11 T.D. Variables aléatoires à densité.

- X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. « Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une ».
- Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
- Espérance, théorème de transfert et inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments.
- Lois usuelles : Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
- Somme de variables aléatoires à densité indépendantes, la formule du produit de convolution devant être rappelée en cas de besoin.

Exercice 1 : ✶

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour chaque fonction f ci-dessous, déterminer la valeur de la constante $\lambda > 0$ pour que f soit une densité de probabilité.
Déterminer la fonction de répartition associée et donner son graphe.

$a) f(x) = \lambda x \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$; $\quad b) f(x) = \lambda x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$; $\quad c) f(x) = \lambda\left(2 - |x|\right)\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$;

$d) f(x) = \dfrac{\lambda}{x^n}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$; $\quad e) f(x) = \dfrac{\lambda}{1+n^2x^2}$;

Exercice 2 : ✶✶

k étant un réel donné, on considère l'application f définie pour tout x réel par $f(x) = k\cos(x)\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(x)$.

① Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

② Soit X, variable aléatoire de densité f. Déterminer sa fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.

③ Soit $Y = \tan(X)$.

a. Montrer que $\sin(\arctan(y)) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.
b. Déterminer la fonction de répartition de Y.
c. Calculer l'espérance de Y si elle existe.

Exercice 3 ✶✶ : (oral 2021)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

① Montrer que f est une densité de variable aléatoire réelle.
Soit X, variable aléatoire de densité f. Déterminer sa fonction de répartition F.

② **a.** Justifier que F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et que sa fonction réciproque est donnée par :

$$\forall y \in]0,1[,\ F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

b. En déduire que si U est une loi uniforme sur $]0,1[$, alors X a même loi que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

c. En déduire un programme Python permettant d'obtenir une estimation de l'espérance de X en cas d'existence.

③ **a.** Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} tf(t)dt$ est convergente.

b. Montrer que la fonction est paire.

c. En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

④ On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{1+e^t}dt$ est convergente et on note I sa valeur.
Montrer que X admet une variance $\mathbb{V}(X)$, et l'exprimer en fonction de I à l'aide d'une intégration par parties.

⑤ Soit g définie par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Déterminer sa fonction réciproque g^{-1}.

⑥ On définit la variable aléatoire Y par $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Calculer, s'ils existent, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 4 : ✶✶

Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

① Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

② Quelle est la loi suivie par $Y = X^2$?

③ Calculer l'espérance et la variance de X. Généraliser ce résultat en calculant le moment d'ordre r quelconque.

Exercice 5 : ✶✶

Dans le cadre de l'implantation d'éoliennes à proximité du lac de Grand-Lieu, on cherche à simuler les vitesses quotidiennes moyennes de vents mesurées expérimentalement par MétéoFrance à une altitude de 10 mètres. On dispose pour cela de six années de données, de 2008 à 2013, soit 2190 mesures, conservées sous la forme d'un tableau de deux colonnes représentant respectivement la vitesse (en $m.s^{-1}$) et la direction du vent (0 pour le nord, 90 pour l'est,...). On trouvera ce tableau sur le site de la classe, dans le dossier « td11_Python » sous le nom « VentsMFr.csv ».

① Récupérer sous Python les vitesses de vents sous la forme d'un tableau `Tv`, exploitable par le module `numpy`.
Écrire une fonction Python permettant d'afficher la moyenne des vitesses de vent, leur écart-type, les vitesses de vents minimum et maximum rencontrées pendant ces huit années.
Tracer dans une première fenêtre une boîte à moustache permettant de synthétiser ces résultats et dans une deuxième fenêtre les fréquences cumulées des vitesses de vents avec des classes d'amplitude $0.1m.s^{-1}$.
Conserver pour la suite le tableau `Fc` des fréquences cumulées de vitesses de vents.

② Soit a et λ deux réels strictement positifs et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b\lambda x^{a-1}e^{-\lambda x^a}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
Déterminer b pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X. On dira dans ce cas que X suit une loi de Weibull de paramètres a et λ. Reconnaissez cette loi dans le cas $a = 1$.

③ Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

④ Considérons V variable aléatoire égale aux vitesses de vents moyens quotidiens sur le site qui nous intéresse et supposons que les vitesses de vent observées sont des réalisations indépendantes de cette variable aléatoire. On souhaite tester l'hypothèse : *les vitesses de vents autour du lac de Grand-Lieu suivent une loi de Weibull.* Si, c'est le cas, alors :

$$F_c(v_i) \cong \mathbb{P}(V \leq v_i) = F_V(v_i),\ \forall v_i \in \{vmin, ..., vmax\} \cong X(\Omega)$$

a. Montrer que l'hypothèse précédente conduit à la relation : $ln(v_i) \cong \dfrac{1}{a}ln(-ln(1 - F_c(v_i)) - \dfrac{ln(\lambda)}{a}$.

b. Proposez un changement de variable permettant à la fois de tester notre hypothèse et d'obtenir une valeur de a et λ par la méthode des moindres carrés.

c. Vérifier graphiquement vos résultats en traçant dans une même fenêtre les fréquences cumulées empiriques et la fonction de répartition F_V pour $V \hookrightarrow W(a, \lambda)$.

d. Proposez une modélisation informatique de la loi de Weibull obtenue et validez votre simulation en comparant sur un grand nombre de simulation les moyennes et les écart-types.

Exercice 6 : ✶

En supposant que X, Y et Z suivent la loi uniforme sur $]0,1[$ et sont indépendantes, déterminer la loi de $X+Y+Z$.

Exercice 7 : ✶✶✶ (oral 2015)

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles à densité et indépendantes, alors $S+T$ est une variable à densité dont une densité est donnée, sous réserve de convergence de l'intégrale, par la formule :

$$f_{S+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t)dt$$

Préliminaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

① Montrer que les p_k définissent les coefficients d'une loi de probabilité.
Par la suite, si N est une variable aléatoire discrète telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(N = k) = p_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, alors on dira que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

② $\mathbb{E}(N)$ existe si la série $\sum k\mathbb{P}(N = k)$ converge absolument et dans ce cas elle vaut : $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(N = k)$.
Montrer que $\mathbb{E}(N)$ existe et donner sa valeur.

Première partie :

① Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$ et soit λ un réel strictement positif.
On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

② On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On note $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que pour $n \geq 1$, S_n admet pour densité la fonction f_n donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Deuxième partie : On suppose qu'à un arrêt de bus, les différences entre les temps de passage successifs d'un autobus sont indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre λ.
On définit un instant 0, puis on note $S_1, S_2, \cdots$ les temps de passages successifs des autobus. On note alors, pour $t > 0$, N_t la variable égale au nombre d'autobus qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t à l'arrêt de bus. Autrement dit on a : $\forall n \geq 0$, $(N_t = n) = (S_n \leq t < S_{n+1})$.

① Pour $n \geq 0$, exprimer l'événement $(N_t \geq n)$ à l'aide de la variable S_n. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$

② En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

③ On suppose désormais que les temps de passages entre deux autobus ont pour moyenne 10 minutes et qu'un étudiant en BCPST arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ pour prendre le bus. Il se pose la question de savoir combien de temps, en moyenne, il devra attendre le prochain bus mais aussi combien de temps en moyenne s'écoule entre le prochain bus et celui qui l'a précédé. Pour y répondre, il écrit rapidement le programme Python suivant :

```
from math import log
from random import random

def autobus():
    a = 0 ; b = 0 ; N = 10000
```

```
for k in range(N):
   s = 0
   while s < 100 :
      r = s
      s = s - 10*log(random())
   u = s-100 ; v = s-r
   a = a+u ; b = b+v
print(a/N,b/N)
```

④ Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.

⑤ Le programme affiche finalement les valeurs suivantes : `10.062252 20.315494`
En quoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

Quelques exercices d'oraux

Exercice 1 (oral 2019) :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

① Écrire une fonction Python qui renvoie une liste de n valeurs comprises entre a et b pour une variable aléatoire centrée réduite.
On utilisera l'instruction random.randn() du module numpy.

② Donner la valeur moyenne obtenue pour $a = \frac{1}{2}$, $b = 10^4$ et $n = 1000$.

Soit X suivant une loi normale d'espérance μ et de variance θ^2, et $U = \frac{X-\mu}{\theta}$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et pour tout réel x on pose $F_{\mu,\theta}(x) = P_{(a<X\leq b)}(X \leq x)$.

③ **a.** Donner la loi de U. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)$.
b. Montrer que $F_{\mu,\theta}$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

④ Soit Y admettant $F_{0,1}$ comme fonction de répartition.
a. Donner une densité de Y.
b. Donner, en fonction de a, b et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, l'espérance de Y.
c. Que devient-elle si a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$? Cela est-il confirmé par la fonction écrite à la question 1. ?

Exercice 2 (oral 2019) :

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $c_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$.

① **a.** Montrer que pour tout entier $n \geq 2 \quad c_{n+1} \leq c_n \leq c_{n-1}$.
b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1 \quad c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}$.
c. En déduire que $c_n \sim \frac{1}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

② Déterminer c_1.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad c_n = (-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right)$.

③ Écrire une fonction Python de paramètre n renvoyant la valeur de c_n.

④ Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{c_n(1+x)} & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$.
a. Montrer que f_n est une densité . On note désormais X_n une variable à densité f_n.
b. Montrer que X_n a une espérance et donner la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.
c. On note F_n la fonction de répartition de X_n et $F(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$.
Montrer que pour tout réel x, la suite $(F_n(x))$ a pour limite $F(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Publié (2019)

Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① **a.** Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $[0,1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
b. En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.
c. En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

② On note F_n la fonction de répartition de Y_n.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.

③ **a.** Montrer que pour tout réel $u \in [0,1]$, on a :

$$(1-u)^n \geq 1 - nu$$

b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} (1-F_n(x))dx$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1-F_n(x)) = 0$.

④ **a.** Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x)dx = \int_0^A (1-F_n(x))dx - A(1-F_n(A))$$

b. En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1-F_n(x))dx$$

⑤ A l'aide du changement de variables $t = 1-e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$$

En déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n$$

Exercice 4 : Publié (2019)

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
Si X *est une variable aléatoire, on notera* $\mathbb{E}(X)$ *son espérance et* $\mathbb{V}(X)$ *sa variance.*
Soient $a \in]0,1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

① Montrer que f est une densité.

② On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

③ On considère la variable aléatoire Y donnée par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
b. On pose $U = 1 - e^{-Y}$. Montrer que U suit la loi uniforme sur $[0,1[$.
c. En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y.
d. Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.

④ **a.** Donner une densité, qu'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a.
b. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
c. En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.

d. En déduire que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.

⑤ On considère désormais que le paramètre $a \in]0,1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variable aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

a. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.
b. Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.
c. Montrer que $\mathbb{V}(S_n) \leq \dfrac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n à partir de laquelle $\left]S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égale à 95%.
Utiliser les fonctions Python écrites à la question 3. pour valider votre réponse.

Exercice 5 : (oral 2018 non publié)

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniorem sur $[0,1]$.
On pose, pour tout entier naturel n, $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

① Montrer que M_n est une variable à densité et en donner une densité f_n.

② Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

③ Calculer $\mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n))$ et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

④ Simuler M_n à l'aide de Python.

⑤ Écrire une fonction qui, à l'aide de 10000 simulation de la variable aléatoire M_n donne une estimation de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$.

⑥ **a.** Quelle est la loi de $-X_{n+1}$?
b. *On rappelle que si X et Y sont deux variables indépendantes de densité f_X et f_Y, alors $X+Y$ est une variable à densité de densité f définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du$$

Déterminer une densité de $M_n - X_{n+1}$.
c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$

Exercice 6 : (oral 2017 non publié)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$$

① **Étude d'une variable aléatoire**.

a. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
X est une variable aléatoire admettant f_a pour densité. On dit que X suit une loi de Cauchy de paramètre a.
b. Donner une expression de la fonction de répartition F_a de X.
c. X admet-elle une espérance ?
d. Y est une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. On pose $X = aY$. Donner la loi de X.

② **a.** U est une variable aléatoire dont la loi est uniforme sur $[0,1[$. On pose $Z = \tan\left(\pi U - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Montrer que Z est presque sûrement définie et donner la loi de Z.

b. Écrire une fonction Python `cauchy(a)` donnant en sortie un résultat aléatoire coïncidant avec une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a.

c. on considère le code Python suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def histogrammeCauchy(a, xmin, xmax, n, N):
    '''
    L'intervalle [xmin, xmax] est divise en n parties
    On lance N simulations de loi de Cauchy puis
    on calcule la fréquence d'apparition dans chacune des n parties.
    '''
    Y = [0]*n
    h = (xmax-xmin)/n
    for i in range(N):
        k = floor((cauchy(a)-xmin)/h)
        if k >= 0 and k < n:
            Y[k]... # A COMPLETER
    X = []
    for i in range(n):
        X.append(xmin+i*h)
    plt.bar(X, Y, alpha=0.5) # pour la transparence
    return X, Y
```

Compléter cette fonction pour obtenir un histogramme représentant pour chaque intervalle

$$I_k = \left[x_{min} + \frac{k}{n}, x_{min} + \frac{k+1}{n}\right]$$

la proportion des résultats (parmi les N simulations de loi de Cauchy de paramètre a) contenus dans I_k.

d. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Cauchy de paramètre a et une loi de Cauchy de paramètre b. On émet l'hypothèse suivante :

$$Z = X + Y \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } a + b$$

Écrire un programme Python permettant de visualiser sous forme de diagrammes la loi de $X + Y$ ainsi qu'une loi de Cauchy de paramètres $a + b$. Quelle conclusion peut-on faire ?

③ Autour de la loi faible des grands nombres.

a. Énoncer le théorème de la loi faible des grands nombres.

b. Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy de paramètre 1, on note $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$. Quelle hypothèse peut-on formuler quand à la loi de Z_n ? Un résultat de loi faible des grands nombres peut-il être énoncé dans ce cadre ?

Exercice 7 : (oral 2021 non publié)

On désigne par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur l'ensemble des entiers de 0 à 9.

① **a.** Écrire en Python une fonction `tirage()` qui simule une réalisation des variables X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 et qui retourne `True` si l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$ est réalisé, `False` sinon.

b. Estimer alors la probabilité de l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$.

② A l'aide du théorème de transfert, exprimer sous forme d'un quotient les quantités $\mathbb{E}(t^{X_1})$ pour $t \in]-1,1[$ et $\mathbb{E}(t^{-X_1})$ pour $t \in]-1,0[\cup]0,1[$.

③ On note $Y = 27 + X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6$. Montrer que $Y(\Omega) \subset [\![0, 54]\!]$
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \mathbb{E}(t^Y)$.
Justifier que f est une fonction polynomiale et en donner le degré.

④ Montrer que :

$$\forall t \in]-1, 0[\cup]0, 1[,\ f(t) = \frac{1}{10^6}\frac{(1-t^{10})^6}{(1-t)^6}$$

puis vérifier que la formule est valable pour $t = 0$.

⑤ Exprimer l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$ à l'aide de la variable Y. Expliquer pourquoi la probabilité de cet événement est un coefficient de la fonction polynômiale f.

⑥ En vous intéressant à un développement limité de la fonction f en 0, déterminer la probabilité de cet événement.