- Programme de colle quinzaine 6... -

Questions de cours :

- **Q1 :** Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Généralisation à n sous-espaces vectoriels.
- **Q2 :** Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- **Q3 :** Définition de famille libre/génératrice. Démontrer qu'une famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts est libre.
- **Q4 :** Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base selon que le discriminant de l'équation caractéristique associée est strictement positif, nul ou strictement négatif (démonstration demandée dans l'un, au choix, de ces trois cas).
- **Q5 :** Existence et unicité de la décomposition dans une base.
- **Q6 :** Fonction Python qui renvoie, si elle est possible, la somme de deux matrices données en argument.
- **Q7 :** Fonction Python qui renvoie, si il est possible, le produit de deux matrices données en argument.
- **Q8 :** Une fonction `produit(A, B)` étant connue, écrire une fonction d'arguments une matrice A et un entier n et renvoyant A^n.

Exercices - calcul matriciel et espaces vectoriels

Pour rappel, au programme de BCPST1 :

- **Opérations sur les matrices** : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme de Newton dans le cas de deux matrices qui commutent.
- transposition, matrices carrées symétriques, écriture matricielle d'un système linéaire, rang d'une matrice.
- Matrices carrées inversibles, inverse d'un produit, de la transposée, recherche pratique de l'inverse d'une matrice (✐ « l'inversion peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires » ; « seul le déterminant des matrices 2×2 est introduit »)

Sur les **espaces vectoriels**, on rappelle les attendus du programme de deuxième année : « Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ($\mathbb{K}^n$) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non. La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme. »

- **Structure vectorielle** : Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs ; sous-espaces vectoriels, intersection finie de ssev ; ssev engendré par une famille fini de vecteurs
  Famille génératrice fini d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence) ; Famille libre, famille liée finie ; Base finie d'un espace vectoriel et coordonnées d'un vecteur dans une base.
  Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.

- **Dimension** : De toute famille génératrice fini d'un ev E on peut extraire une base.
  Dans un ev de dimension n : Toute famille libre a au plus n éléments, une famille libre ayant n éléments est une base ; toute famille génératrice a au moins n éléments , une famille génératrice ayant n éléments est une base.
  Si F est ssev de E alors $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales alors $F = E$.

N.B. : Pour faire le lien entre ces deux chapitres, on pourra si on le souhaite demander d'**obtenir la matrice d'une application linéaire dans des bases données**