

**- Programme de colle quinzaine 8 -**

**Q1** : Soit  $b > 0$ . Nature et valeur éventuelle de  $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$  selon  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Q2** : Soit  $a > 0$ . Nature et valeur éventuelle de  $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  selon  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

**Q3** :  $\forall b > a$ ,  $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$

**Q4** : Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et strictement positives sur  $I = [a, +\infty[$  telles que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors les intégrales généralisées en  $+\infty$  :  $\int_a^{+\infty} f$  et  $\int_a^{+\infty} g$  sont de même nature. Preuve.

**Q5** : La convergence absolue entraîne la convergence.

**Q6** : Si  $f$  est une fonction paire, continue sur  $] -a, a[$  telle que  $J = \int_0^a f(t)dt$  converge, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt$  converge et vaut  $2J$  et si  $f$  est impaire, continue sur  $] -a, a[$  telle que  $J$  converge, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

*Application* : Soit  $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(t^2 + 1)}$ . Nature et valeur de  $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  et de  $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

**Q7** : Si  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f$ , expression d'une densité  $f_Y$  de  $Y = aX + b$  (où  $a, b \in \mathbb{R}$ ) et d'une densité  $f_Z$  de  $Z = X^2$ .

**Q8** : **Loi du minimum** ou du **maximum** de deux ou  $n$  variables aléatoires indépendantes. Application à l'exemple 1.5 (loi du minimum de deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ) ou à l'exemple 1.6 (loi du minimum ou du maximum de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ).

### Exercices :

Les exercices porteront sur les points abordés en question de cours.

Aucune question ne sera posée cette semaine sur les lois usuelles (uniforme, exponentielle, et normale) ou sur la somme de variables aléatoires indépendantes.

**Bonnes colles !**