Devoir surveillé 4 : Algèbre linéaire

Le sujet se compose de deux problèmes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\text{l'encadrement}}$ *des résultats. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie, et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
L'usage de la calculatrice ***est*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Problème 1 : Epreuve Agro-véto A 2011

Nous nous nous intéressons dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.

Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_3') \;\; y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.
Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que : $Y' = AY$.

② Étudions quelques propriétés de la matrice A. Pour ça notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice, c'est-à-dire $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer le rang de f, son noyau et son image.
b) Déterminer le rang de $f - id_E$, montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_E$ et en déduire $\ker(f - id_E)$.

On pose $M_\lambda = A - \lambda I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note (S_λ) : $M_\lambda \cdot X = 0$ le système homogène associé.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer sans le résoudre que l'ensemble des solutions de (S_λ) qu'on notera E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
d) Montrer qu'il existe trois valeurs de λ réelles, dont l'une vaut 1, pour lesquelles le système homogène (S_λ) n'est pas un système de Cramer (ou encore pour lesquelles la matrice M_λ n'est **pas** inversible).
✐ On notera par la suite ces trois valeurs λ_1, λ_2 et λ_3 de telle façon que $\lambda_1 < \lambda_2 = 1 < \lambda_3$.
e) Résoudre (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}) et justifier que E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} sont de dimension 1.
✐ On donnera une base de chacun d'entre eux de telle façon que les vecteurs de base, nommés respectivement u_1, u_2 et u_3, aient leur troisième coordonnée égale à 1.

f) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_2, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **Attention à l'ordre des vecteurs**

g) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
Montrer que P est inversible et l'inverser.

h) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

③ Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$.

b) On pose désormais $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}$.
Déterminer z_1, z_2 et z_3 en fonction de y, y' et y'' et justifier sans calcul qu'il s'agit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $Z' = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix}$. Montrer que $Z' = P^{-1}Y'$ et en déduire $Z' = DZ$.

d) En déduire que $z_1'(x) = z_1(x)$ puis une expression de z_1.

④ Détermination de l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$:

a) Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.
Montrer que la question 3. permet d'en déduire que y est solution de l'équation différentielle :
$$-y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$
Résoudre cette équation et conclure que :
$$S_3' \subset Vect\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}$$

b) Déterminer alors l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.

⑤ Montrer que S_3' est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Problème 2 : Epreuve Agro-véto B 2015

Dans une population, tous les individus n'ont pas le même potentiel de reproduction, ni la même probabilité de survie d'une année à l'autre. De même, l'âge est un facteur important. Nous choisissons alors une unité de temps $u \in \mathbb{R}_+$ et nous décidons de découper la population en p classes d'âges de même amplitude (à l'exception de la dernière classe), $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Une classe d'âge C_i, $i \in [\![1, p-1]\!]$ est donc caractérisée par la donnée d'un âge minimum $(i-1)u$, et la donnée d'un âge maximum $iu - 1$. La classe d'âge C_p est caractérisée par la seule donnée d'un âge minimum $(p-1)u$.

Par exemple, dans le cadre d'une population d'êtres humains, nous choisissons une unité de temps u de quinze années et nous découpons la population en 5 classes d'âge ($p = 5$). La classe C_1 inclus les êtres humains d'âge compris entre 0 et 14 ans, la classe C_2 les êtres humains d'âge compris entre 15 et 29 ans, la classe C_3 les êtres humains d'âge compris entre 30 et 44 ans, la classe C_4 les êtres humains d'âge compris entre 45 et 59 ans, la classe C_5 incluant les êtres humains âgés d'au moins 60 ans.

Pour $s \in \mathbb{N}$, nous décidons de représenter la population après s unités de temps par la matrice $N_s \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$N_s = \begin{pmatrix} n_{s,1} \\ n_{s,2} \\ \vdots \\ n_{s,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $n_{s,i}$ désigne l'effectif de la i-ème classe d'âge de la population au début de la s-ième unité de temps.
N_0 représente donc l'état initial de la population, N_1 la population après 1 unité de temps, N_2 la population après 2 unités de temps, etc.

① Pour $s \in \mathbb{N}$, exprimer l'effectif total de la population après s unités de temps.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i désigne le taux de fécondité de la i-ième classe d'âge, à savoir le nombre de naissances par unité de temps pour un individu de la i-ème classe d'âge.
De même, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, P_i désigne le taux de survie pour un individu entre la classe d'âge C_i et la classe d'âge C_{i+1}.
On note P_p le taux de survie au sein de la p-ième et dernière classe d'âge. Les survivants restent alors au sein de cette classe d'âge.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) Justifier pour tout $i \in [\![2, p-1]\!]$ la relation : $n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$ ainsi que $n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p$

b) Exprimer $n_{s+1,1}$ en fonction de $n_{s,1}, n_{s,2}, \cdots, n_{s,p}$ et de $F_1, F_2, \cdots, F_p$.

c) Proposez une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $N_{s+1} = M \cdot N_s$.

③ *Étude d'un exemple.*

Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours). L'unité de temps choisie u est de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge.

Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0,\ F_2 = 13,\ F_3 = 12,\ P_1 = \frac{1}{4},\ P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_{s+1} = AN_s$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_s = A^s \cdot N_0$.

c) i. Soit (S_λ) le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Montrer que le système (S_λ) admet au moins une solution non nulle (ce n'est pas un système de Cramer) pour trois valeurs distinctes de λ parmi lesquelles on trouve $\lambda = 2$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Les trois valeurs de λ seront notées λ_1, λ_2, λ_3 telles que : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

ii. Résoudre ce système pour chacune des valeurs de λ et donner dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}).

iii. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

iv. Justifier que A et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Comportement asymptotique de la population.

Notons (c_1, c_2, c_3) les coordonnées de N_0 dans la base $\mathcal{V}$.

i. En utilisant la question c)i, montrer que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$: $AV_i = \lambda_i V_i$ et en déduire que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ pour tout entier naturel s.

ii. Montrer que : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s V_3$.

iii. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 lorsque s tend vers $+\infty$.

iv. Montrer que les différents rapports $\dfrac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\dfrac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque s tend vers $+\infty$ et la calculer. Interpréter votre réponse.

④ On a montré à la question 3.d)iii. que la matrice colonne N_s représentant la population tend à devenir colinéaire avec le vecteur V_1, solution du système (S_{λ_1}) où λ_1 est la plus grande valeur réelle pour laquelle (S_λ) n'est pas un système de Cramer.
On dira que V_1 est un « vecteur propre de A » associé à la valeur propre λ_1 et l'objectif de cette partie est d'approcher numériquement V_1 à partir de la seule matrice A...

✐ *Quelques fonctions utiles ont rappelées en annexe à la fin du sujet. On rappelle que chaque programme doit être commenté par une phrase détaillant le raisonnement qui a conduit à son élaboration.*

Notons $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels, et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées. À chaque matrice $\mathrm{M} = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on associe un nombre réel positif $\|\mathrm{M}\|$, appelé norme de M, défini par

$$\|\mathrm{M}\| = \max_{i,j} |m_{ij}|\,.$$

Remarquons que $\|M\|$ est toujours strictement positif, sauf lorsque la matrice M est nulle.

a) Écrire une fonction `Norme(M)` qui étant donnée une matrice M de taille quelconque calcule et renvoie le nombre $\|\mathrm{M}\|$. On interdit le recours à une quelconque fonction max prédéfinie pour cette question.

b) Écrire une fonction `Normalise(v)` qui étant donnée une matrice colonne $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ non nulle renvoie une nouvelle matrice colonne $\tilde{v}$, de même forme, égale à

$$\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}.$$

On se donne à présent une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit v_0 un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. En supposant qu'aucun des termes n'est dans le noyau de A, on peut former la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \frac{\mathrm{A}v_n}{\|\ \mathrm{A}v_n\|}.$$

c) Écrire une fonction `PuissanceIteree(A, n)` qui étant donnée une matrice carrée A et un entier naturel n, détermine la taille p de A, choisit aléatoirement une matrice colonne $v_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, puis calcule et renvoie, en supposant que tous les termes de la suite ci-dessus sont bien définis, la matrice colonne v_n.
On peut montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable (c'est-à-dire telle que la matrice A étudiée à la question 3.), et possède les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_p|$$

alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ ci-dessus existe et ses composantes convergent vers les composantes d'un vecteur propre v de A associé à la valeur propre λ_1, sauf pour quelques choix de v_0. La probabilité, en choisissant aléatoirement v_0, de tomber sur l'une des exceptions est nulle.

On se propose d'écrire maintenant une fonction `VecteurPropre(A, e)` qui étant donnée une matrice carrée A satisfaisant les hypothèses ci-dessus et un nombre $e > 0$ calcule les termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ jusqu'à ce que deux termes successifs vérifient $\|v_n - v_{n+1}\| < e$ et renvoie alors la matrice colonne v_{n+1}.

Voici trois propositions de programmes :

```
import numpy as np
import numpy.random as nrdm

def VecteurPropre_v1(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    while Norme(v-w) >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w

def VecteurPropre_v2(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    ecart = Norme(v-w)
    while ecart >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w

def VecteurPropre_v3(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    while Norme(v - Normalise(A*v)) >= e:
        v = Normalise(A*v)
    return Normalise(A*v)
```

d) Parmi ces trois programmes, indiquer lequel est (ou lesquels sont) correct(s). Pour chaque programme *incorrect* on indiquera succinctement ce qui ne va pas.

ANNEXE

On donne ci-dessous la description de quelques fonctions qui pourront être utiles dans le deuxième problème.
En Python, on utilise la librairy `NumPy` qui est supposée importée en exécutant :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as nrdm`

Interprétation	**Python**
Construction d'une nouvelle matrice de taille $m \times n$, ne contenant que des zéros	`np.matrix(np.zeros((m,n)))`
Matrice identité de taille p	`np.matrix(np.eye(p))`
Construction d'une nouvelle matrice de taille $m \times n$, remplie avec des coefficients choisis aléatoirement dans $[0;1[$	`np.matrix(nrdm.rand(m,n))`
Copie de la matrice A dans une nouvelle matrice B	`B = np.matrix(A)`

Dimensions de la matrice A
- nombre de lignes
- nombre de colonnes
	`d = A.shape`
	`d[0]`
	`d[1]`

Opérations matricielles (pour des matrices A et B de tailles compatibles)	`A + B`, `A - B`, `A * B`
Coefficient d'indices (i, j) dans la matrice M	`M[i,j]`