$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

① λ vp de $B_3 \Leftrightarrow rg(B_3 - \lambda I_3) < 3$ avec :

$rg(B_3-\lambda I_3) = rg\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 2-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & 0 & 0\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 2-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix}$

avec $P(\lambda) = -(2-\lambda)(1-\lambda)$ $\qquad = rg(U_\lambda)$

Conclusion : λ vp de $B_3 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

$Sp(B_3) = \{1, 2\}$.

② $X \in E_1 \Leftrightarrow (B_3 - I)X = 0 \Leftrightarrow U_1 \cdot X = 0$ où U_λ est la réduite de Gauss de $B_3 - \lambda I$.

$\Leftrightarrow x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z \ \forall z \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

Soit $E_1 = \left\{\begin{pmatrix}-z\\ y\\ z\end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

$X \in E_2 \Leftrightarrow (B_3 - 2I)X = 0 \Leftrightarrow U_2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ -y+z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = z\end{cases} \ \forall z \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $E_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\ y\\ y\end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

③ $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc B_3 est diagonalisable avec

$B_3 = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Calculons P^{-1} :

$P\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}y' = x\\ x' + z' = y\\ -y' + z' = z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y' = x \quad (L_1)\\ z' = x + z \quad (L_3)\\ x' = y - (x+z)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = -x + y - z\\ y' = x\\ z' = x + z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$; Soit $P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

④ $B_3^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2^n\\ 0 & -1 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2^n-1 & 1 & 2^n-1\\ 2^n-1 & 0 & 2^n\end{pmatrix} \ \forall n \geq 0$

Remarque : on pouvait aussi obtenir cette réponse par récurrence.