

Devoir surveillé 4 : Algèbre linéaire
Problème 1 : Epreuve Agro-véto A 2011

① Il suffit pour répondre à cette question de vérifier l'égalité. Or :

$$AY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = Y'$$

puisque y est solution de (ε'_3) .

Conclusion : $Y' = AY$

② Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et I la matrice identité de taille 3. On pose conformément à l'énoncé :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_B(f)$.

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en permutant les colonnes } C_1 \leftarrow C_3 \leftarrow C_2 \leftarrow C_1$$

Donc $\text{rg}(A) = \text{ordre}(A)$ ce qui permet d'assurer que A inversible.

Conclusion : $\text{rg}(f) = 3$, f est bijective, $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

b)

$$\begin{aligned} \text{rg}(f - id_E) &= \text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

D'où $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg}(f - id_E) = \dim(\text{Im}(f - id_E)) = 2$ et donc

$$\dim(\ker(f - id_E)) = 3 - \text{rg}(f - id_E) = 3 - 2 = 1 \text{ d'après la formule du rang.}$$

On note par ailleurs, conformément aux indications de l'énoncé, que :

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (f - id_E)(u) = 0$$

Donc $u = (1, 1, 1) \in \ker(f - id_3)$ qui est une droite vectorielle.

Conclusion : $\ker(f - id_3) = \text{Vect}\{u\}$ où $u = (1, 1, 1)$

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que l'ensemble des solutions de (S_λ) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 qu'on notera E_λ . Pour cela, définissons plus clairement E_λ en posant :

$$E_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) \text{ solution de } (S_\lambda)\} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / M_\lambda \cdot X = 0\}.$$

Dès lors :

- $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ par définition de E_λ .
- $0_{\mathbb{R}^3}$ est solution évidente de (S_λ) donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_\lambda$.
- $\forall X_1, X_2 \in E_\lambda, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$:

Il suffit de dire que :

$$M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = \alpha M_\lambda \cdot X_1 + M_\lambda \cdot X_2$$

Or $M_\lambda \cdot X_1 = 0$ et $M_\lambda \cdot X_2 = 0$ car X_1 et X_2 sont solutions de (S_λ)

donc $M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = 0$ ou encore $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$

Conclusion : E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

d) Le système homogène (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée M_λ n'est pas inversible, ou encore, puisque c'est une matrice d'ordre 3 si et seulement si $\text{rg}(M_\lambda) < 3$.

Déterminons en fonction de λ le rang de M_λ (nous prendrons, une fois n'est pas coutume, le pivot en haut à droite...) :

$$\text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda(2-\lambda) & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \text{ Premier cas : Si } \lambda = 0 \text{ alors } \text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Donc si $\lambda = 0$ le système S_λ est un système de Cramer.

$$\blacklozenge \text{ Second cas : Si } \lambda \neq 0, \text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ P(\lambda) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow \lambda L_3 + (2-\lambda)L_2) \end{matrix}$$

$$\text{avec } P(\lambda) = -\lambda^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda^2+1) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Conclusion : S_λ n'est pas de Cramer pour : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$

e) En $\lambda_1 = -1$, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à -1 est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.

Conclusion : $E_{-1} = \text{Vect}\{(1, -1, 1)\} = \text{Vect}\{u_1\}$.

En $\lambda_2 = 1$ le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x = y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$.

Conclusion : $E_1 = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{u_2\}$.

En $\lambda = 2$ le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ x = 2y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(4, 2, 1)$.

Conclusion : $E_2 = \text{Vect}\{(4, 2, 1)\} = \text{Vect}\{u_3\}$.

f) Montrons que $\mathcal{B}_1 = (u_2, u_1, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 :

Commençons par noter que $\text{Card}(u_2, u_1, u_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc nous nous contenterons de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de \mathbb{R}^3 .

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 3\lambda_3 = 0 & (L_3 \leftarrow L_1 - L_3) \end{cases}$$

Conclusion : $\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3$; famille libre

La famille (u_2, u_1, u_3) étant formée de trois vecteurs, on en déduit qu'il s'agit d'une base de \mathbb{R}^3 .

Conclusion : $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3

g) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de la famille de vecteurs (u_2, u_1, u_3) .

D'après la question précédente il est immédiat que $\text{rg}(P) = \text{rg}\{u_2, u_1, u_3\} = 3 = \text{ordre}(P)$.

Conclusion : P est inversible

Inversons P : Quels que soient les réels x, y, z, a, b, c on a :

$$\begin{aligned}
 P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ x - y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ 2x + 6z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3z = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c \\ x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ z = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

h) Par le calcul, il est immédiat que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

③ Soit y une solution de (ε'_3) sur \mathbb{R} .

a) On a

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par P^{-1} à gauche. Soit :

$$P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$$

b) On pose $Z = P^{-1}Y$.

Connaissant P^{-1} , il suffit de faire le produit matriciel pour en déduire l'expression de z_1, z_2 et z_3 en fonction de y, y' et y'' .

A savoir :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y \\
 z_2 &= \frac{1}{6}y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{3}y \\
 z_3 &= \frac{1}{3}y'' - \frac{1}{3}y
 \end{aligned}$$

y étant une solution de (ε'_3) , on en déduit qu'elle est de classe C^3 sur \mathbb{R} .

Dès lors, y' est de classe C^2 et y'' est de classe C^1 sur \mathbb{R} , autrement dit y, y' et y'' sont trois fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} . Il vient alors que z_1, z_2 et z_3 sont de classe C^1 sur \mathbb{R} en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} .

c) En dérivant les relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} z'_1 &= -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' \\ z'_2 &= \frac{1}{6}y^{(3)} - \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{3}y' \\ z'_3 &= \frac{1}{3}y^{(3)} - \frac{1}{3}y' \end{aligned}$$

Ou encore, puisque par hypothèse, $Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $Z' = P^{-1}Y'$.

La question 3.a) permet de conclure : $Z' = P^{-1}Y' = DP^{-1}Y = DZ$.

$$d) Z' = DZ \Leftrightarrow Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ z'_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ -z_2(x) \\ 2z_3(x) \end{pmatrix}.$$

Reprenant en particulier l'expression de z_1 , on en déduit : $z'_1 = z_1$. La résolution des équations différentielles du premier ordre permet d'en déduire qu'il existe un réel λ tel que $z_1(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x .

④ Détermination de l'ensemble S'_3 des solutions de (ε'_3) sur \mathbb{R} :

a) D'après la question 3.b) on vient de prouver que y vérifie l'équation différentielle

$$z_1(x) = \lambda e^x = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y \text{ ou encore } (**) -y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(**)$ est $-r^2 + r + 2 = 0$, qui admet pour racines -1 et 2 (après éventuel calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(**)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Quant à déterminer une solution particulière, on peut toujours dire que $y_p : x \mapsto \lambda e^x$ est solution évidente... sinon on posera $y_p(x) = Q(x)e^x$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Dès lors :

$$y'_p(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x \text{ et } y''_p(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x$$

Soit

$$\begin{aligned} -y''_p(x) + y'_p(x) + 2y_p(x) &= (-Q''(x) - 2Q'(x) - Q(x) + Q'(x) + Q(x) + 2Q(x))e^x = \\ &= (-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x))e^x = 2\lambda e^x \end{aligned}$$

et puisque $e^x \neq 0$ pour tout x réel, on a :

$$-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x) = 2\lambda \text{ et donc } Q(x) = \lambda$$

Au final, on voit que y est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

Conclusion : Si $y \in S'_3$, $\exists(A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

ou encore

Conclusion : $S'_3 \subset \text{Vect}\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}$

- b) Pour établir la réciproque, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de (ε'_3) , ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= (-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - 2(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - (-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad + 2(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$S'_3 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$$

- ⑤ On déduit du résultat ci-dessus que S'_3 est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$, à savoir par une famille finie de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour démontrer que celui-ci est de dimension 3, il suffit de mettre en évidence une base et, la famille ci-dessus étant génératrice, il suffit de prouver qu'elle est libre et pour cela revenons à la définition :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (***) .

Cette égalité est en particulier vrai par passage à la limite en $-\infty$. D'où

$$\lambda_1 = 0$$

Donc (***) $\Rightarrow \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(***) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e = 0 & (x = 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 e + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Conclusion : $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$ est une base de S'_3 .

ou encore :

Conclusion : S'_3 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

☞ **Remarque (Pour une lecture en fin d'année) :** Pour montrer que la famille $\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}$ est libre, on peut aussi utiliser le cours « Réduction d'endomorphismes » en remarquant que $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$ sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes (en l'occurrence $-1, 2$ et 1) de l'application linéaire $\Psi : f \mapsto f'$. Ce qui termine la démonstration...

Remarque supplémentaire Une approximation numérique de la solution est possible... nous pouvons en effet écrire une fonction Python permettant de confronter graphiquement une approximation numérique utilisant la méthode d'Euler aux solutions obtenues précédemment, sous réserve de connaître les conditions à l'origine :

Nous utilisons pour ça les notations suivantes : $y'(t) = v(t)$ et $y''(t) = a(t)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'écrire, puisque y vérifie (ε'_3) :

$$\begin{cases} a'(t) = y'''(t) & = 2a(t) + v(t) - 2y(t) \\ v'(t) & = a(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}$$

On rappelle alors que pour h suffisamment petit :

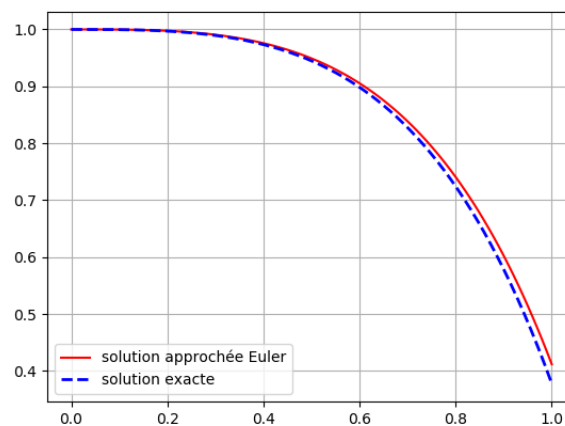
$$\begin{cases} a(t+h) \approx a(t) + h \cdot a'(t) = a(t) + h(2a(t) + v(t) - 2y(t)) = (1+2h)a(t) + hv(t) - 2hy(t) \\ v(t+h) \approx v(t) + h \cdot v'(t) = v(t) + ha(t) \\ y(t+h) \approx y(t) + h \cdot y'(t) = y(t) + hv(t) \end{cases}$$

Prenons pour exemple $y(0) = 1$, $y'(0) = 0 = y''(0)$. On construit ensuite une valeur approchée de la solution en prenant $y_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $a_0 = 0$ puis en construisant pas à pas les valeurs successives de y , v et a qu'on notera y_n , v_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en posant :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = (1+2h)a_n + hv_n - 2hy_n \\ v_{n+1} & = v_n + ha_n \\ y_{n+1} & = y_n + hv_n \end{cases}$$

Soit :

```
def simulSolutionEe(y0,v0,a0,h,t0,tf):
    nbe_pas = int((tf-t0)/h)
    y = [0]*(nbe_pas+1)
    v = [0]*(nbe_pas+1)
    a = [0]*(nbe_pas+1)
    y[0],v[0],a[0] = y0,v0,a0
    for pas in range(nbe_pas):
        a[pas+1] = (1+2*h)*a[pas]+h*v[pas]-2*h*y[pas]
        v[pas+1] = v[pas]+h*a[pas]
        y[pas+1] = y[pas]+h*v[pas]
    return y,v,a
```



Problème 2 : Epreuve Agro-véto B 2015

① L'effectif de la population après s unités de temps, noté Z_s , vaut : $Z_s = \sum_{i=1}^p n_{s,i}$.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) — Dans le cas de la dernière classe d'âge, le nombre d'individus dépend à la fois du nombre d'individus de la classe C_{p-1} qui ont survécu selon le coefficient P_{p-1} et du nombre d'individus qui étaient déjà dans cette dernière classe d'âge et qui ne sont pas mort, selon le taux P_p .

$$\text{Dès lors : } n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p.$$

— Pour toutes les autres classes, d'après les hypothèses du modèle, entre l'instant s et l'instant $s+1$, le nombre d'individus dans les classes C_i ($i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$) dépend uniquement du nombre d'individus dans la classe d'âge C_{i-1} qui précède et qui ont survécu selon un taux de survie désigné par la lettre P_{i-1} .

$$\text{Soit } \forall i \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket, n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$$

b) $n_{s+1,1}$ est l'effectif de la classe d'âge C_1 après $(s+1)$ unités de temps.

Or dans C_1 se trouvent exactement tous ceux qui viennent de naître entre l'instant s et l'instant $s+1$. Il faut noter que les éléments qui étaient dans C_1 après s unités de temps sont, un instant plus tard, soit morts, soit dans C_2 , en tout cas ils ne sont plus dans C_1 . Ainsi :

$$n_{s+1,1} = n_{s,1}F_1 + n_{s,2}F_2 + \dots + n_{s,p}F_p = \sum_{i=1}^p n_{s,i}F_i.$$

c) L'ensemble des relations précédentes peuvent se traduire sous la forme du système ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{s+1,1} = F_1 \times n_{s,1} + F_2 \times n_{s,2} + F_3 \times n_{s,3} + \dots + F_{p-1} \times n_{s,p-1} + F_p \times n_{s,p} \\ n_{s+1,2} = P_1 \times n_{s,1} \\ n_{s+1,3} = P_2 \times n_{s,2} \\ \vdots \\ n_{s+1,i} = P_{i-1} \times n_{s,i-1} \\ \vdots \\ n_{s+1,p-1} = P_{p-2} \times n_{s,p-2} \\ n_{s+1,p} = P_{p-1} \times n_{s,p-1} + P_p \times n_{s,p} \end{array} \right.$$

On traduit ceci matriciellement :

$$N_{s+1} = MN_s \text{ avec } M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & \dots & F_{p-1} & F_p \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & P_{p-1} & P_p \end{pmatrix}.$$

③ Étude d'un exemple.

Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours). Nous choisissons une unité de temps u de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge.

Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0, F_2 = 13, F_3 = 12, P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Ici il y a trois classes d'âge donc, d'après 2.c) : $N_{s+1} = AN_s$ avec A la matrice d'ordre 3 qui

est donnée par : $A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}.$

Avec les données de l'énoncé, les drosophiles ne pouvant survivre au-delà de 30 jours, on a donc $P_3 = 0$.

Dès lors, on a bien :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout s dans \mathbb{N} montrons par récurrence que : $\mathcal{P}(s)$: « $N_s = A^s N_0$. »

- Initialisation : Par définition $A^0 N_0 = I_3 N_0 = N_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : On fixe s dans \mathbb{N} et on suppose $\mathcal{P}(s)$ vraie.

Alors $N_s = A^s N_0$. Ainsi $AN_s = A.A^s N_0 = A^{s+1} N_0$.

Or, d'après 3.a), $AN_s = N_{s+1}$. On a donc : $N_{s+1} = A^{s+1} N_0$. Et ainsi $\mathcal{P}(s+1)$ est vraie.

- Conclusion : le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(s)$ est vraie pour tout entier s . Ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{N}, N_s = A^s N_0.$$

c) i. Soit (S_λ) le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Montrons que le système (S_λ) admet au moins une solution non nulle pour trois valeurs distinctes de λ parmi lesquelles on trouve $\lambda = 2$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Les trois valeurs de λ seront notées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

Le système (S_λ) admet pour seule solution la solution nulle si et seulement si son rang vaut 3.

En conséquence, il admet au moins une solution non nul si, et seulement si, son rang qui est aussi celui de sa matrice associée $A - \lambda I_3$, est différent de 3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow 4L_2; L_3 \leftarrow 2L_3) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ -\lambda & 13 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 13 - 4\lambda^2 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 13 - 4\lambda^2 & 12 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + (4\lambda^2 - 13)L_2)
\end{aligned}$$

où $P(\lambda)$ est le polynôme :

$$P(\lambda) = 12 - 2\lambda(4\lambda^2 - 13) = -2(4\lambda^3 - 13\lambda - 6).$$

Ainsi $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si λ est une racine de P , c'est à dire une racine de $Q(X) = 4X^3 - 13X - 6$.

On remarque que : $Q(2) = 4 \times 8 - 13 \times 2 - 6 = 0$; $Q(-\frac{1}{2}) = \frac{-4}{8} + \frac{13}{2} - 6 = 0$.

Ainsi on peut factoriser Q pour chercher la dernière racine :

$$Q(X) = 4(X - 2)(X + \frac{1}{2})(X - \alpha).$$

Lorsqu'on développe et qu'on ne s'intéresse qu'au terme constant, ce terme vaut : $4 \times (-2) \times (\frac{1}{2}) \times (-\alpha) = 4\alpha$. Or il doit être égal à -6 , donc : $\alpha = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.

En conclusion :

$$A - \lambda I_3 \text{ non inversible si } \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -\frac{3}{2}; \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

On les a bien numérotées de façon à ce que $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

- ii. Résolvons ce système pour chacune des valeurs de λ et donnons dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans (S_{λ_1}) , (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}) .

Nous avons obtenu que la réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ est : $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$

donc $(S_\lambda) \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_\lambda X = 0$

- Résolvons S_{λ_1} : Avec $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32z \\ y = 4z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $S_{(\lambda=2)} = Vect(v_1)$ avec $v_1 = (32, 4, 1)$.

- Résolvons S_{λ_2} : Avec $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} (A + \frac{3}{2}I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_{-3/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18z \\ y = -3z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $S_{(\lambda=-3/2)} = Vect(v_2)$ avec $v_2 = (18, -3, 1)$.

- Résolvons S_{λ_3} : Avec $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} (A + \frac{1}{2}I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_{-1/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $S_{(\lambda=-1/2)} = Vect(v_3)$ avec $v_3 = (2, -1, 1)$.

iii. Montrons que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 :

— Montrons que cette famille est libre : Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3 / \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (*).

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 = 0 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -14\alpha_2 - 30\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 32L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -20\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 \end{aligned}$$

Conclusion : La famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

— De plus cette famille contient trois vecteurs de \mathbb{R}^3 dont la dimension est connue et vaut 3, donc :

— **Conclusion :** La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3

On note désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) **Comportement asymptotique de la population.**

Notons (c_1, c_2, c_3) les coordonnées de N_0 dans la base \mathcal{V} .

i. Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$: $AV_i = \lambda_i V_i$ et plus généralement que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$:
Il suffit de noter que v_i est solution du système homogène (S_{λ_i}) . Autrement dit :

$$(A - \lambda_i I_3)V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i - \lambda_i V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i$$

Une récurrence immédiate prouve que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$.

ii. Montrons que : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s c_3 V_3$.

$$\begin{aligned} N_s &= A^s N_0 \quad (\text{d'après (3.2)}) \\ &= A^s (c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) \\ &= c_1 A^s V_1 + c_2 A^s V_2 + c_3 A^s V_3 \\ &= (\lambda_1^s c_1) V_1 + (\lambda_2^s c_2) V_2 + (\lambda_3^s c_3) V_3. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1^s c_1) V_1 + (\lambda_2^s c_2) V_2 + (\lambda_3^s c_3) V_3$.

iii. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 lorsque s tend vers $+\infty$:

On a alors : $N_s = \lambda_1^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$ avec : $\varepsilon_s = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s c_2 V_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s c_3 V_3$.

Or $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| < 1$, donc $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s = 0$. Ainsi on a bien :

$N_s = \lambda_1^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$ avec les ε_s qui tendent tous vers 0 quand s tend vers $+\infty$.

iv. Montrons que les différents rapports $\frac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\frac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque s tend vers

$+\infty$ et la calculons. On a, en notant $\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{s,1} \\ \varepsilon_{s,2} \\ \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$: $N_s = \lambda_1^s \begin{pmatrix} 32c_1 + \varepsilon_{s,1} \\ 4c_1 + \varepsilon_{s,2} \\ c_1 + \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$.

Autrement dit :

$$n_{s,1} = \lambda_1^s(32c_1 + \varepsilon_{s,1}) \quad ; \quad n_{s,2} = \lambda_1^s(4c_1 + \varepsilon_{s,2}) \quad ; \quad n_{s,3} = \lambda_1^s(c_1 + \varepsilon_{s,3}).$$

Remarquons que c_1 est non nul. En effet, si $c_1 = 0$ on aurait : $N_s = (-3/2)^s c_2 V_2 + (-1/2)^s c_3 V_3$, ce qui rendrait des coordonnées de N_s négatives pour certaines valeurs de s , ce qui est absurde (on signale aussi que par modélisation c_1, c_2, c_3 ne peuvent pas être tous nuls sinon la population est réduite à 0 individus dès le départ!).

On a ainsi, lorsque $s \rightarrow +\infty$:

$$\tau_1 = \frac{n_{s,1}}{n_{s,3}} = \frac{32c_1 + \varepsilon_{s,1}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \rightarrow 32.$$

$$\tau_2 = \frac{n_{s,2}}{n_{s,3}} = \frac{4c_1 + \varepsilon_{s,2}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \rightarrow 4.$$

Interprétons : A long terme, la répartition selon les classes d'âge dans la population sera environ la suivante : il y aura 32 fois plus d'individus dans la classe d'âge C_1 que dans C_3 , et il y aura 4 fois plus d'individus dans la classe d'âge C_2 que dans C_3 .

④ a) On propose la rédaction suivante :

```
def Norme(M):
    # Calcule la norme de M
    d=M.shape
    m=d[0] # m=nombre de lignes de M
    n=d[1] # n=nombre de colonnes de M
    C=abs(M[0,0])
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            if abs(M[i,j])>C:
                C=abs(M[i,j])
    return(C)
```

En effet : la norme de M est un maximum. Donc on initialise C égal à $|M[0,0]|$ (ou à la valeur absolue de n'importe quel terme de la matrice en fait), puis on parcourt la matrice à l'aide de deux boucles *for*. Ensuite, on compare chaque nombre $|M[i,j]|$ à C , et si $|M[i,j]| > C$ alors C prend la valeur $|M[i,j]|$. Une fois que les boucles sont terminées, C est bien égal au maximum des $|M[i,j]|$.

```
b) def Normalise(v):
    # Normalise un vecteur v
    return(v/Norme(v))
```

En effet, on utilise la fonction $Norme(M)$ écrite en (1).

```
c) def PuissanceIteree(A,n):
    p=A.shape[0] # p=Taille de A
    v=matrix(random.rand(p,1))
    for i in range(n):
        v=Normalise(A*v)
    return(v)
```

Explication : On initialise v égal à une matrice colonne aléatoire. Puis, avec une boucle *for*, on calcule de proche en proche v_1, v_2, \dots, v_n , en utilisant la fonction *Normalise(v)* créée dans la question (2). En sortie de boucle, la matrice colonne v correspond au dernier terme calculé, c'est à dire v_n .

Remarque (non demandée) : en exécutant effectivement ces fonctions dans Python avec la matrice A obtenue dans le problème 1, on observe ce qui est annoncé : lorsque n augmente (v_n) se rapproche du vecteur $\frac{V_1}{\|V_1\|}$, autrement dit ($32v_n$) se rapproche de V_1 :

```
In [75]: A=matrix([[0,13,12],[0.25,0,0],[0,0.5,0]])
In [76]: 32*PuissanceIteree(A,20)
Out[76]: matrix([[ 32.],[4.03258664],[0.99728445]])
In [77]: 32*PuissanceIteree(A,20)
Out[77]: matrix([[ 32.],[4.02958654],[0.99753446]])
In [78]: 32*PuissanceIteree(A,100)
Out[78]: matrix([[ 32.],[4.],[1.]])
In [79]: 32*PuissanceIteree(A,100)
Out[79]: matrix([[32.],[4.],[1.]])
```

- d) Les programmes A et C sont corrects (et similaires). Le programme B est incorrect.

En effet, dans le programme B, *ecart* est calculé avant la boucle *while* mais n'est pas recalculée ensuite. Par conséquent, si la boucle démarre, elle sera infinie !