MATHEMATIQUES
Var à densité et algèbre

Exercice :

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes à densité, de densités respectives f_X et f_Y, alors $X+Y$ admet une densité g qui est définie pour tour réel x par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$$

① a) Pour tout réels a, b et c on définit la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$.

Donner le rang de $M(a,b,c)$ en fonction de a, b et c.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que si V n'est pas nulle, alors V est un vecteur propre de $M(a,b,c)$ et préciser la valeur propre associée.

c) $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

② U désigne une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0,1]$.

a) Déterminer et reconnaître la loi de la v.a.r. $W = -\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$ où $\lambda > 0$.

b) Écrire une fonction Python qui simule la loi de W.

③ Soient X, Y et Z des v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$. on suppose que X, Y et Z sont indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $w \in \Omega$, on définit la matrice $M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & X(w) & X(w) \\ Y(w) & Y(w) & Y(w) \\ Z(w) & Z(w) & Z(w) \end{pmatrix}$

a) Montrer que $X+Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Déterminer une densité de $S = X + Y + Z$.

c) Calculer $\mathbb{P}(S \geq 1)$.

d) Écrire une fonction Python qui simule la loi de S et une autre qui estime la probabilité de l'événement $(S \geq 1)$. Confronter votre résultat à celui obtenu en 3.c).

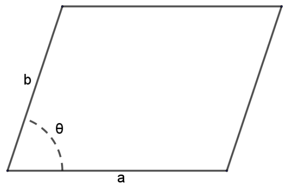
e) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ telles que $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^*$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} &= X(w)(a_n + b_n + c_n) \\ b_{n+1} &= Y(w)(a_n + b_n + c_n) \\ c_{n+1} &= Z(w)(a_n + b_n + c_n) \end{cases}$$

Déterminer la probabilité que ces trois suites convergent toutes les trois vers 0

Problème :

On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $a \cdot b \cdot \sin(\theta)$.



On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$. L'étude de la variable aléatoire $\sin(\theta)$ nécessite certaines connaissance sur une fonction intermédiaire notée A qui seront établies dans la partie I. La densité obtenue dans la partie II dont nous étudierons quelques propriétés apparaît en pratique dans d'autres contextes (que nous n'étudierons pas dans ce sujet) sous une forme proche dans la loi dite de « l'arcsinus ». Les deux dernières parties étudient des fonctions polynomiales définies à l'aide de la fonction A.

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$.
On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl}[-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$

② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et justifier que sur cet intervalle l'expression de sa dérivée est $A'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

⑥ a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$.

b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

✐ *Remarque :* Vous aurez sûrement reconnu l'exercice 8 du TD2, ce qui vous dispense de rédiger cette partie...

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin(\Theta)$.

① Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition F_X de X.

② En déduire que X est une variable aléatoire à densité puis montrer qu'elle admet pour densité

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

③ a) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.

b) Quelle est la signification de ce résultat par rapport à la surface des mailles élémentaires introduites dans le préambule du problème ?

④ Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur.
✐ *On pourra utiliser - sans obligation - le changement de variable* $x = \sin(t)$ *qu'on justifiera.*

⑤ On s'intéresse, dans cette question, au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On introduit la « moyenne empirique » : $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

a) Que valent l'espérance et la variance de M_n ?

b) On rappelle que si Y est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$$

En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ centré sur $\mathbb{E}(X)$ tel que :

$$\mathbb{P}(M_n \in [a_n, b_n]) \geq 0.95$$

⑥ On s'intéresse dans cette question à des événements « rares » associés à la variable aléatoire X.

a) A l'aide de la question 6. de la partie I., prouver l'existence de constantes α et β telles que :

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^3}$$

b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = \mathbb{P}\left(X \geq 1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

i. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. Prouver que, pour tout entier naturel non nul, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

iii. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre deux de la fonction cos.

iv. En déduire une constante c telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

c) On cherche à vérifier grâce à Python la valeur obtenue précédemment pour c.

i. Écrire une fonction `simulX()` qui réalise une simulation de la variable aléatoire X.

ii. Écrire une fonction `evalc(n,m)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier m supposé grand (de l'ordre du millier) et qui retourne une estimation de la constante c obtenue en 6.b)iv).

Partie III : Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsin

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \longmapsto \cos(2nA(x))$.

① Calculer f_0, f_1 et f_2 en utilisant si nécessaire la formule obtenue en I/4.
✐ *On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égale à 2, il existe un polynôme P_k qu'on exprimera tel que : $\forall x \in [-1,1],\ f_k(x) = P_k(x)$.*

② a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x)$$

③ Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = P_n(x)$$

④ Soit n un entier naturel.

a) Calculer f_n' et f_n''. ✐ *On ne cherchera pas à simplifier les résultats.*

b) En déduire que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y'' + xy' - 4n^2y = 0$$

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit n un entier naturel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n.

① On définit l'application ϕ sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par :

$$\phi(P) = (X^2-1)P'' + XP',\ \forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

② Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera M.

b) Déterminer une base du noyau et de l'image de ϕ sous forme polynomiale.

c) Prouver que M est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de M.

d) Exprimer la matrice M' de ϕ dans cette nouvelle base et préciser la relation matricielle qui existe entre M et M'.

③ On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque.

a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

b) Montrer que ϕ est diagonalisable et donner son spectre.

c) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $E_{(2k)^2}$ en fonction de P_k, polynôme défini dans la partie III.