Planche 1

$X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, v.a.R indépendantes

$\forall n \geq 2$, $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1]}$

Soit $X = -\ln(U)$; $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$

$\forall x < 0$, $F_X(x) = 0$.

$\forall x \geq 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\ln(U) \leq x)$

$= P(\ln(U) \geq -x)$

$= P(U \geq e^{-x})$ car $t \mapsto e^t \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$= 1 - F_U(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$

car $F_U(t) = t$ $\forall t \in]0,1)$ et $x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} \in]0,1)$

Soit $F_X(x) = (1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Conclusion $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

b) On écrit une fonction de recherche du maximum.

```
def simulY(n):
    x = -log(rdm.random())
    for k in range(2, n+1):
        y = -log(rdm.random())
        if y > x:
            x = y
    return x
```

c)

```
def conjecture(n, m):
    L = [simulY(n) for k in range(m)]
    LS = [1/k for k in range(1, n+1)]
    return sum(L)/(m*sum(LS))
```

car d'après la loi faible des grands nombres $\frac{\sum_{k=1}^{m} Y_n^k}{m}$ est un estimateur sans biais de $E(Y_n)$

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

(2) Soit F_n la fonction de répartition de Y_n

$Y_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $\forall x < 0$, $F_n(x) = 0$.

$\forall x \geqslant 0$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

$= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x)$

$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$ car les X_i sont indptes

$= (1 - e^{-x})^n$

Conclusion : $\boxed{F_n(x) = (1 - e^{-x})^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$

La fonction F_n est croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = 0 = F_n(0) = \lim_{x \to 0^-} F_n(x)$

Conclusion F_n est continue sur $\mathbb{R}$
dérivable sur $\mathbb{R}^*$

ou encore Y_n est une VAR à densité ; Soit f_n une densité. Alors :

$$\boxed{f_n(x) = n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$$

(3) a) Soit $g : t \mapsto (1-t)^n$. g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et donc sur $[0,u]$ pour tout $u \in]0,1]$

D'après le théor. des accroissements finis :

$\exists c \in]0;u[\ / \ g(u) - g(0) = g'(c).u$

Soit $(1-u)^n - 1 = -n(1-c)^{n-1} u$

or $0 < c < u \Rightarrow -u < -c < 0 \Rightarrow 1-u < 1-c < 1$
$\Rightarrow -n(1-c)^{n-1} u > -nu$ car $-n < 0$

D'où $(1-u)^n - 1 > -nu$; Egalité si $u = 0$

Conclusion $\boxed{\forall u \in [0,1], (1-u)^n \geqslant 1 - nu}$

5) $\forall x \geq 0$, $F_n(x) = (1-e^{-x})^n$

D'après ce qui précède, $(1-e^{-x})^n \geq 1 - ne^{-x}$
puisque $u = e^{-x} \in]0,1] \ \forall x \geq 0$.

Dès lors $1 - F_n(x) \leq 1 - (1-ne^{-x})$

ou encore, $\forall x \geq 0$, $0 < 1 - F_n(x) \leq ne^{-x}$

or $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge [$x \mapsto e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ est une densité de $X \sim \mathcal{E}(1)$]

donc d'après le théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives :

$$\boxed{\int_0^\infty (1-F_n(x))\,dx \text{ converge}}$$

Par ailleurs, d'après ce qui précède,

$$0 < x(1-F_n(x)) \leq nxe^{-x}$$

et $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ car $x \underset{\infty}{=} o(e^x)$

Donc, d'après le théorème d'encadrement des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x(1-F_n(x)) = 0}$$

(4) a) Soit $A > 0$; $u : x \mapsto x$ et F_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$ donc une intégration par parties donne :

$$\int_0^A x f_n(x)\,dx = \Big[x(F_n(x)-1)\Big]_0^A - \int_0^A (F_n(x)-1)\,dx$$

$$= A(F_n(A)-1) - \int_0^A (F_n(x)-1)\,dx$$

ou encore :

$$\boxed{\int_0^A x f_n(x)\,dx = \int_0^A (1-F_n(x))\,dx - A(1-F_n(A))}$$

b) on étudie $\int_{-\infty}^{\infty} |x f_n(x)| dx = I$

D'après la relation de Chasles :

$I = \int_0^{\infty} x f_n(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_n(x)) dx$ qui converge d'après ③ a)

(puisque $\lim_{A \to \infty} A(1 - F_n(A)) = 0$)

Conclusion $\boxed{E(Y_n) \text{ existe et vaut } \int_0^{\infty} (1 - F_n(x)) dx}$

⑤ $E(Y_n) = \int_0 \left[1 - (1 - e^{-x})^n\right] dx$

Soit $t = 1 - e^{-x} = \varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ et strictement croissante.

$dt = e^{-x} dx$

l'intégrale convergeant, on a :

$E(Y_n) = \int_{\varphi(0)}^{\lim_{\infty} \varphi(x)} (1 - t^n) \frac{dt}{1 - t}$ (puisque $e^{-x} = 1 - t$ $\Rightarrow x = -\ln(1 - t)$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{1 - t} dt$)

Soit

$$\boxed{E(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt}$$

Dès lors $E(Y_n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k \, . dt$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k dt$ [linéarité de l'intégrale]

$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$

Conclusion $\boxed{E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n}$