lambda_2 = 1$ est une racine évidente, on obtient la seconde racine en rappelant que la somme des racines d'un polynôme du second degré $P = aX^2 + bX + c$ vaut $-b/a$.

Il est donc immédiat que : $\lambda_1 + \lambda_2 = p_1 + p_2$. Ce qui donne la valeur de λ_1

Conclusion : $\boxed{\lambda_1 = p_1 + p_2 - 1 = 0.98 \text{ et } \lambda_2 = 1 \text{ sont les deux réels cherchés.}}$

b. *Déterminons une base de $Ker(M - \lambda I_2)$ pour chacune de ces valeurs et montrer que leur juxtaposition forme une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(M - \lambda_1 I_2) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - (p_1 + p_2 - 1) & 1 - p_2 \\ 1 - p_1 & p_2 - (p_1 + p_2 - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - p_2 & 1 - p_2 \\ 1 - p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - \lambda_1 I_2) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$

De même :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(M - \lambda_2 I_2) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - 1 & 1 - p_2 \\ 1 - p_1 & p_2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (p_1 - 1)x + (1 - p_2)y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} y = \frac{0.0125}{0.0075} y = \frac{125}{75} y = \frac{5}{3} y, \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - \lambda_2 I_2) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$

Posons $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (5, 3)$. La famille (u_1, u_2) est de cardinal égale à 2 qui est la dimension de $\mathbb{R}^2$ et libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

c. *On souhaite en déduire que M est semblable à une matrice diagonale D :*

Afin d'exploiter les résultats précédents, on suppose que M est la matrice canoniquement associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$.

La question se ramène alors à démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Et si il s'agissait de la base obtenue précédemment... ?

$$(M - \lambda_1 I_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (f - \lambda_1 id_3)(u_1) = 0 \Leftrightarrow f(u_1) = \lambda_1 u_1$$

De même :

$$(M - \lambda_2 I_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (f - \lambda_2 id_3)(u_2) = 0 \Leftrightarrow f(u_2) = \lambda_2 u_2$$

Dès lors, puisque $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ d'après la question précédente, on a :

$$f(u_1) = (\lambda_1, 0)_{\mathcal{B}'} \text{ et } f(u_2) = (0, \lambda_2)_{\mathcal{B}'}$$

et par conséquent :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

D'après les formules de changement de base, on peut alors dire qu'il existe une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ telle que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Conclusion : $\boxed{M \text{ est semblable à une matrice diagonale } D}$

Une récurrence qui est au programme de colle permet alors de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1 = 0.98$ et $\lambda_2 = 1$.
et par un calcul rapide puisque $\det(P) = 3 + 5 = 8$

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d. *Montrons que $X_n = M^n X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et concluons sur le comportement asymptotique de l'évolution de la forêt :*

On a obtenu à la question 1) que (*) : $X_{n+1} = M \cdot X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
On montre que $X_n = M^n \cdot X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, par récurrence. Posons pour ça $\mathcal{R}_n : X_n = M^n \cdot X_0$

- Pour $n = 0$: $X_0 = M^0 \cdot X_0$ car $M^0 = I_2$ donc $\mathcal{R}_0$ est vraie.
  et pour $n = 1$, d'après (*), : $X_1 = M \cdot X_0$ donc $\mathcal{R}_1$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{R}_n$ est vraie pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$).
- Alors, toujours d'après (*) : $X_{n+1} = M \cdot X_n$.
  Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure :
  $$X_{n+1} = M \cdot (M^n \cdot X_0) = M^{n+1} \cdot X_0 \text{ par transitivité du produit matriciel.}$$
- ***Conclusion*** : $\boxed{X_n = M^n \cdot X_0\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Dès lors :

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} X_0 = P \cdot D^n \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} P \cdot \begin{pmatrix} 0.98^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3A_0 - 5B_0 \\ A_0 + B_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0.98)^n(3A_0 - 5B_0) \\ A_0 + B_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui suffit pour passer à la limite quand n tend vers l'infini car $\lim\limits_{n\to\infty} (0.98)^n = 0$.
Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 625 \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} B_n = 375}$ - ce que confirme le graphe.

④ *On imagine que durant les années sèches, le taux de mortalité de l'espèce B est plus important et qu'en conséquence, la matrice de projection devient :*

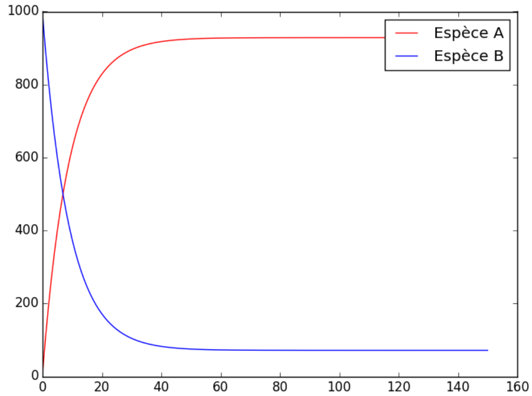
$$Ms = \begin{pmatrix} 0.9925 & 0.0975 \\ 0.0075 & 0.9025 \end{pmatrix}$$

a. L'écriture du système associé à cette matrice montre que les taux de survie de l'espèce A ne sont pas affectés par les périodes de sécheresse puisque les coefficients 0.9925 et 0.0075 sont inchangés. En revanche, la proportion d'arbre d'espèce B qui sont remplacés par des arbres d'espèce A vaut désormais 0.0975 au lieu de 0.0125. Or ce coefficient est égale $0.25 * tm_B$ où tm_B désigne le taux de mortalité de l'espèce B. D'où

$$0.25 * tm_B = 0.0975 \Leftrightarrow tm_B = 0.39$$

On retiendra donc de cette nouvelle matrice que les arbre d'espèce B souffrent davantage que les arbres d'espèce A de la sécheresse. En conséquence, la simulation de l'évolution de la forêt doit montrer les années de sécheresse une colonisation de leur environnement plus rapide par l'espèce A.

La figure ci-dessous est obtenue en remplaçant M par Ms dans la fonction Python écrite en 2)



On note par exemple qu'il ne faut que sept années pour que l'espèce A supplante l'espèce B, là où il a fallu 78 ans sans période de sécheresse...

b. Pour simuler l'évolution de la forêt en supposant cette fois une alternance régulière entre années humides et années sèches, il suffit de calculer la matrice $M2 = M \cdot Ms$ qui simule l'évolution de la forêt sur deux années successives, l'une humide, l'autre sèche.