Devoir Maison n° 4

Problème :

On s'intéresse à une forêt composée de deux essences d'arbres dont nous suivons l'évolution au cours des années. On notera A_n et B_n respectivement le nombre d'arbres de l'espèce A et de l'espèce B au sein de cette forêt l'année n.

Nous supposerons que les arbres de l'espèce A ont une durée de vie plus longue et que seulement 1% d'entre-eux meurt en moyenne quelle que soit l'année tandis que c'est le cas pour 5% de l'espèce B.
Parce que leur croissance est plus rapide, les arbres de l'essence B ont plus de chance que ceux de l'essence A de s'imposer sur un emplacement laissé vacant . Ainsi, 75% des places nouvellement libres sont colonisées par des arbres de l'espèce B tandis que seulement 25% d'entre elles le sont pas l'espèce A.

① Montrer que l'évolution du système peut être modélisé, pour tout n entier naturel, par la relation matricielle $X_{n+1} = M \cdot X_n$ où

$$M = \begin{pmatrix} 0,9925 & 0,0125 \\ 0,0075 & 0,9875 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

Pour la suite, on suppose qu'on débute avec une répartition formée de $A_0 = 10$ arbres d'essence A et $B_0 = 990$ arbres d'essence B.

② Écrire une fonction python `evolution` permettant de simuler l'évolution de cette forêt au cours du temps en fonction de ces conditions initiales.

③ Recherchons une explication à ce phénomène :

a. Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2$, telles que : $M - \lambda I_3$ est non inversible.

b. Déterminer une base de $\text{Ker}(M - \lambda I_3)$ pour chacune de ces valeurs et montrer que leur juxtaposition forme une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

c. En déduire que M est semblable à une matrice diagonale D qu'on déterminera et exprimer M^n en fonction de D^n.

d. Montrer que $X_n = M^n X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et conclure sur le comportement asymptotique de l'évolution de la forêt.

④ On imagine que durant les années sèches, le taux de mortalité de l'espèce B est plus important et qu'en conséquence, la matrice de projection devient :

$$Ms = \begin{pmatrix} 0,9925 & 0,0975 \\ 0,0075 & 0,9025 \end{pmatrix}$$

a. Interprétez l'évolution des coefficients et évaluer l'impact d'années de sécheresse répétées sur l'évolution de la forêt.

b. Simuler l'évolution de la forêt en supposant cette fois une alternance régulière entre années humides et années sèches.