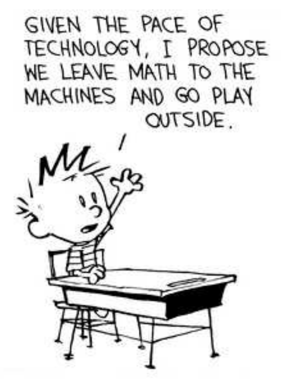
Exercices de Mathématiques

BCPST Première Année

2016-2019

Bastien Marmeth



Préambule

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.
Blaise Pascal

Ce polycopié contient les exercices du cours de mathématiques tels que donnés en BCPST au Lycée Albert Schweitzer du Raincy.

Il s'agit d'une version de travail pour le professeur et à ce titre peut contenir diverses coquilles, erreurs mineures ou maladresses de mise en page.

Les réponses contenus dans ce polycopié sont parfois succinctes et ne peuvent se substituer à un travail sérieux en TD et aux explications du professeur.

Table des matières

Chapitre 1

Logique et Ensembles

Exercices

Exercice 1.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois

Exercice 1.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$
4. $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
5. $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
6. $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$

Exercice 1.3

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 1.4

1. Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2. Préciser cette décomposition pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

Exercice 1.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Traduire par une phrase en français les assertions quantifiées suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
4. $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Exercice 1.6

Nier la phrase : Tous les Lyonnais qui ont les yeux bleus gagneront au loto et partiront finir leurs jours aux Seychelles.

Exercice 1.7

Quelle sont les négation des phrases suivantes :

1. Tous les lundis, je joue au squash
2. Tous les lundis, je joue au squash et je me douche
3. Tous les lundis où il fait beau, je joue au tennis
4. Tous les lundis, s'il fait beau, je joue au tennis
5. Tous les lundis, je joue au squash ou au tennis
6. Je joue au squash au moins une fois par semaine
7. Chaque semaine, si je n'ai pas joué au squash, je joue au tennis au moins deux fois
8. Tous les ans, il y a des semaines où je ne peux pas jouer au squash
9. Certaines années, je joue au squash tous les lundis (sans exception)

Exercice 1.8

Soit n un entier. Montrer que, si n^3 est pair alors n est pair.

Exercice 1.9

Soit x un nombre irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel

---

Exercice 1.10

Montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel

Exercice 1.11

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$$

Montrer que $x = 0$.

Exercice 1.12

Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y = x - 1\}$$

est inclus dans l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ (-x + 2y + 4)(3x - y + 3) \geqslant 0\}$$

Exercice 1.13

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, plusieurs sont égaux bien qu'écrits différemment. Déterminer lesquels.

$$E_1 = \{5, 8, 11, 14, 17, \cdots\}, \quad E_2 = \{x^2 \ , \ x \in [\![1, 5]\!]\}, \quad E_3 = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \cap \mathbb{Z}, \quad E_4 = \{y^2 \ , \ y \in [-5, -1]\}$$

$$E_5 = [\![-1, 1]\!], \quad E_6 = [1, +\infty[\cap [0, +\infty[\cap] - 1, 25], \quad E_7 = [1, 25], \quad E_8 = \{3x + 2 \ , \ x \in \mathbb{N}^*\}$$

$$E_9 = \{m \in [1, 25] \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ , \ m = k^2\}, \quad E_{10} = \{-1, 0, 1\}, \quad E_{11} = \{n \in \mathbb{N}^* \ , \ \exists k \in \mathbb{N}^* \ , \ n = 3k + 2\}$$

$$E_{12} = \{3n + 2 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\} \quad E_{13} = \{m \in \mathbb{Z} \ , \ m \leqslant 1 \text{ et } m \geqslant -1\}, \quad E_{14} = \{t^2 \ , \ t \in [1, 5]\}$$

$$E_{15} = \left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad E_{16} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

Exercice 1.14

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad \ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \qquad s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \qquad c : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Exercice 1.15

Soit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & \ln(1 + e^x) \end{array}$$

Montrer que h est bijective et expliciter sa bijection réciproque h^{-1}.

Exercice 1.16

Décrire, pour chacune de ces assertions, en utilisant les intervalles, l'ensemble des réels x vérifiant cette assertion.

1. $x > 4$ et $x < 7$ et $x \neq 6$
2. $(x > 0$ et $x < 3)$ ou $x = 0$
3. $(x < 3$ et $x \in \mathbb{N})$ ou $x = 2$
4. $(x \in \mathbb{R}_+$ ou $x = -3)$ et $x < 0$
5. $\exists u \in [3, +\infty[\ , \ x = u^2$

Exercice 1.17

Dessiner l'allure des sous-parties suivantes de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x+y \geqslant 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ xy < 0\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y \leqslant \min(x, 2-x) \text{ et } y \geqslant -1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y \geqslant x^2 \text{ ou } y^2 + (x-1)^2 \leqslant 1\}$$

Exercice 1.18

Donner une expression plus simple des ensembles suivants et donner les relations d'inclusion qui existent entre ces ensembles.

1. $A = \{y \in \mathbb{R} \ , \ \exists t \in [3, +\infty[\ , \ y = t^2\}$
2. $B = \{y \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \leqslant 9 \ , \ y > x\}$
3. $C = \{y \in \mathbb{R} \ , \ \forall t \in [3, +\infty[, y \neq t^2\}$
4. $D = \{y \in \mathbb{R} \ , \ \exists x \leqslant 9 \ , \ y \geqslant x\}$

Réponses

Réponse de l'exercice 1.1

1. « La fonction f s'annule. »peut s'écrire
$$\exists x \in I, \ f(x) = 0$$
2. « La fonction f est la fonction nulle. »peut s'écrire
$$\forall x \in I, \ f(x) = 0$$
3. « f n'est pas une fonction constante. »peut s'écrire
$$\exists (x,y) \in I^2, \ f(x) \neq f(y)$$
ou bien encore
$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \ f(x) \neq C$$
4. « f ne prend jamais deux fois la même valeur. »peut s'écrire
$$\forall (x,y) \in I^2, \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
5. « La fonction f présente un minimum. »peut s'écrire
$$\exists x \in I, \ \forall y \in I, \ f(x) \leqslant f(y)$$
6. « f prend des valeurs arbitrairement grandes »peut s'écrire
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \ f(x) \geqslant M$$

7. « f ne peut s'annuler qu'une seule fois »peut s'écrire

$$\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ f(y) = 0 \Rightarrow y = x$$

ou encore

$$(\forall x \in I,\ f(x) \neq 0) \vee (\exists! x \in I,\ f(x) = 0)$$

Réponse de l'exercice 1.2

Les négations sont :

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \neq y$
3. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ |f(x)| > M$
4. $\exists (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$
5. $\exists (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$
6. $\exists x \in I,\ f(x) > 0$ et $x > 0$

Réponse de l'exercice 1.3

On va procéder par récurrence double. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion $u_n = 2^n + 3^n$.

Initialisation :

On a

$$u_0 = 2 = 2^0 + 5^0 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$$

$\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont ainsi vérifiées.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vérifiées. Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\
&= 5(2^{n+1} + 3^{n+1} - 6(2^n + 3^n) \\
&= 5 \times 2 \times 2^n + 5 \times 3 \times 3^n - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\
&= (10 - 6)2^n + (15 - 6)3^n \\
&= 2^2 \times 2^n + 3^2 \times 3^n \\
&= 2^{n+2} + 3^{n+2}
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+2}$ est ainsi vérifiée.

D'après le principe de récurrence on a prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^n + 3^n$$

Réponse de l'exercice 1.4

1. On va procéder ici par analyse-synthèse, c'est à dire que l'on va supposer qu'il existe une décomposition paire + impaire, la caractériser de façon unique et enfin vérifier que cette unique décomposition obtenue fonctionne bien.

Analyse :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $f = p + i$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

et

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

En combinant ces égalités on obtient alors

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad\qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ainsi, s'il existe une décomposition paire + impaire $f = p + i$ alors nécessairement on a, pour tout réel x,

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Vérifions qu'alors p est bien une fonction paire et i une fonction impaire et que $f = p + i$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$
$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$$

Ainsi p est bien une fonction paire et i est bien une fonction impaire.
De plus on a, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p(x) + i(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{2f(x)}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien $f = p + i$.
Par Analyse-Synthèse on a ainsi prouvé que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2. On prend ici le cas particulier où $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{-x+1}{x^2-x+1}}{2} \\
&= \frac{(x+1)(x^2-x+1)+(1-x)(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2+x+x^2-x+1+x^2+x+1-x^3-x^2-x}{2(x^4+x^2+1)} \\
&= \frac{2}{2(x^4+x^2+1)} \\
&= \frac{1}{x^4+x^2+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\
&= \frac{\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{-x+1}{x^2-x+1}}{2} \\
&= \frac{(x+1)(x^2-x+1)-(1-x)(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2+x+x^2-x+1-(x^2+x+1-x^3-x^2-x)}{2(x^4+x^2+1)} \\
&= \frac{x^3-x^2+x+x^2-x+1-x^2-x-1+x^3+x^2+x)}{2(x^4+x^2+1)} \\
&= \frac{2x^3)}{2(x^4+x^2+1)} \\
&= \frac{x^3}{x^4+x^2+1}
\end{aligned}$$

On a ainsi $f = p + i$ où p est paire, i est impaire et

$$p : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^4+x^2+1} \end{array} \qquad i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3}{x^4+x^2+1} \end{array}$$

Réponse de l'exercice 1.5

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$ signifie « f est paire »
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda$ signifie « f est constante »
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ signifie « f ne peut s'annuler qu'en 0 », c'est-à-dire « Le seul point où f pourrait éventuellement s'annuler est 0 », faites attention que cela n'implique pas que $f(0) = 0$
4. $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ signifie « f est croissante »

Réponse de l'exercice 1.6

La négation de cette phrase est :

« Au moins un Lyonnais qui a les yeux bleus ne gagnera pas au loto ou ne partira pas finir ses jours aux Seychelles »

Réponse de l'exercice 1.7

Les négations sont :

1. Il y a au moins un lundi où je ne joue pas au squash.
2. Il y a au moins un lundi où je ne joue pas au squash ou bien je ne me douche pas.
3. Il y a au moins un lundi où il fait beau et je ne joue pas au tennis.
4. Il y a au moins un lundi où il fait beau et je ne joue pas au tennis.
5. Il y a au moins un lundi où je ne joue ni au squash, ni au tennis.
6. Il y a au moins une semaine où je ne joue pas au squash.
7. Il y a au moins une semaine où je n'ai pas joué pas au squash et où j'ai joué au tennis au plus une fois.
8. Il y a une année où j'ai joué au squash toutes les semaines.
9. Toutes les années il y a au moins un lundi où je n'ai pas joué au squash.

Réponse de l'exercice 1.8

Il s'agit ici de montrer l'implication « n^3 est pair »$\Rightarrow$ « n est pair ». On va pour cela procéder par contraposition et montrer l'implication « n est impair »$\Rightarrow$ « n^3 est impair ».

On suppose donc que n est impair. Ainsi il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Alors
$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$
n^3 est donc bien un nombre impair.

Ainsi on a montré par contraposition que, si n^3 est pair alors n est pair.

Réponse de l'exercice 1.9

Soit x un nombre irrationnel positif. On va procéder à un raisonnement par l'absurde.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{x}$ est un nombre rationnel. Alors il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{x} = \dfrac{p}{q}$.

Alors on a
$$x = \sqrt{x}^2 = \frac{p^2}{q^2}$$
On a donc écrit x comme un nombre rationnel, ce qui est absurde. Notre hypothèse ne peut donc pas être vraie

Ainsi on a prouvé que $\sqrt{x}$ est bien irrationnel.

Réponse de l'exercice 1.10

On va de nouveau procéder à un raisonnement par l'absurde. Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. On peut alors l'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ où $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

En élevant au carré on obtient $3 = \dfrac{p^2}{q^2}$. D'où $p^2 = 3q^2$. On en déduit alors que p^2 est un multiple de 3.

Montrons qu'alors p est un multiple de 3.

Par l'absurde, si p n'est pas un multiple de 3 alors

- Soit p s'écrit sous la forme $p = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et alors $p^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ n'est pas un multiple de 3 ce qui est absurde
- Soit p s'écrit sous la forme $p = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et alors $p^2 = 9k^2 + 6k + 4 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$ n'est pas un multiple de 3 ce qui est absurde

Ainsi p est bien un multiple de 3. Il existe donc $\tilde{p} \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3\tilde{p}$.

Notre égalité devient alors $(3\tilde{p})^2 = 3q^2$, d'où $q^2 = 3\tilde{p}^2$. Ainsi q^2 est un multiple de 3 et, par suite, q est un multiple de 3. Il existe donc $\tilde{q} \in \mathbb{N}$ tel que $q = 3\tilde{q}$

Mais alors, si on revient à l'écriture de $\sqrt{3}$ sous forme d'une fraction, on obtient

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} = \frac{3\tilde{p}}{3\tilde{q}} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$$

On a ici réduit une fraction qui était irréductible. Ce qui est absurde, notre hypothèse ne peut donc pas être vraie.

Ainsi on a montré par l'absurde que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Réponse de l'exercice 1.11

On va procéder par l'absurde. Supposons donc que $x \neq 0$.

Comme $x \geqslant 0$ on a alors $x > 0$. D'où $\frac{x}{2} > 0$.

En prenant le cas particulier $\varepsilon = \frac{x}{2}$, notre propriété nous donne

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{x}{2}$$

Comme $x > 0$ on peut diviser chaque terme par x et cela ne change pas le sens des inégalités. On a ainsi

$$0 \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{2}$$

Ce qui est manifestement absurde. Ainsi on a bien $x = 0$.

Réponse de l'exercice 1.12

Soit $(x, y) \in F$, on va montrer que $(x, y) \in E$.

Comme $(x, y) \in F$ on a alors $y = x - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}(-x + 2y + 4)(3x - y + 3) &= (-x + 2(x - 1) + 4)(3x - (x - 1) + 3) \\ &= (-x + 2x - 2 + 4)(3x - x + 1 + 3) \\ &= (x + 2)(2x + 4) \\ &= 2(x + 2)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Comme $(-x + 2y + 4)(3x - y + 3) \geqslant 0$ on a alors $(x, y) \in E$.

Tout élément de F est donc un élément de E, c'est-à-dire $F \subset E$.

Réponse de l'exercice 1.13

On a

— $E_1 = E_8 = E_{11} = E_{12}$

— $E_2 = E_9 = E_{16}$

— $E_3 = E_5 = E_{10} = E_{13} = E_{15}$

— $E_4 = E_6 = E_7 = E_{14}$

Réponse de l'exercice 1.14

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$.

   — Montrons que f est injective.
   Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. Montrons qu'alors $n_1 = n_2$
   On a $n_1 + 1 = n_2 + 1$ d'où $n_1 = n_2$. f est donc injective.

   — Montrons que f n'est pas surjective. Pour cela on remarque que 0 n'a pas d'antécédent par f. En effet si $n \in \mathbb{N}$ était un antécédent de 0 par f alors $n + 1 = 0$, d'où $n = -1$ ce qui est absurde car $-1 \notin \mathbb{N}$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$.

   — Montrons que g est injective.
   Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $g(n_1) = g(n_2)$.
   Alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$ d'où $n_1 = n_2$. g est donc injective.

   — Montrons que g est surjective.
   Soit $n \in \mathbb{Z}$, trouvons $m \in \mathbb{Z}$ tel que $g(m) = n$. Il faut donc trouver m tel que $m + 1 = n$.
   Il suffit de prendre $m = n - 1$. g est donc surjective.

3. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$

   — Montrons que h est injective.
   Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, montrons qu'alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
   On a $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, d'où $(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$. On en tire alors

   $$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

   puis en ajoutant la seconde ligne à la première

   $$\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

   Enfin en remplaçant dans la seconde ligne et en simplifiant

   $$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

   On a donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, h est donc bien injective.

   — Montrons que h est surjective.
   Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, trouvons alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(x, y) = (u, v)$. C'est-à-dire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases}$$

   On ajoute la seconde ligne à la première.

   $$\begin{cases} 2x = u + v \\ x - y = v \end{cases}$$

Enfin en remplaçant dans la seconde ligne et en simplifiant

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

Vérifions nos calculs

$$\begin{aligned} h\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) &= \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) \\ &= (u,v) \end{aligned}$$

Ainsi $\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$ est bien un antécédent de (u,v). h est donc surjective.

4. Soit $\begin{array}{cccc} k & : & \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

— Montrer que k est injective. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}\backslash\{1\})^2$ tel que $k(x) = k(y)$. Montrons qu'alors $x = y$. On a

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow & \quad (x+1)(y-1) = (y+1)(x-1) \\ \Rightarrow & \quad xy + y - x - 1 = xy + x - y - 1 \\ \Rightarrow & \quad x = y \end{aligned}$$

k est donc bien injective

— k n'est pas surjective. En effet 1 n'admet pas d'antécédent par k. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ tel que $k(x) = 1$. Alors $\dfrac{x+1}{x-1} = 1$ d'où $x + 1 = x - 1$, et, par suite, $1 = -1$ ce qui est absurde.
Ainsi 1 n'a pas d'antécédent par k, k n'est pas surjective.

5. Soit $\begin{array}{ccccc} s & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$. Ici on va montrer directement que s est bijective en trouvant une applications $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$ et $s \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.
Ici c'est très simple, posons $g = s$. Alors il est aisé de vérifier que $g \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$ et $s \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$. s est donc bien bijective et sa réciproque est g. Elle est alors surjective et injective.

6. Soit $\begin{array}{ccccc} c & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & z^2 \end{array}$

— c n'est pas injective. Il suffit de remarque que, par exemple $c(1) = c(-1)$.

— Montrons c est surjective. Soit $z \in \mathbb{C}$, on va trouver $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = z$.
Pour cela écrivons z sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ et on va chercher u sous la forme $u = re^{i\alpha}$ avec $r \geqslant 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$. Il s'agit donc de trouver r et α tels que

$$\left(re^{i\alpha}\right)^2 = \rho e^{i\theta}$$

Ce qui se réécrit

$$r^2 e^{2i\alpha} = \rho e^{i\theta}$$

Il suffit donc de prendre $r = \sqrt{\rho}$ et $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ et alors u est bien un antécédent de z.
c est ainsi surjective. On peut remarquer que si $z = \rho e^{i\theta}$ est différent de 0 alors il admet deux antécédent par c qui sont $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$.

7. Soit $\ell : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$

On va commencer par étudier la fonction ℓ et tracer sa courbe représentative.

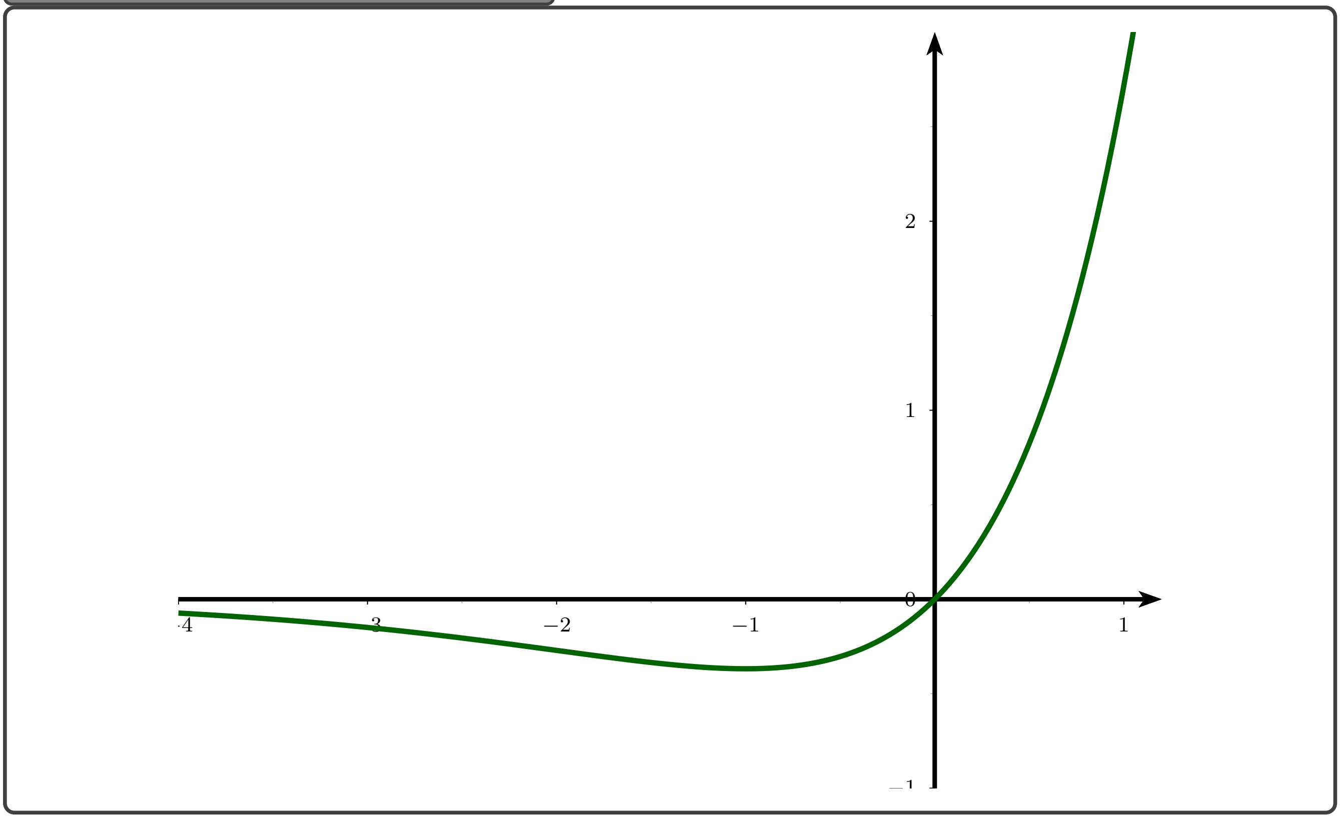
ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\ell'(x) = (x+1)e^x$$

On en déduit le tableau de variations de ℓ

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\ell'(x)$		$-$	0		$+$		
ℓ	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 1.1 – Courbe représentative de ℓ



D'après notre étude des variations, la fonction ℓ admet un minimum global en -1 qui vaut $-\dfrac{1}{e}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \ell(x) \geqslant -\frac{1}{e}$$

Soit $y < -\dfrac{1}{e}$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) > y$. y n'admet donc pas d'antécédent par ℓ. Ainsi ℓ n'est pas surjective.

L'allure de la courbe de ℓ nous indique bien que, si $y \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ alors y admet au moins deux antécédents par ℓ (puisque la courbe passe au moins deux fois à la hauteur y). A ce niveau de l'année une telle justification serait acceptable. On va toutefois rédiger une preuve rigoureuse.
Soit $y \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$.
La fonction ℓ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$. Comme $f(-1) < y < f(0)$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in]-1, 0[$ tel que $f(x_1) = y$.
On sait de plus que $\lim_{x \to -\infty} \ell(x) = 0 > y$. Ainsi, d'après la définition de la limite, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \leqslant a \qquad \ell(x) > y$$

En particulier $\ell(a) > y$.
Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre a et -1 nous donne alors $x_2 \in]a, -1[$ tel que $\ell(x_2) = y$.
On a ainsi $\ell(x_1) = \ell(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ (car $x_2 < -1 < x_1$). ℓ n'est donc pas injective.

Réponse de l'exercice 1.15

On va commencer par montrer que h est injective.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(x) = h(y)$. On a alors

$$\ln(1 + e^x) = \ln(1 + e^y)$$

D'où en passant à l'exponentielle $1 + e^x = 1 + e^y$, c'est-à-dire $e^x = e^y$. Il ne reste plus qu'à passer au ln pour obtenir $x = y$. h est ainsi injective.
Montrons maintenant que h est surjective. Soit $z \in]0, +\infty[$, on a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(x) = z \Leftrightarrow & \ln(1 + e^x) = z \\
\Leftrightarrow & \ 1 + e^x = e^z \\
\Leftrightarrow & \ e^x = e^z - 1 \\
\Leftrightarrow & \ x = \ln(e^z - 1) \qquad (\text{ Comme } z > 0 \text{ on a alors } e^z - 1 > 0, \text{ on peut ainsi passer au } \ln)
\end{aligned}$$

Ainsi $\ln(e^z - 1)$ est l'unique antécédent de z par h. h est ainsi surjective et injective, elle est donc bijective.
On a de plus

$$\begin{array}{cccc} h^{-1} & : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(e^x - 1) \end{array}$$

Réponse de l'exercice 1.16

1. $]4, 7[\setminus\{6\} =]4, 6[\cup]6, 7[$
2. $[0, 3[$
3. $[\![0, 2]\!] = \{0, 1, 2\}$
4. $\{-3\}$
5. $[9, +\infty[$

Réponse de l'exercice 1.17

Figure 1.2 – A

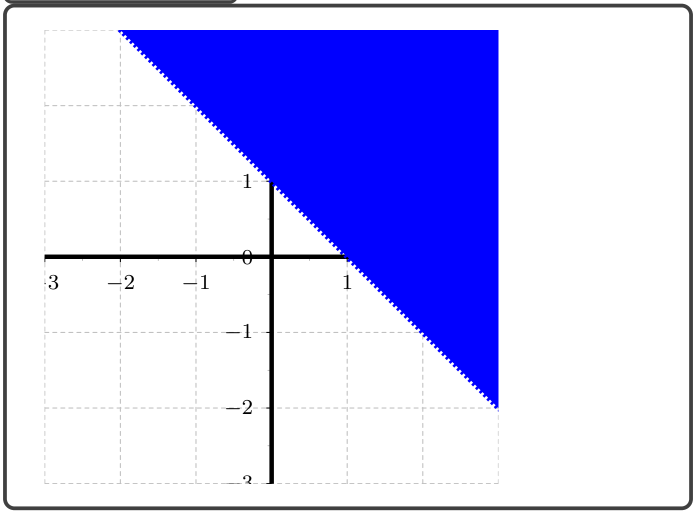


Figure 1.4 – C

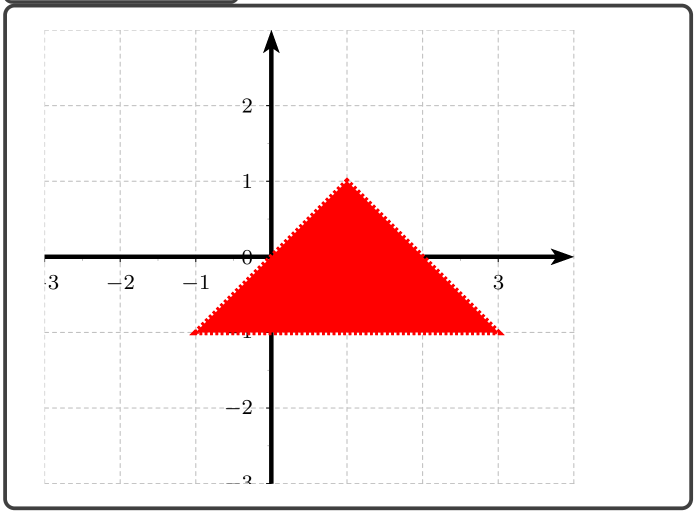


Figure 1.3 – B

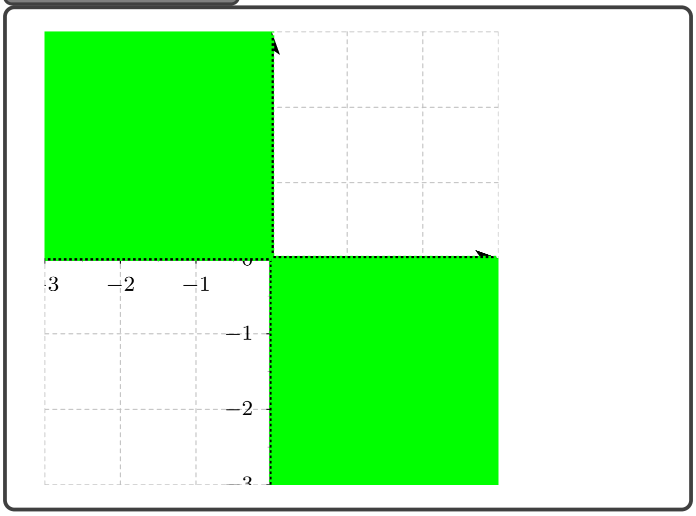
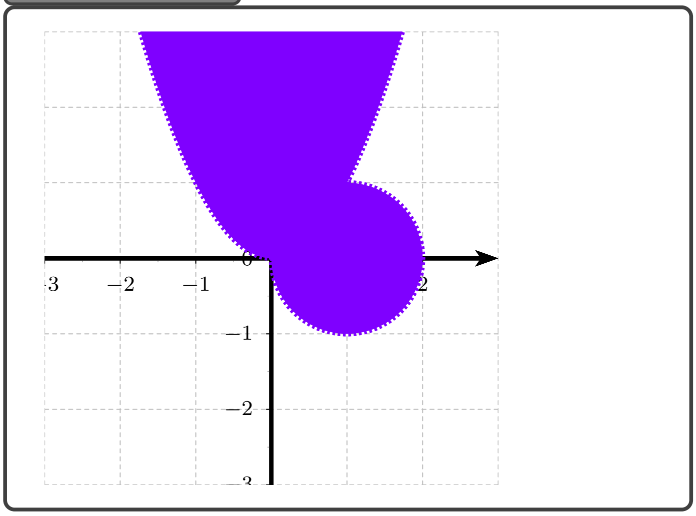


Figure 1.5 – D



Réponse de l'exercice 1.18

1. $A = [9, +\infty[$
2. $B =]9, +\infty[$
3. $C =]-\infty, 9[$
4. $D = \mathbb{R}$

On a alors $B \subset A \subset D$ et $C \subset D$. On a de plus $C = A^c$.

Chapitre 2

Applications

Exercices

Exercice 2.1

Dans les exemples suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E est une sous-partie de $\mathbb{R}$. Déterminer $f(E)$.

— $E = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $f : x \mapsto \cos(x)$

— $E = [-2, 3] \backslash \{1\}$, $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$

— $E = [-1, 2]$, $f : x \mapsto x^2$

Exercice 2.2

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(3k) = 2k \qquad f(3k+1) = 4k+1 \qquad f(3k+2) = 4k+3$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Exercice 2.3

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-2, 2[$.
2. Expliciter sa réciproque.

Exercice 2.4

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{1+|z|} \end{array}$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.5

Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1-x^2} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2.6

Soient f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$s \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+g(y) \end{array} \quad \text{et} \quad p \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)g(y) \end{array}$$

1. s est-elle surjective ?
2. s est-elle injective ?
3. p est-elle surjective ?
4. p est-elle injective ?

Si la réponse est oui, on fera une preuve et si la réponse est non, on donnera un contre-exemple en choisissant f et g.

Exercice 2.7

$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.8

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

Exercice 2.9

Soit $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u+v,uv) \end{array}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer un antécédent de $(5,5)$ par f.

Exercice 2.10

Soit $f \; : \; \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1-x^2} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2.11

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les somme suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Exercice 2.12

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer et simplifier $(k+1)^3 - k^3$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$
3. Retrouver alors la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$
4. En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

Exercice 2.13

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u+v, uv) \end{array}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer un antécédent de $(5,5)$ par f.

Exercice 2.14

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{1+|z|} \end{array}$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.15

Soient f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+g(y) \end{array} \quad \text{et} \quad p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)g(y) \end{array}$$

1. s est-elle surjective ?
2. s est-elle injective ?
3. p est-elle surjective ?
4. p est-elle injective ?

Si la réponse est oui, on fera une preuve et si la réponse est non, on donnera un contre-exemple en choisissant f et g.

Exercice 2.16

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.17

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

Exercice 2.18

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f = f$

1. Montrer que, si f est injective, alors $f = Id_E$
2. Montrer que, si f est surjective, alors $f = Id_E$.
3. Pour cette question on prendra $E = \mathbb{R}$. Donner un exemple de fonction f vérifiant $f \circ f = f$ mais telle que $f \neq Id_{\mathbb{R}}$.

Réponses

Réponse de l'exercice 2.1

— $f(E) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

—

$$\begin{aligned} f(E) &= f([-2,1[\cup]1,3]) \\ &= f((-2,1[) \cup f(]1,3]) \\ &= \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\end{aligned}$$

— $f(E) = [0,4]$

Réponse de l'exercice 2.2

On va montrer que f est bijective en trouvant son inverse qui est l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g(2k) = 3k \qquad g(4k+1) = 3k+1 \qquad g(4k+3) = 3k+2$$

Remarquons que g est bien définie car tout nombre entier n est, soit pair et donc de la forme $2k$, soit impair de la forme $4k+1$, soit impair de la forme $4k+3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on va prouver que $g \circ f(n) = n$ puis que $f \circ g(n) = n$. Pour cela il nous faut séparer différent cas.

On commence pas prouver que $g \circ f(n) = n$

— Premier cas : n est un multiple de 3. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$. D'où $f(n) = f(3k) = 2k$. Par définition on a alors $g(f(n)) = g(2k) = 3k = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $g \circ f(n) = n$.

— Deuxième cas : n est de la forme $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors $f(n) = 4k+1$ puis $g(f(n)) = g(4k+1) = 3k+1 = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $g \circ f(n) = n$.

— Troisième cas : n est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors $f(n) = 4k+3$ puis $g(f(n)) = g(4k+3) = 3k+2 = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $g \circ f(n) = n$.

Finalement dans tous les cas on a bien $g \circ f(n) = n$. Ainsi $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.

Montrons maintenant que $f \circ g(n) = n$.

— Premier cas : n est un multiple de 2. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. D'où $g(n) = g(2k) = 3k$. Par définition on a alors $f(g(n)) = f(3k) = 2k = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $f \circ g(n) = n$.

— Deuxième cas : n est de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors $g(n) = 3k+1$ puis $f(g(n)) = f(3k+1) = 4k+1 = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $f \circ g(n) = n$.
— Troisième cas : n est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors $g(n) = 3k+2$ puis $f(g(n)) = f(3k+2) = 4k+3 = n$. Ainsi, dans ce cas, on bien $f \circ g(n) = n$.

Finalement dans tous les cas on a bien $f \circ g(n) = n$. Ainsi $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.

En conclusion f est bijective de réciproque g.

Réponse de l'exercice 2.3

Commençons par montrer que f est injective. Comme f est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ on va d'abord regarder si elle est strictement monotone. Pour cela on la dérive.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - (2x+1)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} \\ &= \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{3}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \end{aligned}$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante, ce qui implique que f est injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $y \in]-2,2[$, trouvons $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
L'équation $f(x) = y$ se réécrit

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = y \\ \Rightarrow \quad & 2x+1 = y\sqrt{x^2+x+1} \\ \Rightarrow \quad & (2x+1)^2 = y^2(x^2+x+1) \\ \Rightarrow \quad & (4-y^2)x^2 + (4-y^2)x + (1-y^2) = 0 \end{aligned}$$

Comme $y \in]-2,2[$ alors $4-y^2 \neq 0$ on est donc face à une équation polynomiale de degré 2 dont le discriminant est

$$\Delta = (4-y^2) - 4(4-y^2)(1-y^2) = (4-y^2)(4-y^2-4+4y^2) = 3y^2(4-y^2) \geqslant 0$$

Comme $\Delta \geqslant 0$ notre équation admet deux solutions (éventuellement confondues si $\Delta = 0$) qui sont

$$x_1 = \frac{y^2-4+\sqrt{3y^2(4-y^2)}}{2(4-y^2)} \qquad x_2 = \frac{y^2-4-\sqrt{3y^2(4-y^2)}}{2(4-y^2)}$$

Simplifions un peu

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}}$$

Ces deux nombres réels sont deux solutions de l'équation $(4-y^2)x^2 + (4-y^2)x + (1-y^2) = 0$ mais ce ne sont pas forcement des antécédents de $f(x) = y$.

En effet, comme f est injective l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution, ainsi au moins un des deux nombres x_1 et x_2 n'est pas un antécédent de y.

On va donc calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ pour déterminer si ce sont bien des antécédents de y.

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \frac{2x_1+1}{\sqrt{x_1^2+x_1+1}}\\
&= \frac{2|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}\sqrt{x_1^2+x_1+1}}\\
&= \frac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{(4-y^2)x_1^2+(4-y^2)x_1+1-y^2+3}}
\end{aligned}$$

Or on sait que $(4-y^2)x_1^2+(4-y^2)x_1+1-y^2=0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \frac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{(4-y^2)x_1^2+(4-y^2)x_1+1-y^2+3}}\\
&= \frac{2|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\
&= |y|
\end{aligned}$$

De même

$$f(x_2) = -|y|$$

Ainsi, si $y>0$ alors x_1 est un antécédent de y par f et si $y<0$ alors x_2 est un antécédent de y par f. Si $y=0$ alors $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$ est un antécédent de y. f est donc surjective.

Comme f est surjective et injective elle est donc bijective, elle admet donc une réciproque f^{-1}. Le raisonnement fait pour montrer que f est surjective nous donne f^{-1} :

$$\begin{array}{rccl}
f^{-1} & : &]-2,2[& \to & \mathbb{R}\\
& & y & \mapsto & \begin{cases} -\dfrac{1}{2}+\dfrac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}} \text{ si } y>0\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{|y|\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}} \text{ si } y<0\\ -\dfrac{1}{2} \text{ si } y=0\end{cases}
\end{array}$$

Ce que l'on peut résumer en

$$\begin{array}{rccl}
f^{-1} & : &]-2,2[& \to & \mathbb{R}\\
& & y & \mapsto & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{y\sqrt{3}}{2\sqrt{4-y^2}}
\end{array}$$

Réponse de l'exercice 2.4

Montrons que f est injective.

Soit $u\in\mathbb{C}$ et $v\in\mathbb{C}$ tels que $f(u)=f(v)$. C'est-à-dire

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|v|}$$

Alors en particulier

$$\left|\frac{u}{1+|u|}\right| = \left|\frac{v}{1+|v|}\right|$$

D'où

$$\frac{|u|}{1+|u|} = \frac{|v|}{1+|v|}$$

Puis

$$|u| + |u| \times |v| = |v| + |u| \times |v|$$

On en tire donc $|u| = |v|$. Réinjectons cette information dans notre égalité

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|v|}$$

devient alors

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|u|}$$

Et donc $u = v$. f est ainsi injective.

Montrons maintenant que f n'est pas surjective, pour cela remarquons que, si $u \in \mathbb{C}$, alors $|f(u)| < 1$ (en effet $|u| < 1 + |u|$). Ainsi f ne peut pas être surjective car tous les nombres complexes de module supérieur ou égal à 1 n'ont pas d'antécédents.

Réponse de l'exercice 2.5

Montrons que f est injective. Pour cela, puisque f est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on va montrer que f est strictement monotone.

Calculons la dérivée de f.
Soit $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x \times (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2} > 0$$

Puisque, pour tout $x \in]-, 1, [$ $f'(x)$ est strictement positive, alors f est strictement croissante et donc est injective.

Montrons maintenant que f est surjective.
Soit $y \in \mathbb{R}$, déterminons $x \in]-1, 1[$ tel que $f(x) = y$.

L'équation $f(x) = y$ s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{1-x^2} = y \\ \Rightarrow \quad & 2x = y - yx^2 \\ \Rightarrow \quad & yx^2 + 2x - y = 0 \end{aligned}$$

Si $y = 0$ cette équation admet comme solution $\frac{y}{2} = 0$, si $y \neq 0$ il nous faut calculer le discriminant.

On a $\Delta = 4 + 4y^2 > 0$. Ainsi notre équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$$

Par contre ces solutions sont-elles dans $]-1, 1[$? Vérifions qu'au moins l'une des deux l'est.

— Premier cas : $y > 0$ Dans ce cas on a $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = y$, d'où

$$\frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y} \leqslant \frac{-1-y}{y} < -1$$

$\frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ ne peut donc pas convenir comme antécédent de y.

— Second cas : $y < 0$ Dans ce cas on a toujours $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = -y$, d'où

$$-1 - \sqrt{1+y^2} < -1 + y$$

Puis (rappelons que, comme $y < 0$, $\dfrac{-1}{y} > 0$ et diviser par y change le sens des inégalités)

$$\frac{-1-\sqrt{1+y^2}y}{>}\frac{-1+y}{y} > 1$$

La encore $\dfrac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ ne peut donc pas convenir comme antécédent de y.

Qu'en est-il de $\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$?

— Si $y > 0$ alors $1 < \sqrt{1+y^2} < \sqrt{1+2y+y^2} = 1+y$ D'où

$$\frac{-1+1}{y} < \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} < \frac{-1+1+y}{y}$$

C'est-à-dire

$$0 < \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} < 1$$

$\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$ est donc bien dans $]-1,1[$ et convient comme antécédent de y.

— Si $y < 0$ alors $1 < \sqrt{1+y^2} < \sqrt{1-2y+y^2} = 1-y$ D'où

$$\frac{-1+1}{y} > \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} > \frac{-1+1-y}{y}$$

C'est-à-dire

$$0 > \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} > -1$$

$\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$ est donc bien dans $]-1,1[$ et convient comme antécédent de y.

En conclusion, dans tous les cas y admet un antécédent dans $]-1,1[$. f est donc surjective.

Comme f est à la fois surjective et injective elle est bijective et admet donc une unique réciproque. Cette réciproque on l'a en fait déjà trouvée, il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rcll} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & & y & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ \dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse de l'exercice 2.6

1. s est surjective.
   En effet soit $z \in \mathbb{R}$, montrons que z admet au moins un antécédent par s.
   Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. De même il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = 0$. On a alors
   $$s(x,y) = f(x) + g(y) = z + 0 = z$$
   (x,y) est donc bien un antécédent de z par s. s est bien surjective.

2. s n'est pas injective.
   Par exemple prenons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, f et g sont bien deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, dans ce cas s n'est pas injective car, par exemple $s(1,2) = s(2,1)$.
3. p est surjective
   En effet soit $z \in \mathbb{R}$, montrons que z admet au moins un antécédent par p.
   Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. De même il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = 1$. On a alors
   $$p(x,y) = f(x)g(y) = z \times 1 = z$$
   (x,y) est donc bien un antécédent de z par p. p est bien surjective.
4. p n'est pas injective
   Par exemple prenons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, f et g sont bien deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, dans ce cas p n'est pas injective car, par exemple $p(1,2) = p(2,1)$.

Réponse de l'exercice 2.7

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$. On va montrer que f est injective et non surjective.

Montrons d'abord que f est injective. Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad y = \pi - x + 2k\pi$$

D'où

$$y - x = 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad y + x = \pi + 2k\pi$$

On sait x et y sont deux nombres rationnels, donc $x + y$ et $x - y$ sont également rationnels.

Or $2k\pi$ n'est un nombre rationnel que quand $k = 0$ et $\pi + 2k\pi$ n'est jamais un nombre rationnel.
On en déduit donc que, si $f(x) = f(y)$, alors $y = x + 2 \times 0 \times \pi$, c'est-à-dire $x = y$. f est donc injective.

Montrons maintenant que f n'est pas surjective. Pour cela on va prouver que 1 n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que 1 admet un antécédent $x \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{pi}{2} + 2k\pi$ et donc $\pi = \frac{2x}{1+4k}$. Or $x \in \mathbb{Q}$ et donc $\frac{2x}{1+4k} \in \mathbb{Q}$. Ainsi π est un nombre rationnel, ce qui est absurde.
En conclusion 1 n'admet pas d'antécédent par f, f n'est pas surjective.

Réponse de l'exercice 2.8

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective, montrons g est surjective.

   Soit $y \in G$, montrons que y admet un antécédent par g.
   Par hypothèse $g \circ f$ est surjective, il existe donc $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$, c'est-à-dire $g(f(x) = y$.
   $f(x)$ est alors un antécédent de y par g. g est ainsi bien surjective.

2. On suppose que $g \circ f$ est injective, montrons que f est injective.
   Soit $(x,y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $g(f(x) = g(f(y)$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. On sait que $g \circ f$ est injective, on a donc $x = y$.
   Ainsi f est injective.

3. Supposons que $g \circ f$ est surjective et que g est injective, montrons f est surjective.
   D'après la question 1., comme $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Puisque g est également injective par hypothèse on en déduit que g est bijective. Soit g^{-1} sa réciproque.

   Soit $y \in F$, montrons que y admet un antécédent par f. Notons $z = g(y)$, comme $g \circ f$ est surjective alors z admet un antécédent par $g \circ f$, il existe donc $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.
   Cet élément x est un bon candidat pour être l'antécédent de y par f, vérifions que c'est bien le cas.
   On a $g \circ f(x)) = z = g(y)$, on compose par g^{-1} et on obtient

   $$g^{-1} \circ g \circ f(x) = g^{-1} \circ g(y)$$

   D'où

   $$f(x) = y$$

   Ainsi f est bien surjective.

4. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective, montrons que g est injective.
   D'après la question 2., comme $g \circ f$ est injective alors f est injective. Puisque f est également surjective par hypothèse on en déduit que f est bijective. Soit f^{-1} sa réciproque.

   Soit $(x, y) \in F^2$, on suppose que $g(x) = g(y)$, montrons qu'alors $x = y$.
   Comme f est bijective on peut écrire $x = f \circ f^{-1}(x)$ et $y = f \circ f^{-1}(y)$. D'où

   $$g \circ \circ f^{-1}(x) = g \circ \circ f^{-1}(y)$$

   C'est-à-dire

   $$g \circ f(f^{-1}(x)) = g \circ f(f^{-1}(y))$$

   Comme $g \circ f$ est injective on en tire alors $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$ puis, en composant par f, $x = y$. g est donc bien injective

---

Réponse de l'exercice 2.9

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (u + v, uv) \end{array}$.

1. f n'est pas injective. En effet il suffit de remarquer que, par exemple $f(0, 1) = f(1, 0)$.

2. Montrons que f n'est pas surjective, Il n'est pas forcément évident à première vue que f n'est pas surjective, il nous faut donc travailler un peu.

   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(u, v) = (a, b)$.
   On a donc $\begin{cases} u + v = a \\ uv = b \end{cases}$. u et v sont donc les deux racines du polynôme $X^2 - aX + b$.

   Pour que ce polynôme admettent deux racines il faut et il suffit que son discriminant soit positif ou nul, c'est-à-dire $a^2 - 4b \geqslant 0$.
   On voit alors que, si $a^2 - 4b < 0$, alors (a, b) n'admet pas d'antécédent pas f. Par exemple $(0, 1)$ n'admet pas d'antécédent pas f. f n'est donc pas surjective.

3. Trouvons maintenant un antécédent de $(5,5)$. Remarquons d'abord que, comme $5^2 - 4 \times 5 = 5 > 0$, alors $(5,5)$ admet bien au moins un antécédent.
   Il nous faut donc résoudre l'équation $x^2 - 5x + 5 = 0$. On a alors $\Delta = 5 > 0$ d'où deux solutions
   $$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$
   Vérifions que $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ est bien un antécédent de $(5,5)$.
   $$\begin{aligned} f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) &= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2})\right) \\ &= \left(\frac{10}{2}, \frac{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \left(5, \frac{5^2-\sqrt{5}^2}{4}\right) \\ &= \left(5, \frac{25-5}{4}\right) \\ &= (5,5) \end{aligned}$$
   Ainsi $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ est bien un antécédent de $(5,5)$.

Réponse de l'exercice 2.10

Montrons que f est injective. Pour cela, puisque f est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on va montrer que f est strictement monotone.

Calculons la dérivée de f.
Soit $x \in]-1,1[$, on a
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x \times (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2} > 0$$
Puisque, pour tout $x \in]-,1,[$ $f'(x)$ est strictement positive, alors f est strictement croissante et donc est injective.

Montrons maintenant que f est surjective.
Soit $y \in \mathbb{R}$, déterminons $x \in]-1,1[$ tel que $f(x) = y$.

L'équation $f(x) = y$ s'écrit
$$\begin{aligned} & \frac{2x}{1-x^2} = y \\ \Rightarrow \quad & 2x = y - yx^2 \\ \Rightarrow \quad & yx^2 + 2x - y = 0 \end{aligned}$$
Si $y = 0$ cette équation admet comme solution $\frac{y}{2} = 0$, si $y \neq 0$ il nous faut calculer le discriminant.

On a $\Delta = 4 + 4y^2 > 0$. Ainsi notre équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont
$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$$
Par contre ces solutions sont-elles dans $]-1,1[$? Vérifions qu'au moins l'une des deux l'est.

— Premier cas : $y > 0$ Dans ce cas on a $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = y$, d'où

$$\frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y} \leqslant \frac{-1-y}{y} < -1$$

$\dfrac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ ne peut donc pas convenir comme antécédent de y.

— Second cas : $y < 0$ Dans ce cas on a toujours $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = -y$, d'où

$$-1-\sqrt{1+y^2} < -1+y$$

Puis (rappelons que, comme $y < 0$, $\dfrac{-1}{y} > 0$ et diviser par y change le sens des inégalités)

$$\frac{-1-\sqrt{1+y^2}y}{>}\frac{-1+y}{y} > 1$$

La encore $\dfrac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ ne peut donc pas convenir comme antécédent de y.

Qu'en est-il de $\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$?

— Si $y > 0$ alors $1 < \sqrt{1+y^2} < \sqrt{1+2y+y^2} = 1+y$ D'où

$$\frac{-1+1}{y} < \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} < \frac{-1+1+y}{y}$$

C'est-à-dire

$$0 < \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} < 1$$

$\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$ est donc bien dans $]-1,1[$ et convient comme antécédent de y.

— Si $y < 0$ alors $1 < \sqrt{1+y^2} < \sqrt{1-2y+y^2} = 1-y$ D'où

$$\frac{-1+1}{y} > \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} > \frac{-1+1-y}{y}$$

C'est-à-dire

$$0 > \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} > -1$$

$\dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$ est donc bien dans $]-1,1[$ et convient comme antécédent de y.

En conclusion, dans tous les cas y admet un antécédent dans $]-1,1[$. f est donc surjective.

Comme f est à la fois surjective et injective elle est bijective et admet donc une unique réciproque. Cette réciproque on l'a en fait déjà trouvée, il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \rightarrow &]-1,1[\\ & & y & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse de l'exercice 2.11

Calculons $\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1}$, pour cela on va se ramener au résultat connu

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{si } q \neq 1$$

Tout d'abord remarquons que, si $x = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1} = 0$.

Si $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{x} \\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} x^{2k} \\
&= \frac{1}{x}\left(-1+\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-1+\sum_{k=0}^{n} \left(x^2\right)^k\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x}(-1+n+1) \text{ si } x^2 = 1 \\ \frac{1}{x}\left(-1+\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}\right) \text{ si } x^2 \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{n}{x} \text{ si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ \frac{x-x^{2n+1}}{1-x^2} \text{ si } x^2 \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ n \text{ si } x = 1 \\ -n \text{ si } x = -1 \\ \frac{x-x^{2n+1}}{1-x^2} \text{ si } x \notin \{-1,0,1\} \end{cases}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$. On retrouve ici le résultat connu

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{si } q \neq 1$$

avec $q = -1$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k &= \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}(j-1)\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}j + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j}\\ &= -\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j}j + \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{j} - 1\\ &= -\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{j}j + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - 1\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k + \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{j}j = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - 1$$

C'est-à-dire

$$2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - 1$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - 1 - (-1)^{n+1}(n+1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-1)^{n+1} - 2 - (-1)^{n+1}2(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{-1+(-1)^{n+1}(1-2(n+1))}{4}\\ &= \frac{-1+(-1)^{n}(2n+1))}{4}\\ &= \begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair}\\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{aligned}$$

Une autre manière de trouver ce résultat est d'écrire

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \underbrace{-1+2}_{=1}\underbrace{-3+4}_{=1}\underbrace{-5+6}_{=1}+\dots+(-1)^n n$$

et de faire des regroupement de deux termes consécutifs, il faut par contre traiter séparément les cas n pair et n impair

Calculons $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{1}\right)\right) \quad \text{On a reconnu un produit télescopique} \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

De manière équivalente on a aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) \quad \text{On a reconnu une somme télescopique} \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 2.12

1. On a
$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

2. Il s'agit ici d'une somme télescopique, on a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \sum_{j=2}^{n+1} j^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \text{ On fait le changement d'indice } j = k+1 \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \text{ On fait le changement d'indice } k = j \text{ dans la première somme} \\
&= (n+1)^3 + \sum_{k=2}^{n} k^3 - \left(\sum_{k=2}^{n} k^3 + 1^3\right) \\
&= (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^3 \\
&= (n+1)^3 - 1
\end{aligned}$$

3. On va exploiter les résultats des deux premières questions, on a ainsi
$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right) = (n+1)^3 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^3 - 1
\end{aligned}$$

En passant tout du même coté on ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\
&= \frac{1}{3} \times \frac{2(n+1)^3 - 2 - 3n(n+1) - 2n}{2}\\
&= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 2 - 3n^2 - 3n - 2n}{6}\\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat vu en cours.

4. On a

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4\\
&= \sum_{j=2}^{n+1} j^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 \text{ On fait le changement d'indice } j = k+1 \text{ dans la première somme}\\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 \text{ On fait le changement d'indice } k = j \text{ dans la première somme}\\
&= (n+1)^4 + \sum_{k=2}^{n} k^4 - \left(\sum_{k=2}^{n} k^4 + 1^4\right)\\
&= (n+1)^4 - 1 + \sum_{k=2}^{n} k^4 - \sum_{k=2}^{n} k^4\\
&= (n+1)^4 - 1
\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 &= \sum_{k=1}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\big)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)\big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\big)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)\big((n+1)^3 - 2n^2 - 3n - 1\big)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)\big(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1\big)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)\big(n^3 + n^2\big)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Réponse de l'exercice 2.13

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u+v, uv) \end{array}$.

1. f n'est pas injective. En effet il suffit de remarquer que, par exemple $f(0,1) = f(1,0)$.

2. Montrons que f n'est pas surjective, Il n'est pas forcément évident à première vue que f n'est pas surjective, il nous faut donc travailler un peu.

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, supposons qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(u,v) = (a,b)$.
   On a donc $\begin{cases} u+v = a \\ uv = b \end{cases}$
   u et v sont donc les deux racines du polynôme $X^2 - aX + b$ (ce fait, éventuellement abordé en Terminale, sera revu lors du cours sur les nombres réels et complexes)

   Pour que ce polynôme admette deux racines il faut et il suffit que son discriminant soit positif ou nul, c'est-à-dire $a^2 - 4b \geqslant 0$.
   On voit alors que, si $a^2 - 4b < 0$, alors (a,b) n'admet pas d'antécédent pas f. Par exemple $(0,1)$ n'admet pas d'antécédent pas f. f n'est donc pas surjective.

3. Trouvons maintenant un antécédent de $(5,5)$. Remarquons d'abord que, comme $5^2 - 4 \times 5 = 5 > 0$, alors $(5,5)$ admet bien au moins un antécédent.
   Il nous faut donc résoudre l'équation $x^2 - 5x + 5 = 0$. On a alors $\Delta = 5 > 0$ d'où deux solutions

   $$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

   Vérifions que $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ est bien un antécédent de $(5,5)$.

   $$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2})\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{10}{2}, \frac{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{4}\right) \\
&= \left(5, \frac{5^2-\sqrt{5}^2}{4}\right) \\
&= \left(5, \frac{25-5}{4}\right) \\
&= (5,5)
\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ est bien un antécédent de $(5,5)$.

Réponse de l'exercice 2.14

Montrons que f est injective.

Soit $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$ tels que $f(u) = f(v)$. C'est-à-dire

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|v|}$$

Alors en particulier

$$\left|\frac{u}{1+|u|}\right| = \left|\frac{v}{1+|v|}\right|$$

D'où

$$\frac{|u|}{1+|u|} = \frac{|v|}{1+|v|}$$

Puis

$$|u| + |u| \times |v| = |v| + |u| \times |v|$$

On en tire donc $|u| = |v|$. Réinjectons cette information dans notre égalité

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|v|}$$

devient alors

$$\frac{u}{1+|u|} = \frac{v}{1+|u|}$$

Et donc $u = v$. f est ainsi injective.

Montrons maintenant que f n'est pas surjective, pour cela remarquons que, si $u \in \mathbb{C}$, alors $|f(u)| < 1$ (en effet $|u| < 1 + |u|$). Ainsi f ne peut pas être surjective car tous les nombres complexes de module supérieur ou égal à 1 n'ont pas d'antécédents.

Réponse de l'exercice 2.15

1. s est surjective.

   En effet soit $z \in \mathbb{R}$, montrons que z admet au moins un antécédent par s.

   Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. De même il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = 0$. On a alors

   $$s(x,y) = f(x) + g(y) = z + 0 = z$$

   (x,y) est donc bien un antécédent de z par s. s est bien surjective.

2. s n'est pas injective.
   Par exemple prenons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, f et g sont bien deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, dans ce cas s n'est pas injective car, par exemple $s(1,2) = s(2,1)$.
3. p est surjective
   En effet soit $z \in \mathbb{R}$, montrons que z admet au moins un antécédent par p.
   Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. De même il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = 1$. On a alors
   $$p(x,y) = f(x)g(y) = z \times 1 = z$$
   (x,y) est donc bien un antécédent de z par p. p est bien surjective.
4. p n'est pas injective
   Par exemple prenons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, f et g sont bien deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, dans ce cas p n'est pas injective car, par exemple $p(1,2) = p(2,1)$.

Réponse de l'exercice 2.16

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$. On va montrer que f est injective et non surjective.

Montrons d'abord que f est injective. Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad y = \pi - x + 2k\pi$$

D'où

$$y - x = 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad y + x = \pi + 2k\pi$$

On sait x et y sont deux nombres rationnels, donc $x+y$ et $x-y$ sont également rationnels.

Or $2k\pi$ n'est un nombre rationnel que quand $k = 0$ et $\pi + 2k\pi$ n'est jamais un nombre rationnel.
On en déduit donc que, si $f(x) = f(y)$, alors $y = x + 2 \times 0 \times \pi$, c'est-à-dire $x = y$. f est donc injective.

Montrons maintenant que f n'est pas surjective. Pour cela on va prouver que 1 n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que 1 admet un antécédent $x \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{pi}{2} + 2k\pi$ et donc $\pi = \frac{2x}{1+4k}$. Or $x \in \mathbb{Q}$ et donc $\frac{2x}{1+4k} \in \mathbb{Q}$. Ainsi π est un nombre rationnel, ce qui est absurde.
En conclusion 1 n'admet pas d'antécédent par f, f n'est pas surjective.

Réponse de l'exercice 2.17

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective, montrons g est surjective.

   Soit $y \in G$, montrons que y admet un antécédent par g.
   Par hypothèse $g \circ f$ est surjective, il existe donc $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$, c'est-à-dire $g(f(x) = y$.
   $f(x)$ est alors un antécédent de y par g. g est ainsi bien surjective.

2. On suppose que $g \circ f$ est injective, montrons que f est injective.
   Soit $(x,y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $g(f(x) = g(f(y)$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. On sait que $g \circ f$ est injective, on a donc $x = y$.
   Ainsi f est injective.

3. Supposons que $g \circ f$ est surjective et que g est injective, montrons f est surjective.
D'après la question 1., comme $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Puisque g est également injective par hypothèse on en déduit que g est bijective. Soit g^{-1} sa réciproque.

   Soit $y \in F$, montrons que y admet un antécédent par f. Notons $z = g(y)$, comme $g \circ f$ est surjective alors z admet un antécédent par $g \circ f$, il existe donc $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.
Cet élément x est un bon candidat pour être l'antécédent de y par f, vérifions que c'est bien le cas.
On a $g \circ f(x)) = z = g(y)$, on compose par g^{-1} et on obtient
$$g^{-1} \circ g \circ f(x) = g^{-1} \circ g(y)$$
D'où
$$f(x) = y$$
Ainsi f est bien surjective.

4. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective, montrons que g est injective.
D'après la question 2., comme $g \circ f$ est injective alors f est injective. Puisque f est également surjective par hypothèse on en déduit que f est bijective. Soit f^{-1} sa réciproque.

   Soit $(x, y) \in F^2$, on suppose que $g(x) = g(y)$, montrons qu'alors $x = y$.
Comme f est bijective on peut écrire $x = f \circ f^{-1}(x)$ et $y = f \circ f^{-1}(y)$. D'où
$$g \circ \circ f^{-1}(x) = g \circ \circ f^{-1}(y)$$
C'est-à-dire
$$g \circ f(f^{-1}(x)) = g \circ f(f^{-1}(y))$$
Comme $g \circ f$ est injective on en tire alors $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$ puis, en composant par f, $x = y$. g est donc bien injective

---

Réponse de l'exercice 2.18

1. On suppose ici que f est injective, c'est-à-dire
$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
Soit $x \in E$, on a alors $f \circ f(x) = f(x)$, c'est-à-dire $f(f(x)) = f(x)$. Par injectivité de f on a ainsi $f(x) = x$.
Pour tout $x \in E$, on a donc $f(x) = x$, c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose ici que f est surjective, c'est-à-dire
$$\forall y \in E, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x)$$
Soit $y \in E$ et soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$.
Pour tout $y \in E$, on a donc $f(y) = y$, c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Soit $f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. On a alors $f \circ f = f$ mais $f \neq Id_{\mathbb{R}}$.

Chapitre 3

Méthodes de calcul, Dénombrements

Exercices

Exercice 3.1

Soit A, B, C trois ensembles finis tels que

$$\mathrm{Card}(A) = 14 \qquad \mathrm{Card}(B) = 18 \qquad \mathrm{Card}(C) = 20$$

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = 26 \qquad \mathrm{Card}(A \cup C) = 27 \qquad \mathrm{Card}(B \cup C) = 30$$
$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 35$$

Déterminer $\mathrm{Card}(A \cap B \cap C)$.

Exercice 3.2

Une urne contient 20 boules, numérotées de 1 à 20.

1. On tire successivement et sans remise 8 boules de cette urne (deux tirages obtenant les mêmes boules mais dans un ordre différent seront considérés comme deux tirages différents).
   - Combien y a t-il de tirages possibles ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par la boule 1 ?
   - Combien y a t-il de tirages finissant par la boule 20 ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par la boule 1 et finissant par la boule 20 ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par 20, 19, 18, 17 ?
   - Combien y a t-il de tirages ne comportant que des boules paires ?
   - Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ?
   - Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ?
2. Mêmes questions pour un tirage avec remise.

Exercice 3.3

Calculer les somme suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{4}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^{n-k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}2^{k-1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}3^k2^{-k}$

Exercice 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$$

Calculer $A+B$ et $A-B$. En déduire A et B

Exercice 3.5

Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$$

Exercice 3.6

Un enfant dispose de 7 crayons de couleurs différentes et doit colorier un dessin composé de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin ?
2. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin de sorte que chaque zone ait une couleur différente des autres ?

Exercice 3.7

Pour sortir, Monsieur Dupont choisit une paire de chaussures (noires ou marron), un pantalon (bleu, beige, ou rouge), une veste (en velours ou en toile) et un chapeau (de feutre ou en cuir).

1. Combien de tenues différentes monsieur Dupont peut-il choisir ?
2. Quand Monsieur Dupont sort avec Madame Dupont, il est exclu qu'il porte les chaussures marrons avec le pantalon rouge. Combien de tenues différentes Monsieur peut-il alors porter ?

Exercice 3.8

1. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes côte à côte sur une rangée de huit chaises ?
2. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes autour d'une table ronde en ne s'occupant que de leur position relative ?
3. Combien y a t-il de façons de placer quatre hommes et quatre femmes autour d'une table ronde en respectant l'alternance 1 homme-1 femme, et en ne s'occupant que de leur position relative ?

Exercice 3.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation : $x + y + z = n$

Exercice 3.10

On appelle anagramme d'un mot tout mot (qu'il ait un sens ou non) formé avec les mêmes lettres.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du prénom « Martin » ?
2. Combien y a t-il d'anagrammes du prénom « Arnaud » ?
3. Combien y a t-il d'anagrammes du mot « Mississippi » ?

Exercice 3.11

Soit n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n-2$. Montrer que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

Exercice 3.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$C = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad D = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Calculer C et D

Exercice 3.13

Montrer que

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$$

Exercice 3.14

Montrer que, pour tous réels positifs a et b :

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 3.15

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les nombres suivants :

$$(1+\sqrt{5})^4 \qquad (\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 \qquad (2+i)^7 \qquad \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

Exercice 3.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'égalité $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 1$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$

Exercice 3.17

Calculer les sommes doubles suivantes

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} |i-j|$$

Réponses

Réponse de l'exercice 3.1

On a

$$\mathrm{Card}(A\cup B\cup C) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cap B)-\mathrm{Card}(A\cap C)-\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C)$$

$$\mathrm{Card}(A\cup B) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$$
$$\mathrm{Card}(A\cup C) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cap C)$$
$$\mathrm{Card}(B\cup C) = \mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(B\cap C)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A\cap B\cap C) &= \mathrm{Card}(A\cup B\cup C)-\mathrm{Card}(A)-\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(C)\\
&\qquad +\mathrm{Card}(A\cap B)+\mathrm{Card}(A\cap C)+\mathrm{Card}(B\cap C)\\
&= \mathrm{Card}(A\cup B\cup C)-\mathrm{Card}(A)-\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(C)+\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cup B)\\
&\qquad +\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cup C)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(B\cup C)\\
&= \mathrm{Card}(A\cup B\cup C)+\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cup B)-\mathrm{Card}(A\cup C)-\mathrm{Card}(B\cup C)\\
&= 35+14+18+20-26-27-30\\
&= 4
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 3.2

1. Dans un premier temps il s'agit de tirages sans remise, on ne peut donc pas tirer deux fois la même boule. Un tirage correspond donc à une 8-liste sans répétition.
   - Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste sans répétition dans un ensemble à 20 éléments, le résultat est donc $\dfrac{20!}{(20-8)!} = \dfrac{20!}{12!}$
   - La première boule étant fixé, un tirage correspond à la liste sans répétition des 7 autres boules dans un ensemble à 19 éléments, soit $\dfrac{19!}{12!}$
   - C'est exactement la même situation que dans la question précédente, le résultat est le même $\dfrac{19!}{12!}$
   - La première et la dernière boules étant fixés, un tirage correspond à la liste sans répétition des 6 autres boules dans un ensemble à 18 éléments, soit $\dfrac{18!}{12!}$
   - Ici les 4 premières boules sont fixées, un tirage correspond à la liste sans répétition des 4 autres boules dans un ensemble à 16 éléments, soit $\dfrac{16!}{12!}$

— Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste sans répétition dans l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 20, ensemble qui contient 10 éléments. Le résultat est donc $\dfrac{10!}{(10-8)!} = \dfrac{10!}{2!}$

— Cette question est plutôt compliquée, on va plutôt répondre à la question « Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ? »d'abord puis en déduire le résultat à la question « Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ? ». Compter les tirages ne comportant pas la boule 1 est simple, il s'agit simplement de compter les 8-liste sans répétition dans un ensemble à 19 éléments, le résultat est donc $\dfrac{19!}{(19-8)!} = \dfrac{19!}{11!}$. Ensuite le nombre de tirages comportant la boule 1 se calcule en comptant le nombre total de tirages possibles moins ceux qui ne contiennent pas la boule 1, soit

$$\frac{20!}{12!} - \frac{19!}{11!} = \frac{20! - 12 \times 19!}{12!} = \frac{20 \times 19! - 12 \times 19!}{12!} = 8\frac{19!}{12!}$$

2. Dans un second temps il s'agit de tirages avec remise, on peut alors tirer deux fois la même boule. Un tirage correspond donc à une 8-liste d'éléments d'un ensemble à 20 éléments ou de manière équivalente, à une application d'un ensemble à 8 éléments dans un ensemble à 20 éléments.
   — Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste d'éléments d'un ensemble à 20 éléments, le résultat est donc 20^8
   — La première boule étant fixé, un tirage correspond à la liste des 7 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^7
   — C'est exactement la même situation que dans la question précédente, le résultat est le même 20^7
   — La première et la dernière boules étant fixés, un tirage correspond à la liste des 6 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^6
   — Ici les 4 premières boules sont fixées, un tirage correspond à la liste des 4 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^4
   — Il s'agit ici simplement de compter les 8-listes dans l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 20, ensemble qui contient 10 éléments. Le résultat est donc 10^8
   — Cette question est plutôt compliquée, on va plutôt répondre à la question « Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ? »d'abord puis en déduire le résultat à la question « Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ? ». Compter les tirages ne comportant pas la boule 1 est simple, il s'agit simplement de compter les 8-liste sans répétition dans un ensemble à 19 éléments, le résultat est donc 19^8. Ensuite le nombre de tirages comportant la boule 1 se calcule en comptant le nombre total de tirages possibles moins ceux qui ne contiennent pas la boule 1, soit $20^8 - 19^8$.

Réponse de l'exercice 3.3

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k}$

   Si $n \geqslant 4$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} + \sum_{k=5}^{n} \binom{4}{k} = 2^4 + 0 = 16$$

   Sinon alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 11 & \text{si } n = 2 \\ 15 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\binom{n}{0}-\binom{n}{0}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}\\ &= 2^n-1\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1} &= \sum_{i=-1}^{n-1}\binom{n}{i} \qquad \text{en posant } i=k-1\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}+\binom{n}{-1}-\binom{n}{n}\\ &= 2^n+0-1\\ &= 2^n-1\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^{n-k}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^{n-k}1^k\\ &= (-3+1)^n\\ &= (-2)^n\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}2^{k-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}2^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}2^{k-1}+\binom{n-1}{n}2^{n-1}-\binom{0}{n-1}2^{0-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{2^k}{2}+0-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}2^k1^{n-1-k}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{3^{n-1}-1}{2}\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}3^k2^{-k}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}3^k2^{-k} = \sum_{i=-1}^{n-1}\binom{n}{i}3^{i+1}2^{-i-1} \qquad \text{en posant } i=k-1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\sum_{i=-1}^{n-1}\binom{n}{i}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} \\
&= \frac{3}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} + \binom{n}{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \binom{n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{3(5^n - 3^n)}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Réponse de l'exercice 3.4

On a

$$
\begin{aligned}
A + B &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \\
&= 2^n
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
A - B &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} \\
&= (-1+1)^n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On a $A - B = 0$. Ainsi $A = B = \dfrac{A+B}{2} = 2^{n-1}$

Réponse de l'exercice 3.5

Pour $k \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on sait que $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, d'où $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k &= \binom{n}{0}0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \qquad \text{on fait le changement d'indice } j = k-1 \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j 1^{n-1-j} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Pour $k \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on sait que $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, d'où, pour $k \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} \qquad \text{on a fait le changement d'indice } j = k+1 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(-\binom{n+1}{0} + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\right) \\
&= \frac{-1+2^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 3.6

1. Colorier le dessin revient à associer une couleur à chaque zone, c'est-à-dire à se donner une application de l'ensemble des zones dans l'ensemble des couleurs. On sait qu'il y a alors 7^5 applications d'un ensemble à 5 éléments dans un ensemble à 7 éléments, c'est-à-dire 7^5 manières de colorier le dessin.
2. On veut ici se donner une liste de 5 couleurs sans répéter deux fois la même couleur, c'est-à-dire une 5-liste sans répétition dans un ensemble à 7 éléments. D'après le cours on sait qu'il y a alors $\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!}$ possibilités.

Réponse de l'exercice 3.7

1. Un tenue correspond au choix successifs d'une paire de chaussures (2 choix), d'un pantalon (3 choix), d'une veste (2 choix) et d'un chapeau (2 choix), soit $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ choix.
2. On doit ici exclure les tenues qui comportent les chaussures marron avec le pantalon rouge, soit 4 tenues, il reste donc 20 tenues possibles.

Réponse de l'exercice 3.8

1. Un placement correspond à la liste successives des personnes assises sur chaque chaise, il s'agit évidemment de listes sans répétition, il y a donc $\dfrac{8!}{(8-8)!} = 8!$ placements possibles.
2. On ne s'occupe ici que de la position relative des personnes, « faire tourner »la table ne change alors pas le placement. Si on appelle alors Mr A la première personne on peut supposer quitte à « faire tourner la table »qu'il est toujours assis à la place la plus au Nord, on a ensuite 7 choix pour son voisin de droite, puis 6 choix pour la personne à droite dudit voisin, etc. Ce qui nous fait $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$ placements possibles.
3. La encore on peut « faire tourner la table », on va alors toujours supposer que Mr A est à la place la plus au nord, on a ensuite 4 choix pour sa voisine de droite puis 3 pour le voisin de droite de ladite voisine, en continuant à remplir la table on a successivement 3 choix puis 2 choix, 2 choix et 1 choix. Au final on a $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ placements possibles.

Réponse de l'exercice 3.9

On va compter le nombre de choix possibles pour le triplet (x, y, z). Si cela vous convient mieux, il ne faut pas hésiter à tracer un arbre pour représenter les choix possibles pour x, y et z et compter les branches. On peut dès le début qu'un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z = n$ est en fait le triplet $(x, y, n - x - y)$, on n'a de latitude que dans le choix de x et y.

Combien de choix pour x ? A priori on peut prendre n'importe quel nombre entier entre 0 et n (car $x \in \mathbb{N}$ et $n - x = y + z \in \mathbb{N}$) ce qui nous fait $(n+1)$ choix. Un fois x choisi, pour y le nombre de choix possibles dépend de x, on a en effet toujours $y \geqslant 0$ et $y \leqslant n - x$, ce qui nous fait $(n + 1 - x)$ choix. Enfin, une fois x et y choisis on n'a plus qu'un seul pour z : $n - x - y$.

Au total on a alors

$$\sum_{x=0}^{n}(n+1-x) = \sum_{x=0}^{n}(n+1) - \sum_{x=0}^{n} x = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2-n)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

solutions à cette équation.

Réponse de l'exercice 3.10

1. Il s'agit de compter les listes sans répétition de 6 éléments (les places possibles des lettres) dans un ensemble à 6 éléments (les lettres du mot Martin). Il y en a donc 6!.
2. On va procéder en deux temps, tout d'abord on va distinguer les deux a de Arnaud, on écrit donc a_1rna_2ud. Maintenant toutes les lettres sont différentes il y a donc 6! anagrammes. Par contre si on ne distingue plus les a il y a des anagramme que l'on a compté deux fois, par exemple na_1drua_2 et na_2dra_1. En pratique on a compté chaque anagramme exactement deux fois (le nombre de manière qu'il y a de permuter les deux a). Il y a donc $\dfrac{6!}{2}$ anagramme du prénom « Arnaud ».

3. On peut procéder de la même manière que pour « Arnaud », on considère que toutes les lettres sont différentes, ce qui nous fait 11! anagrammes et on divise ensuite par le nombre de manière de permuter les i, les s et les p. Ainsi on a $\dfrac{11!}{4! \times 4! \times 2!}$ anagrammes du mot « Mississippi ».

Réponse de l'exercice 3.11

On va appliquer la formule du triangle de Pascal plusieurs fois. Tout d'abord on a

$$\binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-1}{p-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} &= \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} \\ &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat voulu.

Réponse de l'exercice 3.12

On a

$$\begin{aligned}C + D &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\ &= (2+1)^n \\ &= 3^n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C - D &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1) \times 2^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 2^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 2^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} \\
&= (-2+1)^n \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

Ainsi $C + D = 3^n$ et $C - D = (-1)^n$, d'où

$$C = \frac{3^n + (-1)^n}{2} \qquad D = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$$

Réponse de l'exercice 3.13

Notons $x = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$. Alors

$$\begin{aligned}
x^3 &= \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right)^3 \\
&= \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}^3 + 3\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}^2 \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}^2 + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}^3 \\
&= 45 + 29\sqrt{2} + 3\left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right) + 45 - 29\sqrt{2} \\
&= 90 + 3x\sqrt[3]{(45 + 29\sqrt{2})(45 - 29\sqrt{2})} \\
&= 90 + 3x\sqrt[3]{45^2 - 29^2\sqrt{2}^2} \\
&= 90 + 3x\sqrt[3]{2025 - 1682} \\
&= 90 + 3x\sqrt[3]{323} \\
&= 90 + 21x
\end{aligned}$$

Ainsi $x^3 - 21x - 90 = 0$. On connait le résultat : $x = 6$, on va donc factoriser par $x - 6$ dans cette équation. On a

$$x^3 - 21x - 90 = (x-6)(x^2 + 6x + 15)$$

On a donc

$$(x-6)(x^2 + 6x + 15) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$x = 6 \text{ ou } x \text{ est une racine réelle du polynôme } x^2 + 6x + 15.$$

Or le discriminant associé à l'équation $x^2 + 6x + 15 = 0$ est $\Delta = 36 - 60 < 0$. Ainsi le polynôme $x^2 + 6x + 15$ n'admet pas de racines réelles.

La seule possibilité est donc $x = 6$.

Réponse de l'exercice 3.14

On a

$$\left(\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right) + 2\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(b^2 + b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 2\left(\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)\left(b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\\
&= a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 2\left(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\\
&= a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 2\left(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\\
&= a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^2 + b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\\
&= \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3\\
&= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3
\end{aligned}$$

Ainsi, si on note

$$u = \left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad v = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Alors on a $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ et $u^2 = v^2$. On en déduit donc que $u = v$, ce qui est bien le résultat voulu.

Réponse de l'exercice 3.15

On a

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{5})^4 &= \binom{4}{0}1^4\sqrt{5}^0 + \binom{4}{1}1^3\sqrt{5}^1 + \binom{4}{2}1^2\sqrt{5}^2 + \binom{4}{3}1^1\sqrt{5}^3 + \binom{4}{4}1^0\sqrt{5}^4\\
&= 1 + 4\sqrt{5} + 6\times 5 + 4\times 5\sqrt{5} + 25\\
&= 56 + 24\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 &= \sqrt{2}^5 + 5\sqrt{2}^4\sqrt{3} + 10\sqrt{2}^3\sqrt{3}^2 + 10\sqrt{2}^2\sqrt{3}^2 + 5\sqrt{2}\sqrt{3}^4 + \sqrt{3}^5\\
&= 4\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 60\sqrt{2} + 60\sqrt{3} + 45\sqrt{2} + 9\sqrt{3}\\
&= 109\sqrt{2} + 89\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2+i)^7 &= 2^7 + 7\times 2^6 i + 21\times 2^5 i^2 + 35\times 2^4 i^3 + 35\times 2^3 i^4 + 21\times 2^2 i^5 + 7\times 2i^6 + i^7\\
&= 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i\\
&= -278 - 29i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \frac{1}{2^6}\left(1 + 6i\sqrt{3} + 15(i\sqrt{3})^2 + 20(i\sqrt{3})^3 + 15(i\sqrt{3})^4 + 6(i\sqrt{3})^5 + (i\sqrt{3})^6\right)\\
&= \frac{1}{2^6}\left(1 + 6i\sqrt{3} - 45 - 60i\sqrt{3} + 135 + 54i\sqrt{3} - 27\right)\\
&= \frac{1}{64}(1 - 45 + 135 - 27)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 3.16

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right)2^k\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k\\ &\quad \text{On fait le changement d'indice } j=k-i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} 2^{j+i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^i \sum_{j=0}^{n-i} 2^j\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^i(2^{n+1-i}-1)\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1}-2^i\\ &= n2^{n+1}-\sum_{i=1}^{n} 2^i\\ &= n2^{n+1}-2(2^n-1)\\ &= (n-1)2^{n+1}+2\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 3.17

Ici on va faire ce qu'on appelle des sommations par paquets, c'est-à-dire que l'on va couper des sommes en plusieurs sommes plus facile à calculer.

Pour la première somme on remarque que $\min(i,j)=j$ si $j \leqslant i$ et i sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i(i+1+2n-2i)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(-i^2 + (2n+1)i \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + (2n+1) \sum_{i=1}^{n} i \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1)\frac{n(n+1}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme on remarque que $\max(i,j) = i$ si $j \leqslant i$ et j sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j \right) \\
&\quad \text{on fait le changement d'indice } k = j - i \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + \sum_{k=1}^{n-i} k + i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + \sum_{k=1}^{n-i} k + (n-i)i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + \frac{(n-i)(n+1-i)}{2} + (n-i)i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i^2 + i^2 - in - i(n+1) + n(n+1) + 2(n-i)i}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - i + n(n+1) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i + n^2(n+1) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1}{2} + n^2(n+1) \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1-3+6n}{6} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{8n-2}{6}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Pour la troisième somme on remarque que $|i-j| = i-j$ si $j \leqslant i$ et $j-i$ sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} |i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}|i-j| + \sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) \\
&\quad \text{on fait le changement d'indice } k=j-i \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2}\sum_{k=1}^{n-i} k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n+1-i)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1} n\left(2i^2 - i^2 - i + i^2 - ni - (n+1)i + n(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1} n\left(2i^2 - (2n+2)i + n(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=1} ni^2 - (2n+2)\sum_{i=1} ni + n(n+1)\sum_{i=1} n1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+2)\frac{n(n+1}{2} + n^2(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)^2 + 3n^2(n+1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3n-3+3n) \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Nombres réels et complexes, Trigonométrie

Exercices

Exercice 4.1

Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et, pour chaque propriété, donner deux ensembles qui la vérifient.

- 0 est un majorant de E.
- 1 n'est pas un minorant de E.
- π est le maximum de E.
- E est majoré.
- E n'est pas minoré.
- E est borné.
- E n'est pas borné.

Exercice 4.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $x^2 - 8x + 11 = 4$

(E_2) $|x-1| = 2x - 3$

(E_3) $|x-5| = |4-x^2|$

(E_4) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$

(E_5) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

Exercice 4.3

Pour chacune des sous-parties de $\mathbb{R}$ suivantes dire

- si elle est majorée. Si c'est le cas préciser sa borne supérieure et étudier l'existence éventuelle d'un maximum.
- si elle est minorée. Si c'est le cas préciser sa borne inférieure et étudier l'existence éventuelle d'un minimum.

$$A =]2, e^2[\cup \{10\} \quad B = \left\{ k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \ , \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n^2} \quad n \geqslant 3 \right\} \quad D = \mathbb{Q}_+^* \quad E = \left\{ x \in \mathbb{R} \ , \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$F = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2+1} \ , \ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\} \qquad G = \left\{ \frac{\cos(n)}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 4.4

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

Exercice 4.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(I_1) $x^2 - x > 2$
(I_2) $\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{4x-1}$
(I_3) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$

Exercice 4.6

Tracer les graphes des fonctions suivantes sur $[0,2]$

$$f : \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x^2+1 \rfloor \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor^2+1 \end{array}$$

Exercice 4.7

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad u = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} \qquad v = \frac{1+2i}{1-2i} \qquad w = \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$$

Exercice 4.8

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante, appelée identité du parallélogramme :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

L'interpréter géométriquement.

Exercice 4.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la partie entière de $\dfrac{n^3}{n+1}$

Exercice 4.10

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 4.11

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, le nombre complexe $(2+3i)^n + (2-3i)^n$ est un nombre entier.

Exercice 4.12

Soit $z \in \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire sur z et suffisante pour que

$$|z+i| = |z-i|$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 4.13

Résoudre le système suivant d'inconnues $(z, \omega) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{cases} iz - 2\omega = -4 + 3i \\ 2\overline{\omega} + \overline{z} = 3 \end{cases}$$

Exercice 4.14

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = \dfrac{1}{1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

Exercice 4.15

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et soit φ la détermination principale de l'argument de z. Déterminer le module et un argument de $Z = 1 + z + z^2$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $Z = z^2 + z + 1$ soit réel, puis une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit imaginaire pur

Exercice 4.16

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ avec $|z| = 1$. Montrer que $i\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.17

Soient a et b deux complexes tels que $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leq 1$. Montrer que

$$|a+b| \leq \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad |a-b| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 4.18

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$$

Exercice 4.19

Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a+b|^2 \leqslant (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.

Exercice 4.20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |1+z| \leq 1 \\ |1-z| \leq 1 \end{cases}$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4.21

Du calcul de $(1+i)(\sqrt{3}-i)$, déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4.22

Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle

$$u = 3+i\sqrt{3} \qquad v=(1-i)^6 \qquad w = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(on pourra calculer w^2)

Exercice 4.23

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser les expressions suivantes

$$\cos^6(\theta), \qquad \cos^4(\theta)\sin(\theta), \qquad \cos^4(\theta)\sin^2(\theta)$$

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et de leurs puissances

$$\cos(6\theta) \qquad \sin(4\theta), \qquad \sin(\theta)\cos(3\theta), \qquad \cos(2\theta)\sin(2\theta)$$

Exercice 4.24

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

Indication : on pourra calculer S_1+iS_2 et S_3+iS_4

Exercice 4.25

Soit $a = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $b = 3e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et $c = i-\sqrt{3}$. Déterminer les formes exponentielles de

$$abc, \quad \frac{a}{bc}, \quad b^2, \quad c^6$$

Exercice 4.26

Simplifier le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 4.27

Déterminer le module et un argument de $z = 1+\sqrt{2}\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 4.28

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 4.29

Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ soit réel.

Exercice 4.30

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ sous forme d'une somme de puissance de $\cos(x)$.

Exercice 4.31

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 4.32

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

Exercice 4.33

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\dfrac{\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10}{\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)}$

Exercice 4.34

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 4.35

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

(E_1) $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$

(E_2) $z^2 = 7 - 7i$

(E_3) $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

(E_4) $6z^2 - 15z + 6 = 0$

(E_5) $z^2 - 2z + 5$

(E_6) $z^2 + z + 1 = 0$

(E_7) $\overline{z^2} - \overline{z} + 2 = 0$

(E_8) $z^2(1+z^2) = 12$

Exercice 4.36

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$(S_1) : \begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_1 z_2 = 1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} \\ z_1 z_2 = 4 \end{cases}$$

Exercice 4.37

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$$

Exercice 4.38

Résoudre l'équation $\cos(x)^2 + \cos(2x)^2 + \cos(3x)^2 = 1$ sur le segment $[0, \pi]$.

Exercice 4.39

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Indication : on pourra calculer $S_1 + iS_2$

Exercice 4.40

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \cos\left((2k-1)\theta\right)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k\theta\right)^2$$

Exercice 4.41

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ Simplifier la somme suivante

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb)$$

Exercice 4.42

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \cos(k\theta)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos(\theta)^k}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta)$$

Exercice 4.43

1. Mettre la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta)+\sin(\theta) \end{array}$ sous la forme
$$f(\theta) = r\cos(\theta - \varphi)$$
avec r et φ des constantes à déterminer.
2. En déduire les solutions de l'équation
$$f(\theta)+1=0$$
3. Résoudre avec la même méthode l'équation
$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$$

Réponses

Réponse de l'exercice 4.1

— 0 est un majorant de E.
$$\forall x \in E, \quad x \leqslant 0$$
Par exemple $\mathbb{R}_-$ ou $\{-2\}$

— 1 n'est pas un minorant de E.
$$\exists x \in E, \quad x < 1$$
Par exemple $\mathbb{R}$ ou $]0,2[$

— π est le maximum de E.
$$\pi \in E, \quad \forall x \in E, \quad x \leqslant \pi$$
Par exemple $]-\infty,\pi]$ ou $\{\pi\}$

— E est majoré.
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad x \leqslant M$$
Par exemple $\{0\}$ ou $\{\frac{2}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$

— E n'est pas minoré.
$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in E, \quad x < m$$
Par exemple $\mathbb{R}$ ou $\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$

— E est borné.
$$\exists R \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in E, \quad |x| \leqslant R$$
Par exemple $[0,1]$ ou $\{1,2,10^{99}\}$

— E n'est pas borné.
$$\forall R \in \mathbb{R}_+, \quad \exists x \in E, \quad |x| > R$$
Par exemple $\mathbb{Q}$ ou $\{(-1)^n \times n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Réponse de l'exercice 4.2

(E_1) $x^2 - 8x + 11 = 4$
L'équation $x^2 - 8x + 11 = 4$ est équivalente à l'équation $x^2 - 8x + 7 = 0$. On applique la méthode vue en cours (et en terminale) pour résoudre celle-ci
Le discriminant de cette équation vaut $64 - 28 = 36 = 6^2$. Puisque le discriminant est positif, on sait que cette équation admet deux solutions réelles qui sont

$$\frac{8+6}{2} = 7 \qquad \text{et} \qquad \frac{8-6}{2} = 1$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation E_1 est $S_1 = \{1, 7\}$.
Remarque de rédaction : l'énoncé ne mentionne pas de coefficients a, b et c. Vous êtes donc fortement priés de ne pas écrire de chose du style $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ qui n'ont ici aucun sens puisque a,b et c n'ont jamais été définis.

(E_2) $|x-1| = 2x - 3$
On va raisonner ici par implication (ou par analyse-synthèse).
Soit x une solution réelle de l'équation $|x-1| = 2x-3$.
Alors $(x-1)^2 = (2x-3)$. C'est-à-dire $x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$.
Ainsi x est une solution de l'équation $3x^2 - 10x + 8 = 0$. Résolvons cette deuxième équation
Son discriminant est $10^2 - 4 \times 3 \times 8 = 100 - 96 = 4 = 2^2$. Puisque le discriminant est positif, on sait que cette équation admet deux solutions réelles qui sont

$$\frac{10-2}{6} = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \quad \frac{10+2}{6} = 2$$

On en déduit donc que, si x est un solution de l'équation E_2 alors $x \in \{\frac{4}{3}, 2\}$.
Il nous faut maintenant vérifier si $\dfrac{4}{3}$ et 2 sont des solutions de E_2.
On a

$$\left|\frac{4}{3} - 1\right| = \frac{1}{3} \qquad \text{et } 2 \times \frac{4}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$$
$$|2-1| = 1 \qquad \text{et } 2 \times 2 - 3 = 1$$

Ainsi 2 est une solution de E_2 et $\dfrac{4}{3}$ n'est pas un solution de E_2.
En conclusion, x est une solution de E_2 si et seulement si $x = 2$. L'ensemble des solutions de l'équation E_2 est donc $S_2 = \{2\}$.

(E_3) $|x-5| = |4-x^2|$
On va raisonner ici par implication (ou par analyse-synthèse). Soit x une solution de l'équation E_3. Passer l'égalité au carré ferai apparaître une équation de degré 4 beaucoup trop compliqué à résoudre. On va alors faire une disjonction de cas :
— Si $x \leqslant -2$ alors $|x-5| = 5 - x$ et $|4-x^2| = x^2 - 4$
  Ainsi x vérifie $5 - x = x^2 - 4$, c'est-à-dire $x^2 + x - 9 = 0$. Le discriminant de cette équation est 37, elle a donc deux solutions réelles qui sont $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$.
  Remarquons que $37 > 36$, ainsi $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} > \dfrac{-1+\sqrt{36}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} > \dfrac{5}{2} > 2$. On ne peut donc pas avoir $x \leqslant -2$ et $x = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$.
  Par contre $\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2} < \dfrac{-1-\sqrt{36}}{2}$,d'où $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} < -\dfrac{7}{2} < -2$
  Ainsi si $x \leqslant -2$ alors $x = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$

— Si $-2 < x \leqslant 2$ alors $|x-5| = 5-x$ et $|4-x^2| = 4-x^2$
Ainsi x vérifie $5-x = 4-x^2$, c'est-à-dire $x^2-x+1=0$. Le discriminant de cette équation est -3, elle n'a donc pas de solutions réelles. On ne peut donc pas avoir x solution de E_3 et $2 < x < 5$

— Si $2 < x < 5$ alors $|x-5| = 5-x$ et $|4-x^2| = x^2-4$
Ainsi x vérifie $5-x = x^2-4$, c'est-à-dire $x^2+x-9=0$. Le discriminant de cette équation est 37, elle a donc deux solutions réelles qui sont $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$.
Remarquons que $37 > 36$, ainsi $\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2} < \dfrac{-1-\sqrt{36}}{2}$,d'où $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} < -\dfrac{7}{2} < 2$. On ne peut donc pas avoir $2 < x < 5$ et $x = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$.
Par contre $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} > \dfrac{-1+\sqrt{36}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} > \dfrac{5}{2} > 2$, et comme $37 < 49$, on a $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} < 3 \leqslant 5$
Ainsi si $2 < x < 5$ alors $x = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$.

— Enfin si $x > 5$ alors $|x-5| = x-5$ et $|4-x^2| = x^2-4$.
Ainsi x vérifie $x-5 = x^2-4$, c'est-à-dire $x^2-x+1=0$. Le discriminant de cette équation est -3, elle n'a donc pas de solutions réelles. On ne peut donc pas avoir x solution de E_3 et $x > 5$.

En conclusion l'ensemble des solutions de E_3 est $S_3 = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}\right\}$.

(E_4) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$
On va raisonner ici par implication (ou par analyse-synthèse). Soit x une solution de l'équation E_4, remarquons que nécessairement $x \geqslant 3$. Alors

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{x})^2 = 9$$

i.e.

$$x - 3 + x + 2\sqrt{x^2-3x} = 9$$

Ainsi

$$2x - 12 = -2\sqrt{x^2-3x}$$

Et,par suite

$$(2x-12)^2 = 4(x^2-3x)$$

Ainsi, en développant et regroupant les termes, x vérifie

$$36x = 144$$

C'est-à-dire $x = 4$. Ainsi, si x est une solution de E_4 alors $x = 4$
Vérifions maintenant que 4 est bien solution de l'équation E_4. On a $\sqrt{4-3} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$. 4 est bien solution de E_4. L'ensemble des solutions de l'équation E_4 est donc $S_4 = \{4\}$

(E_5) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$
On va raisonner ici par implication (ou par analyse-synthèse). Soit x une solution de l'équation E_5, et notons $X = x^2$. X vérifie alors

$$X^2 - 2X - 15 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $4+60 = 64 = 8^2$. Cette équation admet donc deux solutions qui sont

$$\frac{2+8}{2} = 5 \qquad \text{et } \frac{2-8}{2} = -3$$

Ainsi, si x est solution de l'équation E_5 alors $\{x^2 \in \{-3, 5\}$. Comme $x^2 \geqslant 0$ on en déduit que $x^2 = 5$, c'est-à-dire $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
Vérifions que $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ sont des solutions de E_5 :

$$(-\sqrt{5})^4 - 2 \times (-\sqrt{5})^2 - 15 = 25 - 10 - 15 = 0$$

$$(\sqrt{5})^4 - 2 \times (\sqrt{5})^2 - 15 = 25 - 10 - 15 = 0$$

En conclusion l'ensemble des solutions de l'équation E_5 est $S_5 = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

Réponse de l'exercice 4.3

- A est majorée et minorée. $\sup(A) = \max(A) = 10$, $\inf(A) = 2$ A n'a pas de minimum.
- B n'est ni majorée, ni minorée. En effet si $n \in \mathbb{N}$ on a $4n \cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = 4n$ et $(4n+2)\cos\left(\frac{(4n+2)\pi}{2}\right) = -(4n+2)$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $4n \in B$ et $-(4n+2) \in B$
- C est majorée et minorée. $\sup(C) = \max(C) = \frac{1}{9}$, $\inf(C) = 0$, C n'a pas de minimum.
- D est minorée mais pas majorée. $\inf(D) = 0$. D n'a pas de minimum.
- E est majorée et minoré. $\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\inf(E) = \min(E) = -1$.
- F est majoré et minoré. $\sup(F) = \frac{1}{2}$, $\inf(F) = 0$. F n'a ni maximum, ni minimum.
- G est majoré et minoré. $\sup(G) = \max(G) = \frac{\cos(1)}{1}$, $\inf(G) = \min(G) = \frac{cos(3)}{3}$.

Réponse de l'exercice 4.4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. On a, par définition

$$\max(a, b) = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant b \\ b \text{ si } a < b \end{cases}$$

On va alors étudier $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ quand $a \geqslant b$ et quand $a < b$.

- Si $a \leqslant b$
  Alors $a - b \leqslant 0$ d'où $|a - b| = b - a$ Ainsi
  $$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = b$$
- Si $a > b$
  Alors $a - b > 0$ d'où $|a - b| = a - b$ Ainsi
  $$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a$$

On a donc bien

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

Réponse de l'exercice 4.5

(I$_1$) $x^2 - x > 2$

L'inéquation $x^2 - x > 2$ est équivalente à l'inéquation $x^2 - x - 2 > 0$.

Les racines du polynôme $x^2 - x - 2$ sont 1 et -2. Ainsi $x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)$. Notre inéquation est donc équivalente à

$$(x-1)(x+2) > 0$$

On sait qu'un produit de deux termes est strictement positif si et seulement si les termes sont non-nuls et de même signe. Ici on a donc

$$(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow ((x > 1 et x > -2) \text{ ou } (x < 1 et x < -2))$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S_1 =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

(I$_2$) $\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{4x-1}$

Remarquons que si x est solution de cette inéquation alors $x \geqslant 1$. Mais, si $x \geqslant 1$ alors $4x > x$, d'où $4x - 1 > x - 1 \geqslant 0$ et, par suite, $\sqrt{x-1} < \sqrt{4x-1}$.

Ainsi l'inéquation I_2 n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de I_2 est donc $S_2 = \emptyset$.

(I$_3$) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$

Remarquons que si x est solution de cette inéquation alors $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} > 0$, i.e $x > -1$ ou $x < -2$.

Soit x une solution de cette inéquation, alors $x + 1 < x + 2$. D'où $\dfrac{x+1}{x+2} < 1$ et, par suite $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$.

Ainsi, si $x > -1$ ou $x < -2$, on a toujours l'inégalité $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation I_3 est donc $S_3 =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$.

Réponse de l'exercice 4.6

Figure 4.1 – Graphe de la fonction f

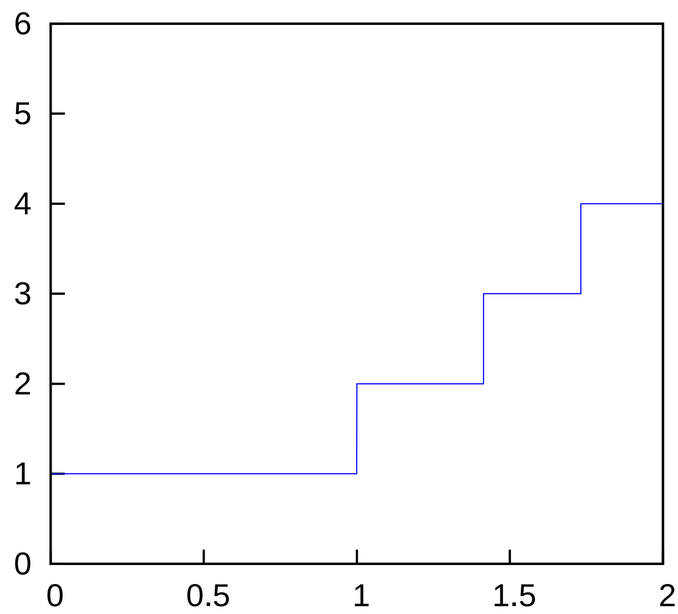
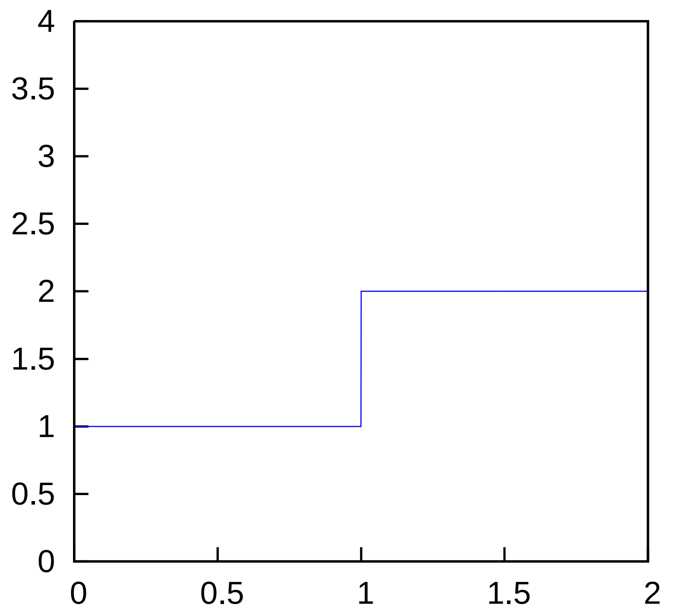


Figure 4.2 – Graphe de la fonction g



Réponse de l'exercice 4.7

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \\
&= -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2} \\
&= -\frac{2+2i\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)} \\
&= \frac{(1-2i)(3+i)}{(1^2+2^2)(3^2+1^2)} \\
&= \frac{3+i-6i+2}{50} \\
&= \frac{5-5i}{50} \\
&= \frac{1}{10}-\frac{i}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1+2i}{1-2i} \\
&= \frac{(1+2i)^2}{5} \\
&= \frac{-3+4i}{5} \\
&= -\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i} \\
&= \frac{(5+i\sqrt{2})(1-i)}{2} \\
&= \frac{5-5i+i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{5+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}-5}{2}
\end{aligned}
$$

Réponse de l'exercice 4.8

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = a + ib$ et $z' = c + id$. Alors

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 \\ &= 2(a^2+b^2) + 2(c^2+d^2) \\ &= 2|z|^2 + 2|z'| \end{aligned}$$

Comment s'interprète géométriquement cette égalité ?

Soit M le point d'affixe z, M' le point d'affixe z' et M'' le point d'affixe $z+z'$. Le quadrilatère $OMM''M'$ est alors un parallélogramme. En effet $OM = |z| = |z+z'-z'| = M''M'$ et $OM' = |z'| = |z+z'-z| = MM''$.

Les diagonales de ce parallélogramme sont $[OM'']$ de longueur $OM'' = |z+z'|$ et $[MM'] = |z-z'|$. L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des quatre côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

Réponse de l'exercice 4.9

On a

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n+1} &= \frac{n^3+n^2-n^2}{n+1} \\ &= \frac{n^3+n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+1} \\ &= n^2 - \frac{n^2+n-n-1+1}{n+1} \\ &= n^2 - \frac{n^2+n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= n^2 - n + 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\lfloor \frac{n^3}{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor n^2 - n + 1 - \frac{1}{n+1} \right\rfloor = n^2 - n + 1 + \left\lfloor -\frac{1}{n+1} \right\rfloor = n^2 - n$$

Réponse de l'exercice 4.10

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $n\lfloor x \rfloor \leqslant nx$. Ainsi $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à nx, d'où $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

De plus on sait que $x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $nx < n\lfloor x \rfloor + n$.

Ainsi $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < n$. Or $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$ est un entier et on rappelle que, si k est un entier alors l'inégalité $k < n$ est équivalente à $k \leqslant n-1$. On a donc $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1$.

Si $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + \frac{1}{2}$ alors
$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$. On en déduit alors l'inégalité recherchée
Si $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + \frac{1}{2}$ alors
$\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$,$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$. On en déduit alors l'inégalité recherchée
Si $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et $\lfloor y \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ on procède de manière similaire au cas précédent
Enfin si $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ alors
$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$ On en déduit alors l'inégalité recherchée.

Dans tous les cas l'inégalité recherchée est vérifiée.

Réponse de l'exercice 4.11

On a

$$\begin{aligned}(2+3i)^n+(2-3i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^k i^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^k i^k(-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^k i^k(1+(-1)^k) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^k i^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^k (-1)^{\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

On sait que $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$, $2^{n-k}3^k(-1)^{\frac{k}{2}} \in \mathbb{Z}$ et que la somme d'un produit de nombre entiers est un nombre entier. Ainsi $(2+3i)^n+(2-3i)^n$ est un nombre entier.

Réponse de l'exercice 4.12

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z+i| = |\operatorname{Re}(z)+i(\operatorname{Im}(z)+1)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2+2\operatorname{Im}(z)+1} = \sqrt{|z|^2+1+2\operatorname{Im}(z)}$$

$$|z+i| = |\operatorname{Re}(z)+i(\operatorname{Im}(z)-1)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2-2\operatorname{Im}(z)+1} = \sqrt{|z|^2+1-2\operatorname{Im}(z)}$$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$ on a $|z+i| = |z-i|$ si et seulement si $\sqrt{|z|^2+1+2\operatorname{Im}(z)} = \sqrt{|z|^2+1-2\operatorname{Im}(z)}$

Les racines carrés de deux nombres réels positifs sont égales si et seulement si ces deux nobmres sont égaux.

Donc, pour $z \in \mathbb{C}$ on a $|z+i| = |z-i|$ si et seulement si $|z|^2+1+2\operatorname{Im}(z) = |z|^2+1-2\operatorname{Im}(z)$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Im}(z)=0$.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante sur z et suffisante pour que $|z+i| = |z-i|$ est $\operatorname{Im}(z)=0$, i.e. $z \in \mathbb{R}$.

Que cela signifie-t-il géométriquement ? On sait que $|z-i|$ la distance entre le point d'affixe z noté M et le point d'affixe i noté A. De même $|z+i| = |z-(-i)|$ la distance entre le point M d'affixe z et le point d'affixe $-i$ noté B.

Ainsi la condition $|z+i| = |z-i|$ s'interprète géométriquement par $AM = BM$, c'est-à-dire M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, ladite médiatrice étant l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'affixe est un nombre réel.

Réponse de l'exercice 4.13

On sait que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui a z associe $\overline{z}$ est une bijection, ainsi, pour z et ω dans $\mathbb{C}$ on a

$$2\overline{\omega}+\overline{z}=3 \Leftrightarrow \overline{2\overline{\omega}+\overline{z}} = \overline{3}$$

C'est-à-dire

$$2\overline{\omega}+\overline{z}=3 \Leftrightarrow 2\omega+z=3$$

Ainsi le système

$$\begin{cases} iz - 2\omega = -4 + 3i \\ 2\overline{\omega} + \overline{z} = 3 \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} iz - 2\omega = -4 + 3i \\ 2\omega + z = 3 \end{cases}$$

Il est maintenant assez facile de le résoudre. En additionnant les deux lignes on obtient

$$(1 + i)z = -1 + 3i$$

D'où

$$z = \frac{-1 + 3i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{2} = 1 + 2i$$

Et en faisant l'opération « ligne 2 + $i\times$ ligne 1 », on obtient

$$(2 - 2i)\omega = -4i$$

D'où

$$\omega = \frac{-4i}{2 - 2i} = \frac{8 - 8i}{8} = 1 - i$$

L'ensemble des solutions du système est donc $S = \{(1 + 2i, 1 - i)\}$.

Réponse de l'exercice 4.14

Remarquons d'abord que, si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) = 0$ et z n'est alors pas défini. On supposera donc par la suite que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = \dfrac{1}{1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)}$, alors

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)} \\ &= \frac{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2} \\ &= \frac{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ &= \frac{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2 - 2\cos(\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sin(\theta)}{2 - 2\cos(\theta)} \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 4.15

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et soit φ la détermination principale de l'argument de z. On a alors $z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. D'où

$$\begin{aligned} 1 + z^2 &= 1 + \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 + 2i\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ &= 2cos(\varphi)^2 + 2i\sin(var\phi)\cos(\varphi) \\ &= 2\cos(\varphi) \times z \end{aligned}$$

Ainsi

$$1+z+z^2 = (1+2\cos(\varphi))\,z$$

On en déduit alors que $|Z| = 1+2\cos(\varphi)$ et que φ est la détermination principale de l'argument de Z.

Alors Z est réel si et seulement $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ ou $1+2\cos(\varphi) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \{j, j^2\}$ où $j = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Et Z est imaginaire pur si et seulement $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $1+2\cos(\varphi) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$ ou $z \in \{j, j^2\}$ où $j = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Réponse de l'exercice 4.16

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ avec $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (il s'agit de l'écriture de z sous forme trigonométrique). On a alors

$$\begin{aligned}
i\frac{1+z}{1-z} &= i(1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \times \frac{1}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)} \\
&= i(1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)}\right) \\
&= i\frac{1+\cos(\theta)}{2} - \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} - i\frac{\sin(\theta)^2}{2-2\cos(\theta)} \\
&= i\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2} - \frac{1-\cos(\theta)^2}{2-2\cos(\theta)}\right) - \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} \\
&= i\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2} - \frac{1+\cos(\theta)}{2}\right) - \frac{\sin(\theta)(1-\cos(\theta)}{2-2\cos(\theta)} - \frac{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} \\
&= -\frac{\sin(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta)+\sin(\theta)+\cos(\theta))\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} \\
&= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1}
\end{aligned}$$

On a donc bien $i\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.

Réponse de l'exercice 4.17

Soient a et b deux complexes tels que $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leq 1$. Soit $u = \dfrac{a+b}{2}$ et $v = \dfrac{a-b}{2}$. Alors $u+v = a$ et $u-v = b$.

On a

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 + 2\operatorname{Re}(u\overline{v}) + 2\operatorname{Re}(u \times \overline{(-v)}) = 2|u|^2 + 2|v|^2$$

Ainsi

$$2|u|^2 + 2|v|^2 = |a|^2 + |b|^2 \leqslant 3 = 2|$$

D'où $|u|^2 + |v|^2 \leqslant 1$.

On a alors $|u|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $|v|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$. C'est-à-dire $\left|\dfrac{a+b}{2}\right|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Puisque $|a+b| > 0$ alors $\left|\dfrac{a+b}{2}\right|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $\left|\dfrac{a+b}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

De même $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $|a-b| \leqslant \sqrt{2}$.

En conclusion on a bien

$$|a+b| \leq \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad |a-b| \leq \sqrt{2}$$

Réponse de l'exercice 4.18

Puisque $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| \geqslant 0$ il nous suffit de montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 < 1$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| &= \frac{|a-b|}{|1-\overline{a}b|}\\ &= \frac{(a-b)(\overline{a}-\overline{b}}{(1-\overline{a}b)(1-a\overline{b}}\\ &= \frac{|a|^2-b\overline{a}-a\overline{b}+|b|^2}{1-b\overline{a}-a\overline{b}+|ab|^2}\end{aligned}$$

Nous allons donc montrer que

$$|a|^2-b\overline{a}-a\overline{b}+|b|^2 < 1-b\overline{a}-a\overline{b}+|ab|^2$$

C'est-à-dire

$$|a|^2+|b|^2 < 1+|a|^2|b|^2$$

Cette inégalité est équivalente à

$$|a|^2+|b|^2+2|a||b| < 1+|a|^2|b|^2+2|a||b|$$

c'est-à-dire

$$(|a|+|b|)^2 < (1+|a||b|)^2$$

Comme $|a|+|b| > 0$ et $1+|a||b| > 0$, montrer cette dernière inégalité revient à montrer que

$$|a|+|b| < 1+|a||b|$$

On va montrer cette inégalité.
On sait que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. D'où $1-|b| > 0$. Ainsi

$$|a|(1-|b|) < 1-|b|$$

C'est-à-dire

$$|a|-|a||b| < 1-|b|$$

D'où

$$|a|+|b| < 1+|a||b|$$

On a donc bien $|a|+|b| < 1+|a||b|$, ainsi on a montré que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 < 1$$

Réponse de l'exercice 4.19

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On a

$$|a+b|^2 = (a+b) \times \overline{(a+b)} = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\overline{b}$$

$$(1+|a|^2)(1+|b|^2) = |a|^2 + |b|^2 + 1 + |ab|^2$$

Il nous faut donc montrer que

$$2\,\mathrm{Re}(a\overline{b} \leqslant 1 + |ab|^2$$

On sait que $\mathrm{Re}(a\overline{b} \leqslant |ab| = \sqrt{|ab|^2}$

De plus l'inégalité arithmético-géométrique (cf DM1) nous dit que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

En prenant $x = 1$ et $y = |ab|^2$ on a alors

$$\sqrt{|ab|^2} \leqslant \frac{1+|ab|^2}{2}$$

D'où

$$2\,\mathrm{Re}(a\overline{b} \leqslant 2\sqrt{|ab|^2} \leqslant 1 + |ab|^2$$

Ce qui implique l'inégalité voulue.

Réponse de l'exercice 4.20

On va utiliser ici l'inégalité triangulaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$2 = |1 - (-1)| = |1 + z + 1 - z| \leqslant |1 + z| + |1 - z|$$

Ainsi, si z est une solution de notre système on a

$$2 \leqslant |1 + z| + |1 - z| \leqslant 2$$

D'où $|1 + z| = |1 - z| = 1$.

En raisonnant de manière similaire à l'exercice 14 on en déduit que $z \in i\mathbb{R}$. De plus on a $|1 + z| = 1$, d'où $z = 0_{\mathbb{C}}$.

Ainsi l'ensemble des solutions de notre système est $S = \{0_{\mathbb{C}}\}$.

Résoudre ce problème de manière géométrique est beaucoup plus simple ici. On sait que $|1 + z| = |z - (-1)$ est la distance entre le point d'affixe z noté M et le point d'affixe -1 noté A. De même $|1 - z| = |z - 1|$ la distance entre le point M d'affixe z et le point d'affixe 1 noté B. Ainsi notre système se réinterprète en

$$\begin{cases} AM \leqslant 1 \\ BM \leqslant 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire M appartient au disque de centre A et de rayon 1 et M appartient au disque de centre B et de rayon 1. Ces deux disques ne s'intersectent qu'en un seul point : O l'origine du repère d'affixe $0_{\mathbb{C}}$. $0_{\mathbb{C}}$ est donc l'unique solution de notre système.

Réponse de l'exercice 4.21

On a

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

et

$$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}(1+i)(\sqrt{3}-i)&=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{pi}{6}\right)\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

On a également

$$(1+i)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires on en déduit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Réponse de l'exercice 4.22

1. On a $|u|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$, d'où
$$u=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$
Comme $\mathrm{Re}(u)>0$ alors $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(u)}{\mathrm{Re}(u)}\right)$ est un argument de u. Ainsi $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$ est un argument de u.
On a donc $u=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. Pour v on va d'abord travailler avec $1-i$. On a $|1-i|=\sqrt{2}$. Par suite $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Comme $\mathrm{Re}(1-i)>0$ alors $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(1-i)}{\mathrm{Re}(1-i)}\right)$ est un argument de v. Ainsi $\arctan(-1)=\frac{-\pi}{4}$ est un argument de $1-i$.
On a donc $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. D'où $v=(1-i)^6=8e^{-\frac{6i\pi}{4}}=8e^{\frac{i\pi}{2}}$
3. On va suivre l'indication de l'énoncé et calculer w^2.

$$\begin{aligned}w^2&=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\\&=\sqrt{2+\sqrt{2}}^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}^2+2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\&=2\sqrt{2}+2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}$$
$$= 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

Alors $|w^2| = 4$ et, comme $\mathrm{Re}(w^2) > 0$, $\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(w^2)}{\mathrm{Im}(w^2)}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ est un argument de w^2.
Ainsi $w^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que

$$w \in \left\{2e^{i\frac{\pi}{8}}\ ,\ 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}\right\}$$

Or $\mathrm{Re}(w) < 0$. D'où $w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

Réponse de l'exercice 4.23

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On a

$$\begin{aligned}\cos^6(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^6\\ &= \frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}+6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}+20+15e^{-2i\theta}+6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{64}\left(2\cos(6\theta)+12\cos(4\theta)+30\cos(2\theta)+20\right)\\ &= \frac{\cos(6\theta)+6\cos(4\theta)+15\cos(2\theta)+10}{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta)\sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \times \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{32i}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})\\ &= \frac{1}{32i}(e^{\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})\\ &= \frac{1}{32i}\left(e^{i5\theta}+3e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+e^{-i\theta}-e^{i\theta}-3e^{-i\theta}-3e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\sin(5\theta)+3\sin(3\theta)+2\sin(\theta)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta)\sin^2(\theta) &== \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \times \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{-1}{64}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^2(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})^2\\ &= \frac{-1}{64}(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta})(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta})\\ &= \frac{-1}{64}\left(e^{6i\theta}+2e^{4i\theta}+e^{2i\theta}-2e^{2i\theta}-4-2e^{-2i\theta}+e^{-2i\theta}+2e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right)\\ &= \frac{-\cos(6\theta)-2\cos(4\theta)+\cos(2\theta)+2}{32}\end{aligned}$$

2.

$$\cos(6\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{6i\theta}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^6\right)\\
&= \mathrm{Re}\big(\cos(\theta)^6 + 6i\cos(\theta)^5\sin(\theta) - 15\cos(\theta)^4\sin(\theta)^2 - 20i\cos(\theta)^3\sin(\theta)^3 + 15\cos(\theta)^2\sin(\theta)^4\\
&\qquad +6i\cos(\theta)\sin(\theta)^5 - \sin(\theta)^6\big)\\
&= \cos(\theta)^6 - 15\cos(\theta)^4\sin(\theta)^2 + 15\cos(\theta)^2\sin(\theta)^4 - \sin(\theta)^6\\
&= \cos(\theta)^6 - 15\cos(\theta)^4(1-\cos(\theta)^2) + 15\cos(\theta)^2(1-\cos(\theta)^2)^2 - (1-\cos(\theta)^2)^3\\
&= \cos(\theta)^6 - 15\cos(\theta)^4 + 15\cos(\theta)^6 + 15\cos(\theta)^2(1-2\cos(\theta)^2+\cos(\theta)^4) - (1-3\cos(\theta)^2+3\cos(\theta)^4 - \cos\\
&= \cos(\theta)^6 - 15\cos(\theta)^4 + 15\cos(\theta)^6 + 15\cos(\theta)^2 - 30\cos(\theta)^4 + 15\cos(\theta)^6 - 1 + 3\cos(\theta)^2 - 3\cos(\theta)^4 + \cos\\
&= 32\cos(\theta)^6 - 48\cos(\theta)^4 + 18\cos(\theta)^2 - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(4\theta) &= \mathrm{Im}\left(e^{4i\theta}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\cos(\theta)^4 + 4i\cos(\theta)^3\sin(\theta) - 6\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 - 4i\cos(\theta)\sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^4\right)\\
&= 4\cos(\theta)^3\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin(\theta)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - i\sin(\theta)^3\right)\\
&= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2
\end{aligned}
$$

D'où
$$\sin(\theta)\cos(3\theta) = \sin(\theta)\left(\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\right) = \cos(\theta)^3\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^3$$

On sait déjà que
$$\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1 \qquad \sin(2\theta)2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Ainsi
$$\cos(2\theta)\sin(2\theta) = \left(2\cos(\theta)^2 - 1\right)2\cos(\theta)\sin(\theta) = 4\cos(\theta)^3\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Réponse de l'exercice 4.24

Comme l'indication nous le suggère on va calculer $S_1 + iS_2$.

$$
\begin{aligned}
S_1 + iS_2 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(kx) + i\sin(kx))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \\
&= \left(1+e^{ix}\right)^n \\
&= \left(e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)\right)^n \\
&= \left(e^{i\frac{x}{2}} 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \\
&= 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} \\
&= 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_1 = \mathrm{Re}(S_1+iS_2) = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$S_2 = \mathrm{Im}(S_1+iS_2) = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

On a également, pour $x \notin \{2m\pi \ , \ m \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}
S_3 + iS_4 &= \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{2i\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_3 = \mathrm{Re}(S_3+iS_4) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$S_4 = \mathrm{Im}(S_3+iS_4) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Si, par contre $x \in \{2m\pi \ , \ m \in \mathbb{Z}\}$ alors

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \qquad \text{et} \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0$$

Réponse de l'exercice 4.25

On va commencer par déterminer la forme exponentielle de c. On a $|c| = 2$ et, comme $\mathrm{Re}(c) < 0$, $\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}\right) + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$ est un argument de c.

D'où $c = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

En conséquence on a

$$abc = 6e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{6}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$b^2 = 9e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$
$$c^6 = 64e^{5i\pi} = 64e^{i\pi}$$

Réponse de l'exercice 4.26

On va mettre sous forme exponentielle $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

On a $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

D'où $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et, par suite

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}e^{i\frac{140\pi}{12}} = 1024e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Réponse de l'exercice 4.27

L'exercice précédent nous apprend que $\sqrt{2}\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = e^{-\frac{7i}{12}}$. Ainsi $z = 1 + e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

On alors faire apparaître l'arc moitié :

$$z = 1 + e^{-\frac{7i\pi}{12}} = e^{-\frac{7\pi}{24}}\left(e^{\frac{7\pi}{24}} + e^{-\frac{7\pi}{24}}\right) = e^{-\frac{7\pi}{24}} \times 2\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$$

Puisque $0 \leqslant \dfrac{7\pi}{24} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ on a donc $\cos\left(\dfrac{7\pi}{24}\right) \geqslant 0$. Ainsi

$$|z| = 2\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) \qquad \text{et} \qquad -\frac{7\pi}{24} \text{ est un argument de } z$$

Réponse de l'exercice 4.28

On a

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^n\left(e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Réponse de l'exercice 4.29

On a $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, d'où $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Un nombre complexe z est réel si et seulement si les arguments de z sont des multiple de π. Ici on en déduit alors que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est réel si et seulement $\dfrac{n}{6}$ est un entier, c'est-à-dire

$\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un réel si et seulement si n est un multiple de 6.

Réponse de l'exercice 4.30

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x)+2\cos(2x)+\cos(3x) &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}+2e^{2ix}+e^{3ix}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}+2\left(e^{ix}\right)^2+\left(e^{ix}\right)^3\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(x)+i\sin(x)+2\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^2+\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^3\right)\\
&= -3\cos(x)\sin(x)^2+2\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)+\cos(x)^3+\cos(x)\\
&= \cos(x)^3+2\left(2\cos(x)^2-1\right)-3\cos(x)\left(1-\cos(x)^2\right)+\cos(x)\\
&= 4\cos(x)^3+4\cos(x)^2-2\cos(x)-2
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 4.31

Soit $a\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(5a) &= \mathrm{Re}\left(e^{5ia}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(a)+i\sin(a)\right)^5\\
&= \cos(a)^5-10\cos(a)^3\sin(a)^2+5\cos(a)\sin(a)^4\\
&= \cos(a)^5-10\cos(a)^3(1-\cos(a)^2)+5\cos(a)(1-\cos(a)^2)^2\\
&= \cos(a)^5-10\cos(a)^3+10\cos(a)^5+5\cos(a)-10\cos(a)^3+5\cos(a)^5\\
&= 16\cos(a)^5-20\cos(a)^3+5\cos(a)
\end{aligned}$$

Soit $P\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 16x^5-20x^3+5x\end{array}$. On a donc

$$\forall a\in\mathbb{R}\qquad \cos(5a)=P(\cos(a))$$

En particulier, pour $a=\dfrac{\pi}{10}$ on obtient

$$P(\cos(a))=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Or, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= 16x^5-20x^3+5x\\
&= x(16x^4-20x^2+5)\\
&= x\left(\left(4x^2-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left(4x^2-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(4x^2-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\
&= x\left(4x^2-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(4x^2-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\\
&= x\left(2x-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi les racines de P sont

$$S=\left\{0,-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$$

Puisque $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)=0$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ appartient à l'ensemble ci-dessus.

Or, puisque $0\leqslant\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{\pi}{4}$ alors $1\geqslant\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le seul élément de S qui vérifie ces inégalités est $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

On a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Réponse de l'exercice 4.32

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$
\begin{aligned}
\sin(3x) &= \operatorname{Im}\left(e^{3ix}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(cos(x)^3+3i\cos(x)^2\sin(x)-3\cos(x)\sin(x)^2-i\sin(x)^3\right)\\
&= 3\sin(x)(1-\sin(x)^2)-\sin(x)^3\\
&= -4\sin(x)^3+3\sin(x)
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) &= 4\sin(x)\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= -\sin(x)\left(\sin(x)+\cos(x)\sqrt{3}\right)\left(\sin(x)-\cos(x)\sqrt{3}\right)\\
&= -\sin(x)\left(\sin(x)^2-3\cos(x)^2\right)\\
&= -\sin(x)(4\sin(x)^2-3)\\
&= -4\sin(x)^3+3\sin(x)
\end{aligned}
$$

On a donc prouvé l'égalité annoncée.

Réponse de l'exercice 4.33

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N(x) = \cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10$. On a

$$\begin{aligned}
N(x) &= \frac{e^{i6x} + e^{-i6x} + 6e^{i4x} + 6e^{-i4x} + 15e^{i2x}15e^{-i2x} + 20}{2} \\
&= \frac{\left(e^{ix}\right)^6 + 6\left(e^{ix}\right)^5 e^{-ix} + 15\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^2 + 20\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^3 + 15\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^4 + 6\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^5 + \left(e^{-ix}\right)^6}{2} \\
&= \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^6}{2} \\
&= \frac{(2\cos(x))^6}{2} \\
&= 32\cos(x)^6
\end{aligned}$$

De même

$$\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x) = 16\cos(x)^5$$

Ainsi

$$\frac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)} = 2\cos(x)$$

Réponse de l'exercice 4.34

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(5a) &= \mathrm{Re}\left(e^{5ia}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(a) + i\sin(a)\right)^5 \\
&= \cos(a)^5 - 10\cos(a)^3\sin(a)^2 + 5\cos(a)\sin(a)^4 \\
&= \cos(a)^5 - 10\cos(a)^3(1-\cos(a)^2) + 5\cos(a)(1-\cos(a)^2)^2 \\
&= \cos(a)^5 - 10\cos(a)^3 + 10\cos(a)^5 + 5\cos(a) - 10\cos(a)^3 + 5\cos(a)^5 \\
&= 16\cos(a)^5 - 20\cos(a)^3 + 5\cos(a)
\end{aligned}$$

Soit $P : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{array}$. On a donc

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \cos(5a) = P(\cos(a))$$

En particulier, pour $a = \dfrac{\pi}{10}$ on obtient

$$P(\cos(a)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
&= x(16x^4 - 20x^2 + 5) \\
&= x\left(\left(4x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\
&= x\left(4x^2 - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(4x^2 - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= x\left(4x^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(4x^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= x\left(2x-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(2x+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Ainsi les racines de P sont

$$S=\left\{0,-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$$

Puisque $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)=0$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ appartient à l'ensemble ci-dessus.

Or, puisque $0\leqslant\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{\pi}{4}$ alors $1\geqslant\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le seul élément de S qui vérifie ces inégalités est $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

On a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Réponse de l'exercice 4.35

(E_1) $z^2=-1+i\sqrt{3}$

On a

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $z^2=-1+i\sqrt{3}$ est

$$S_1=\left\{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}},-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\right\}=\left\{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}},\sqrt{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$$

(E_2) $z^2=7-7i$

On a

$$7-7i=7\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=7\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $z^2=7-7i$ est

$$S_2=\left\{\sqrt{7\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{8}},-\sqrt{7\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{8}}\right\}=\left\{\sqrt{7\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{8}},\sqrt{7\sqrt{2}}e^{\frac{7i\pi}{8}}\right\}$$

(E_3) $3\overline{z}-2iz=5-3i$

Soit $z\in\mathbb{C}$ et soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=a+ib$. Alors z est solution de (E_3) si et seulement si (a,b) est solution de

$$3a-3ib-2ia+2b=5-3i$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}3a+2b=5\\-3b-2a=-3\end{cases}$$

En faisant les opérations 2×ligne 1 + 3×ligne 2 et 3×ligne 1+ 2×ligne 2 on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 4b - 9b = 10 - 9 \\ 9a - 4a = 15 - 6 \end{cases}$$

D'où $b = \dfrac{-1}{5}$ et $a = \dfrac{9}{5}$.
Vérifions maintenant que $\dfrac{9}{5} - \dfrac{i}{5}$ est bien une solution de (E_3).

$$3\overline{\frac{9}{5} - \frac{i}{5}} - 2i\left(\frac{9}{5} - \frac{i}{5}\right) = \frac{27}{5} + \frac{3i}{5} - \frac{18i}{5} - \frac{2}{5} = 5 - 3i$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$S_3 = \left\{\frac{9}{5} - \frac{i}{5}\right\}$$

(E_4) $6z^2 - 15z + 6 = 0$
Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant vaut $15^2 - 4 \times 6 \times 6 = 225 - 144 = 81$.
Le discriminant est positif, on a donc deux solutions réelles qui sont

$$\frac{15+9}{12} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{15-9}{12} = \frac{1}{2}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_4) est

$$S_4 = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$$

(E_5) $z^2 - 2z + 5$ Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant réduit vaut $1^2 - 5 = -4$.
Le discriminant est négatif, on a donc deux solutions complexes qui sont

$$1 + 2i \qquad \text{et} \qquad 1 - 2i$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_5) est

$$S_5 = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$$

(E_6) $z^2 + z + 1 = 0$
Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$.
Le discriminant est négatif, on a donc deux solutions complexes qui sont

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

On reconnait les deux racines 3-ièmes de l'unité j et j^2 Ainsi l'ensemble des solutions de (E_6) est

$$S_6 = \{j, j^2\}$$

(E_7) $\overline{z^2} - \overline{z} + 2 = 0$
Comme la conjugaison complexe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, cette équation est équivalente à l'équation $z^2 - z + 2 = 0$. Résolvons cette seconde équation.
Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant vaut $1^2 - 8 = -7$.

Le discriminant est négatif, on a donc deux solutions complexes qui sont

$$\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_7) est

$$S_7 = \left\{\frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$$

(E_8) $z^2(1+z^2) = 12$

Résoudre cette équation revient à résoudre l'équation $z^4 + z^2 - 12 = 0$.

Or, pour tout complexe z, on a

$$\begin{aligned}
z^4 + z^2 - 12 &= \left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \\
&= \left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \\
&= \left(z^2 + \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) \\
&= \left(z^2 - 3\right)\left(z^2 + 4\right) \\
&= (z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-2i)(z+2i)
\end{aligned}$$

Ainsi z est une solution de (E_8) si et seulement si

$$(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-2i)(z+2i) = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_8) est donc

$$S_8 = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2i, 2i\}$$

Réponse de l'exercice 4.36

D'après les relations coefficients-racines vues en cours on sait que le couple (z_1, z_2) est solution de S_1 si et seulement si z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. On a déjà obtenu les racines de ce polynôme dans l'exercice précédent, il s'agit de j et j^2. Ainsi, l'ensemble des solutions de S_1 est

$$\mathcal{S}ol_1 = \{(j, j^2), (j^2, j)\}$$

De même le couple (z_1, z_2) est solution de S_2 si et seulement si z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $X^2 - (2\sqrt{3})X + 4$. On va donc résoudre l'équation $z^2 - (2\sqrt{3})z + 4 = 0$.

Le discriminant de l'équation vaut $12 - 16 = -4$. Il est négatif, on a donc deux racines complexes qui sont

$$\frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i \qquad \text{et} \qquad \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de S_2 est

$$\mathcal{S}ol_2 = \{(\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i), (\sqrt{3}-i, \sqrt{3}+i)\}$$

Réponse de l'exercice 4.37

On pourrait ici résoudre l'équation de manière classique. On va plutôt utiliser les relations coefficients-racines.

On sait que z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1$ si et seulement si le couple (z_1, z_2) est solution du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2\cos(\alpha) \\ z_1 z_2 = 1 \end{cases}$$

Les solutions de ce système apparaissent alors simplement grâce aux formules d'Euler, il s'agit des couples $\left(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\right)$ et $\left(e^{-i\alpha}, e^{i\alpha}\right)$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$ est

$$S = \left\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\right\}$$

Réponse de l'exercice 4.38

Notons $S(x) = \cos(x)^2 + \cos(2x)^2 + \cos(3x)^2 - 1$. On va simplifier l'expression $S(x)$.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \cos(x)^2 + \cos(2x)^2 + \cos(3x)^2 - 1 \\
&= \cos(x)^2 + \left(2\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)^2 + \left(\cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2\right)^2 - 1 \\
&= \cos(x)^2 + \left(2\cos(x)^2 - 1\right)^2 + \left(\cos(x)^3 - 3\cos(x)(1 - \cos(x)^2)\right)^2 - 1 \\
&= \cos(x)^2 + 4\cos(x)^4 - 4\cos(x)^2 + 1 + \left(4\cos(x)^3 - 3\cos(x)\right)^2 - 1 \\
&= \cos(x)^2 + 4\cos(x)^4 - 4\cos(x)^2 + 1 + 16\cos(x)^6 - 24\cos(x)^4 + 9\cos(x)^2 - 1 \\
&= 6\cos(x)^2 - 20\cos(x)^4 + 16\cos(x)^6 \\
&= 2\cos(x)^2\left(3 - 10\cos(x)^2 + 8\cos(x)^4\right) \\
&= 2\cos(x)^2\left(2\cos(x)^2 - 1\right)\left(4\cos(x)^2 - 3\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $S(x)$ s'annule si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x)^2 = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x)^2 = \dfrac{3}{4}$. C'est-à-dire $S(x)$ s'annule si et seulement si

$$\cos(x) \in \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

On rappelle qu'on ne cherche ici que les solutions sur le segment $[0, \pi]$. Alors $x \in [0, \pi]$ est solution de $\cos(x)^2 + \cos(2x)^2 + \cos(3x)^2 = 1$ si et seulement si x appartient à l'ensemble

$$\mathcal{S}ol = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Réponse de l'exercice 4.39

Comme l'indication nous le suggère on va calculer $S_1 + iS_2$.

$$\begin{aligned}
S_1 + iS_2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(kx) + i\sin(kx))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \\
&= \left(1+e^{ix}\right)^n \\
&= \left(e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right)\right)^n \\
&= \left(e^{i\frac{x}{2}} 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \\
&= 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} \\
&= 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_1 = \mathrm{Re}(S_1 + iS_2) = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$S_2 = \mathrm{Im}(S_1 + iS_2) = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Réponse de l'exercice 4.40

On va procéder d'une manière similaire à l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=1}^{n} \cos\left((2k-1)\theta\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} e^{2i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right) \qquad \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta}} \frac{e^{-in\theta}-e^{in\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta} \frac{-2i\sin(n\theta)}{-2i\sin(\theta)}\right) \\
&= \frac{\sin(n\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

On a exclu le cas $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, si $\theta = m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \cos\left((2k-1)\theta\right) = \cos\left(2km\pi - m\pi\right) = \cos(\theta) = (-1)^m$$

D'où

$$S_1 = \begin{cases} n\cos(\theta) \text{ si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(n\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\cos(2k\theta)}{2} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta}\right) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\theta}\right) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right) \qquad \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta}}\frac{e^{-in\theta}-e^{in\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}\right) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{2\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

On a exclu le cas $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, si $\theta = m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \cos\left(k\theta\right))^2 = \cos\left(km\pi^2\right)\right) = \left((-1)^{km}\right)^2 = 1$$

D'où

$$S_1 = \begin{cases} n \text{ si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{2\sin(\theta)} \text{ sinon} \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 4.41

Soit $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$

Alors

$$\begin{aligned}
S + iS' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) + i\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\cos(a+kb) + i\sin(a+kb)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+kb)} \\
&= e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ib}\right)^k \\
&= e^{ia}\left(1+e^{ib}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^n e^{ia} \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n e^{i\frac{nb}{2}} \\
&= 2^n \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n e^{i\frac{2a+nb}{2}} \\
&= 2^n \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(\frac{2a+nb}{2}\right) + i2^n \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n \sin\left(\frac{2a+nb}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$S = 2^n \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(\frac{2a+nb}{2}\right)$$

Réponse de l'exercice 4.42

— Si $\theta \in \{2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \cos(k\theta) = n$.

Sinon, notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \cos(k\theta)$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \sin(k\theta)$ et $S_n = R_n + iI_n$.

On a alors

$$\begin{aligned}
S_n &= R_n + iI_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \cos(k\theta) + i \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \sin(k\theta) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \left(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(\theta) e^{i\theta}\right)^k \\
&= \cos(\theta) e^{i\theta} \frac{1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}}{1 - \cos(\theta) e^{i\theta}} \\
&= \cos(\theta) e^{i\theta} \frac{1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}}{1 - \cos(\theta) e^{i\theta}} \frac{1 - \cos(\theta) e^{-i\theta}}{1 - \cos(\theta) e^{-i\theta}} \\
&= \cos(\theta)(e^{i\theta} - \cos(\theta)) \frac{1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}}{1 - \cos(\theta)^2} \\
&= i\cos(\theta)\sin(\theta) \frac{1 - \cos(\theta)^n \cos(n\theta) - i\cos(\theta)^n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= \frac{\cos(\theta)^{n+1}\sin(n\theta) + i\left(\cos(\theta) - \cos(\theta)^{n+1}\cos(n\theta)\right)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

Comme $R_n = \mathrm{Re}(S_n)$ on a ainsi

$$R_n = \begin{cases} n & \text{si } \theta \in \{2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{\cos(\theta)^{n+1}\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} & \text{sinon} \end{cases}$$

— On suppose ici que $\theta \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ de sorte que $\cos(\theta) \neq 0$.

Si $\theta \in \{k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos(\theta)^k} = n+1.$

Sinon, notons $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos(\theta)^k}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{\cos(\theta)^k}$ et $C_n = A_n + iB_n$.

On a alors

$$\begin{aligned}
C_n &= A_n + iB_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{\cos(\theta)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}\right)^k \\
&= \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{\cos(\theta)^n}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}} \\
&= \frac{1}{\cos(\theta)^n} \frac{\cos(\theta)^{n+1} - e^{i(n+1)\theta}}{\cos(\theta) - e^{i\theta}} \\
&= \frac{}{\cos(\theta)^n} \frac{\cos(\theta)^{n+1} - e^{i(n+1)\theta}}{-i\sin(\theta)} \\
&= \frac{i}{\cos(\theta)^n \sin(\theta)} \big(\cos(\theta)^{n+1} - \cos((n+1)\theta) - i\sin((n+1)\theta)\big) \\
&= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\cos(\theta)^n \sin(\theta)} + i\frac{\cos(\theta)^{n+1} - \cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta)^n \sin(\theta)}
\end{aligned}$$

Comme $A_n = \mathrm{Re}(C_n)$ on a ainsi

$$A_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } \theta \in \{2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\cos(\theta)^n \sin(\theta)} & \text{sinon} \end{cases}$$

— Si $\theta \in \{k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta) = 2n+1.$

Sinon, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta) &= \sum_{j=0}^{2n} \exp(i(j-n)\theta) \\
&= \frac{1}{e^{in\theta}} \sum_{j=0}^{2n} \exp(ij\theta) \\
&= \frac{1}{e^{in\theta}} \frac{1 - e^{i(2n+1)\theta}}{1 - \exp(i\theta)} \\
&= \frac{1}{e^{in\theta}} \frac{e^{i\frac{(2n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(2n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(2n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{-2i\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ainsi

$$\sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } \theta \in \{2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 4.43

1. On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\theta) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. D'après la question précédente on a

$$f(\theta) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si

$$\theta - \frac{\pi}{4} \in \left\{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

C'est-à-dire

$$\theta - \frac{\pi}{4} \in \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

D'où

$$\theta \in \{\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. On a $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{3}cos(x) - \sin(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ainsi

$$\sqrt{3}cos(x) - \sin(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

On a $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ si et seulement si

$$x + \frac{\pi}{6} \in \left\{\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

C'est-à-dire

$$x + \frac{\pi}{6} \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

D'où

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Chapitre 5

Fonctions de référence

Exercices

Exercice 5.1

Déterminer l'ensemble de définition, justifier de la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

a : $x \mapsto x^3 \cos(x+1)$
b : $x \mapsto e^{\cos(x)}$
c : $x \mapsto x\ln(x)$
d : $x \mapsto \ln(e^x+1)$
e : $x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$
f : $x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$
g : $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
h : $x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$
i : $x \mapsto \ln(\cos(2x))$
j : $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$
k : $x \mapsto \ln(x-\sqrt{x^2-1})$
l : $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$
m : $x \mapsto \ln(\ln(x))$
n : $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
o : $x \mapsto \ln(1+\exp(-\dfrac{1}{x}))$
p : $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$
q : $x \mapsto \cos x(1+\tan x \tan \dfrac{x}{2})$
r : $x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$
s : $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin(x)}{b+a\cos(x)}\right)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > b > 0$.
t : $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
u : $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x)+\sqrt{\mathrm{ch}(x)^2-1})$

Exercice 5.2

Déterminer l'ensemble de définition et une primitive des fonctions suivantes. On pourra introduire la fonction auxiliaire u suggérée

a : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ $\quad u : x \mapsto e^{-x}$
b : $x \mapsto e^{2x}+3e^x+2$
c : $x \mapsto \sin^3(x)\cos(x)$ $\quad u : x \mapsto \sin(x)$
d : $x \mapsto \dfrac{x}{(4+x^2)^3}$ $\quad u : x \mapsto 4+x^2$

e : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$ $\quad u : x \mapsto \cos(x)$

f : $x \mapsto x(1+x^2)^5$ $\quad u : x \mapsto 1+x^2$

g : $x \mapsto x^2\sqrt{1+x^3}$ $\quad u : x \mapsto 1+x^3$

h : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$ $\quad u : x \mapsto \cos(x)$

i : $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln(x))^3}$ $\quad u : x \mapsto 1+\ln(x)$

j : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$ $\quad u : x \mapsto \ln(\ln(x))$

k : $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad u : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$

l : $x \mapsto \mathrm{ch}(x)\sin(2x)$ Chercher une primitive sous la forme $x \mapsto \alpha e^x\cos(2x)+\beta e^x\sin(2x)+\gamma e^{-x}\cos(2x)+\delta e^{-x}\sin(2x)$

m : $x \mapsto (x^2+2x+2)\cos(2x)$ Chercher une primitive sous la forme $x \mapsto (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sin(2x)+(\delta x+\epsilon)\cos(2x)$.

Exercice 5.3

Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

Exercice 5.4

1. Montrer que la composée de deux fonctions monotone de même sens (resp. des sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que le somme de deux fonctions croissantes est croissante.
3. La somme de deux fonctions monotone est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux fonctions croissantes est-il nécessairement une fonction croissante ?

Exercice 5.5

Montrer que, pour tout couple $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

$$\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Exercice 5.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x+2)+\ln(x-2) = \ln(x^2-4)$$

Exercice 5.7

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{4+9x^2}$

2. Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{6x}{4+9x^2}$
3. En déduire une primitive de $h : x \mapsto \dfrac{3x+2}{4+9x^2}$
4. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

En déduire une primitive de $p : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

5. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2,3\} \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

En déduire une primitive de $q : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. Déterminer (a,b,c) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

En déduire une primitive de $r : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Exercice 5.8

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que

$$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \qquad \text{et } \cos(t) = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

3. Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(t)} \end{array}$

En posant $u(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, déterminer une primitive de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5.9

Déterminer l'ensemble de définition et une primitive des fonctions suivantes. On pourra introduire la fonction auxiliaire u suggérée

a : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ $\quad u : x \mapsto e^{-x}$

b : $x \mapsto e^{2x} + 3e^x + 2$

c : $x \mapsto \sin^3(x)\cos(x) \quad u : x \mapsto \sin(x)$

d : $x \mapsto \dfrac{x}{(4+x^2)^3} \quad u : x \mapsto 4+x^2$

e : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2} \quad u : x \mapsto \cos(x)$

f : $x \mapsto x(1+x^2)^5 \quad u : x \mapsto 1+x^2$

g : $x \mapsto x^2\sqrt{1+x^3} \quad u : x \mapsto 1+x^3$

h : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^3} \quad u : x \mapsto \cos(x)$

i : $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln(x))^3} \quad u : x \mapsto 1+\ln(x)$

j : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} \quad u : x \mapsto \ln(\ln(x))$

Exercice 5.10

Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$
- $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
- $a^b a^c = a^{bc}$
- $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$
- $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$
- $(a+b)^c = a^c + b^c$
- $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$

Exercice 5.11

Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

Exercice 5.12

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{4+9x^2}$
2. Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{6x}{4+9x^2}$
3. En déduire une primitive de $h : x \mapsto \dfrac{3x+2}{4+9x^2}$
4. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

   En déduire une primitive de $p : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

5. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2,3\} \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

En déduire une primitive de $q : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. Déterminer (a,b,c) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

En déduire une primitive de $r : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Exercice 5.13

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)^3 \end{array} \qquad b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)^4 \end{array} \qquad c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)^3\cos(x)^3 \end{array}$$

On pourra penser à linéariser

Exercice 5.14

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que

$$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \qquad \text{et} \ \cos(t) = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(t)} \end{array}$

En posant $u(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, déterminer une primitive de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5.15

Résoudre les équations suivantes

1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$
3. $\left(x^2\right)^x = x^{\left(x^2\right)}$
4. $\left(x^2\right)^x = x^{\left(x^2\right)}$
5. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Réponses

Réponse de l'exercice 5.1

a : $x \mapsto x^3 \cos(x+1)$

a est définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \cos(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a'(x) = 3x^2 \cos(x+1) - x^3 \sin(x+1)$$

b : $x \mapsto e^{\cos(x)}$

b est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. b est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$b'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$$

c : $x \mapsto x\ln(x)$

c est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. c est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$c'(x) = \ln(x) + 1$$

d : $x \mapsto \ln(e^x + 1)$

La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$d'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

e : $x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

e est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$$

f : $x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\, e^{\sqrt{x^2+x+1}}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

g : $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$. h est alors définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. h est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

h : $x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

La fonction $x \mapsto x^2-2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. i est alors définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. La fonction $x \mapsto x^2-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. i est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ comme quotient de fonctions dérivables et
En particulier, pour $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$, on a

$$i'(x) = -\frac{(2x^2-4)\sin(x) + 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2}$$

i : $x \mapsto \ln(\cos(2x))$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$. On sait que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x)$ est strictement positif si et seulement si x est dans un intervalle de la forme $\left]\alpha\pi - \frac{\pi}{4}, \alpha\pi\frac{\pi}{4}\right[$ avec k un entier relatif. Ainsi j est définie sur $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} \left]\alpha\pi - \frac{\pi}{4}, \alpha\pi\frac{\pi}{4}\right[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. j est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme composée de fonction dérivables.
En particulier, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a

$$j'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

j : $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule sur $\pi\mathbb{Z}$. k est alors définie sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ comme quotient de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in]0, \pi[$, on a

$$k'(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

k : $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

La fonction $x \mapsto x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais ne prend des valeurs positives que sur $]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2-1}$ est définie sur $]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Cette fonction ne prend toutefois des valeurs strictement positives que sur $[1, +\infty[$. La fonction $x\ mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.
Alors la fonction l est définie sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composition de fonctions dérivables.
Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$l'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

l : $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Elle est positive sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est définie sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction m est alors définie sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
En particulier, pour $x \in]1,+\infty[$, on a

$$m'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

m : $x \mapsto \ln(\ln(x))$
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]1,+\infty[$.
n est alors définie et dérivable sur $]1,+\infty$ comme composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in]1,+\infty[$, on a

$$n'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

n : $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]e,+\infty[$. La fonction o est alors définie et dérivable sur $]e,+\infty$ comme composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in]e,+\infty[$, on a

$$o'(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

o : $x \mapsto \ln(1+\exp(-\frac{1}{x}))$
La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Ainsi la fonction $x \mapsto 1+\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Elle prend des valeurs toujours strictement positives. Donc p est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$p'(x) = \frac{1}{x^2\left(1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

p : $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$
La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule qu'en 0. Ainsi q est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$q'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

q : $x \mapsto \cos(x)\left(1+\tan(x)\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$
La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+\alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+\alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $x \mapsto \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi+2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{\pi+2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}$.
Ainsi r est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}\cup\{\pi+2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}\right)$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a

$$r'(x) = 0$$

En effet, si on effectue des simplifications trigonométriques, on peut se rendre compte que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\pi \ , \ \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\beta\pi \ , \ \beta \in \mathbb{Z}\}\right)$, $r(x) = 1$

r : $x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^x = e^{x\ln(x)}$.Elle prend des valeurs strictement positives et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in R_+^x$ on peut réécrire $(x^x)^{2x+1} = \exp((2x+1)\ln(e^{x\ln(x)}) = \exp((2x^2+x)\ln(x))$. La fonction $x \mapsto \exp((2x^2+x)\ln(x))$ est définie et dérivable sur R_+^* et prend des valeurs strictement positives. De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi s est définie et dérivable sur R_+^* comme composée de fonctions dérivables

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$s'(x) = \frac{(x^x)^{2x+1}\left((2x+1)\left(\ln(x)+1\right) + 2 \cdot x \cdot \ln(x)\right)}{2\sqrt{(x^x)^{2x+1}}}$$

s : $x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin(x)}{b + a\cos(x)}\right)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > b > 0$.

Remarquons que, si $a < 0$ alors, comme $b < a$, $a^2 - b^2 < 0$ et donc $\sqrt{a^2 - b^2}$ n'est pas définie. Si $b < 0$ on va avoir le même genre de problème si $b < -|a|$. Pour simplifier on va supposer $a > b > 0$.

L'application $x \mapsto \sqrt{a^2-b^2}\sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. L'application $x \mapsto b + a\cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule sur $\{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 2\alpha\pi \ , \ \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 2\beta\pi \ , \ \beta \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. t est ainsi définie sur $\mathbb{R} \backslash \left(\{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 2\alpha\pi \ , \ \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\operatorname{arcc}\right.$
et dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Sur un tel intervalle, on a

$$t'(x) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a + b\cos(x)}$$

t : $x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$, s'annule en -1 et 1 et est dérivable sur $]-1, 1[$. Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et dérivable sur $]-1, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u est définie et dérivable sur $]-1, 1[$ comme composition des fonctions dérivables.

On a, pour $x \in]-1, 1[$,

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

u : $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1})$

La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle prend des valeurs supérieures ou égales à 1 et ne prend la valeur 1 qu'en 0. Ainsi la fonction $x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Par suite la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}$ est est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ et prend des valeurs supérieures ou égales à 1. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$v'(x) = 1$$

et, pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ on a
$$v'(x) = -1$$
En effet, il est possible de montrer que, pour tout réel x, $v(x) = |x|$.

Réponse de l'exercice 5.2

a : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$

d est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $d(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. En posant $u : x \mapsto e^{-x}$ on a alors $d = \dfrac{-u'}{1+u}$ Un primitive de d est alors $-\ln(1 + u)$.
C'est-à-dire,
$$D \mapsto -\ln\left(1 + e^{-x}\right)$$
est une primitive de d.

b : $x \mapsto e^{2x} + 3e^x + 2$

e est définie sur $\mathbb{R}$.
$$E : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + 2x$$
est une primitive de e.

c : $x \mapsto \sin^3(x)\cos(x)$

f est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto \sin(x)$. On alors $a = u'u^3$. Une primitive de f est alors $\dfrac{u^4}{4}$.
C'est-dire,
$$F : x \mapsto \frac{\sin(x)^4}{4}$$
est une primitive de f.

d : $x \mapsto \dfrac{x}{(4 + x^2)^3}$

g est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto 4 + x^2$. On a alors $g = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^3}$. Une primitive de g est alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{u^2} = \dfrac{-1}{4u^2}$
C'est-à-dire
$$G : x \mapsto \frac{-1}{4(2 + x^2)^2}$$
est une primitive de g.

e : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$

h est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u = \cos(x)$. On a alors $h = \dfrac{-u'}{u^2}$. Une primitive de h est alors $\dfrac{1}{u}$
C'est-à-dire
$$H : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$
est une primitive de h.

f : $x \mapsto x(1 + x^2)^5$

i est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto 1 + x^2$. Alors $i = \dfrac{1}{2}u'u^5$. Une primitive de i est alors $\dfrac{1}{12}u^6$
C'est-à-dire
$$I : x \mapsto \frac{(1 + x^2)^6}{12}$$
est une primitive de i.

g : $x \mapsto x^2\sqrt{1+x^3}$

j est définie sur $[-1,+\infty[$. Posons $u : x \mapsto 1+x^3$. Alors $j = \dfrac{1}{3}u'\sqrt{u}$. Une primitive de j est alors $\dfrac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}$
C'est-à-dire

$$J : x \mapsto \frac{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}$$

est une primitive de j.

h : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$

k est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi\ n\in\mathbb{Z}\}$.

Posons $u : x \mapsto \cos(x)$. On a alors $k = \dfrac{-u'}{u^3}$. Une primitive de k est alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^2}$
C'est-à-dire

$$K : x \mapsto \frac{1}{2\cos(x)^2}$$

est une primitive de k.

i : $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln(x))^3}$

l est définie sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{e^{-1}\}$. Posons $u : x \mapsto 1+\ln(x)$. On a alors $l = \dfrac{u'}{u^3}$. Une primitive de l est alors $\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{u^2}$
C'est-à-dire

$$L : x \mapsto \frac{-1}{2(1+\ln(x))^2}$$

est une primitive de l.

j : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

m est définie sur $]1,+\infty[\backslash\{e\}$. On sait, grâce à l'exercice 1 que

$$M : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$$

est une primitive de m.

k : $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

a est définie sur $\mathbb{R}^*$. Posons $u : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, on a alors $a = u'ue^u$. On va alors chercher une primitive sous la forme $(\alpha u+\beta)e^u$. Pour $\alpha, beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$((\alpha u+\beta)e^u)' = \alpha u'e^u + \alpha uu'e^u + \beta u'e^u = \alpha u'ue^u + (\beta+\alpha)u'e^u$$

En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ on obtient

$$((u-1)e^u)' = uu'e^u$$

On en déduit que $A : x \mapsto \left(-\dfrac{1}{x}-1\right)e^{-\frac{1}{x}}$ est un primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$

l : $x \mapsto \text{ch}(x)\sin(2x)$.

b est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$ on a $b(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\sin(2x)$. On va chercher une primitive de b sous la forme $x \mapsto \alpha e^x\cos(2x)+\beta e^x\sin(2x)+\gamma e^{-x}\cos(2x)+\delta e^{-x}\sin(2x)$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ et soit $B : x \mapsto \alpha e^x\cos(2x)+\beta e^x\sin(2x)+\gamma e^{-x}\cos(2x)+\delta e^{-x}\sin(2x)$

Alors

$$\begin{aligned}B'(x) &= \alpha e^x\cos(2x) - 2\alpha e^x \sin(2x) + \beta e^x \sin(2x) + 2\beta e^x\cos(2x)\\ &\quad - \gamma e^{-x}\cos(2x) - 2\gamma e^{-x}\sin(2x) - \delta e^{-x}\sin(2x) + 2\delta e^{-x}\cos(2x)\\ &= e^x\cos(2x)(\alpha+2\beta) + e^x\sin(2x)(\beta-2\alpha) + e^{-x}\cos(2x)(-\gamma+2\delta) + e^{-x}\sin(2x)(-2\gamma-\delta)\end{aligned}$$

Il nous faut alors trouver $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $B'=b$, c'est-à-dire tel que

$$\alpha+2\beta=0 \quad \beta-2\alpha=\frac{1}{2} \quad -\gamma+2\delta=0 \quad -2\gamma-\delta=\frac{1}{2}$$

On obtient

$$\alpha=-\frac{1}{5} \quad \beta=\frac{1}{10} \quad \gamma=-\frac{1}{10} \quad \delta=-\frac{1}{5}$$

De sorte que

$$B : x\mapsto \frac{1}{10}\,e^x\,(\sin(2\,x)-2\cos(2\,x)) + \frac{1}{10}\,e^{(-x)}\,(-\sin(2\,x)-2\cos(2\,x))$$

est une primitive de b.

m : $x\mapsto (x^2+2x+2)\cos(2x)$.

c est définie sur $\mathbb{R}$. On va chercher une primitive de c sous la forme $x\mapsto(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sin(2x)+(\delta x+\epsilon)\cos(2x)$
Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)\in\mathbb{R}^5$ et $C : x\mapsto(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sin(2x)+(\delta x+\epsilon)\cos(2x)$
Alors, pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}C'(x) &= (2\alpha x+\beta)\sin(2x) + (2\alpha x^2+2\beta x+2\gamma)\cos(2x) + \delta\cos(2x) - (2\delta x + 2\epsilon\sin(2x)\\ &= ((2\alpha-2\delta)x + (\beta-2\epsilon))\sin(2x) + (2\alpha x^2+2\beta x+2\gamma+\delta)\cos(2x)\end{aligned}$$

Il nous faut alors trouver $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)\in\mathbb{R}^5$ tel que

$$\alpha=\delta \quad \beta=2\delta \quad 2\alpha=1 \quad 2\beta=2 \quad 2\gamma+\delta=2$$

On trouve alors

$$\alpha=\frac{1}{2} \quad \beta=1 \quad \gamma=\frac{3}{4} \quad \delta=\frac{1}{2} \quad \epsilon=\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$C : x\mapsto \frac{1}{2}\,x^2\sin(2\,x)+\frac{3}{4}\sin(2\,x)+\frac{1}{2}\,x\cos(2\,x)+\frac{1}{2}\cos(2\,x)+x\sin(2\,x)$$

est une primitive de c.

Réponse de l'exercice 5.3

Soit $f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin(x)-x+\dfrac{x^3}{6}\end{array}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $f(x)\geqslant 0$.
Pour cela dérivons f. Pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$$

Le signe de f' n'est pas évident, il va falloir continuer. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f''(x)=-\sin(x)+x$$

On sait que, pour $x \geqslant 0$, on a $\sin(x) \leqslant x$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f''(x) \geqslant 0$.

f' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f'(x) \geqslant f'(0)$. Or $f'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 0$.

f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant f(0)$. Or $f(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$$

Soit maintenant $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} \end{array}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant 0$.

Pour cela dérivons g. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

Le signe de g' n'est pas évident, il va falloir continuer. g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g''(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6}$$

On vient de prouver que, pour tout réel positif x, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g''(x) \leqslant 0$.

g' est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g'(x) \leqslant g'(0)$. Or $g'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g'(x) \leqslant 0$.

g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant g(0)$. Or $g(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Soit $h : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geqslant 0$$

Ainsi h est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad h(x) \geqslant h(0)$$

Or $h(0) = 0$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0 \qquad x \geqslant \ln(1+x)$$

Soit enfin $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \end{array}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad k'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 - (x+1) + x^2 + x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0$$

Ainsi k est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad k(x) \geqslant k(0)$$

Or $k(0)=0$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

Réponse de l'exercice 5.4

1. Soit f et g deux fonctions monotones définies sur I et J avec $f(I) \subset J$.
   Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$.
   - Supposons d'abord que f et g sont croissantes toutes les deux.
     Alors, par croissance de f on a $f(x) \leqslant f(y)$, puis, par croissance de g, $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$.
     $g \circ f$ est donc croissante.
   - Supposons maintenant que f et g sont décroissantes toutes les deux.
     Alors, par décroissance de f on a $f(x) \geqslant f(y)$, puis, par décroissance de g, $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$.
     $g \circ f$ est donc croissante.
   - Supposons maintenant que f est croissante et g est décroissante.
     Alors, par croissance de f on a $f(x) \leqslant f(y)$, puis, par décroissance de g, $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$.
     $g \circ f$ est donc décroissante.
   - Supposons enfin que f est décroissante et g est croissante.
     Alors, par décroissance de f on a $f(x) \geqslant f(y)$, puis, par croissance de g, $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$.
     $g \circ f$ est donc décroissante.
2. Soit f et g deux fonctions croissantes définies sur I.
   Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$.
   Alors
   $$f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$$
   $f+g$ est donc croissante.
3. Soit
   $$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \quad g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x \end{array}$$
   f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle sont donc bien monotones.
   Soit $h = f+g$. h n'est alors pas croissante car $h(0) = 0 \geqslant h(1) = -1$ et h n'est pas décroissante car $h(-1) = -1 \leqslant h(2) = 0$. h n'est donc pas monotone.
   Ainsi la somme de deux fonctions monotone n'est pas nécessairement monotone.
4. Soit
   $$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \quad g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$
   f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}_-$.
   On a $f \times g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
   $f \times g$ n'est donc pas croissante.
   Ainsi le produit de deux fonctions croissantes n'est pas nécessairement une fonction croissante.

Réponse de l'exercice 5.5

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On a

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

D'où

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} &= \frac{\ln(ab)}{2}\\ &= \ln(\sqrt{ab})\\ &\leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

On aboutit bien au résultat voulu.

Réponse de l'exercice 5.6

La vraie « difficulté »de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x les expressions considérées ont un sens.

La fonction $x \mapsto \ln(x+2)$ est définie sur $]-2,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(x-2)$ est définie sur $]2,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \ln(x^2-4)$ est définie sur $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

On en déduit alors que notre expression n'a de sens que pour $x \in]2,+\infty[$.

Pour $x \in]2,+\infty[$ on a

$$\ln(x^2-4) = \ln((x-2)(x+2)) = \ln(x-2)+\ln(x+2)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation

$$\ln(x+2)+\ln(x-2) = \ln(x^2-4)$$

est $]2,+\infty[$.

Réponse de l'exercice 5.7

Remarquons tout d'abord que, pour tout réel x, $4+9x^2>0$.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{4+9x^2}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$f(x) = \frac{1}{2^2+(3x)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{1}{6}\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}$$

   Posons $u : x \mapsto \dfrac{3}{2}x$. On a alors

   $$f = \frac{1}{6}\frac{u'}{1+u^2}$$

   On en déduit que $\dfrac{1}{6}\arctan(u)$ est une primitive de f. Ainsi

   $$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{6}\arctan\left(\dfrac{3}{2}x\right)\end{array}$$

   est une primitive de F.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{6x}{4+9x^2}$
Posons $v : x \mapsto 4+9x^2$, alors on a
$$g = \frac{1}{3}\frac{v'}{v}$$
On en déduit que $\dfrac{1}{3}\ln(v)$ est une primitive de g.
Ainsi
$$\begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{3}\ln(4+9x^2) \end{array}$$
est une primitive de G.
3. Soit $h : x \mapsto \dfrac{3x+2}{4+9x^2}$.
On a $h = \dfrac{g}{2} + 2f$. $\dfrac{G}{2} + 2F$ est donc une primitive de h.
Ainsi
$$\begin{array}{rccc} H & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{6}\left(\ln(4+9x^2) + 2\arctan\left(\dfrac{3}{2}x\right)\right) \end{array}$$
est une primitive de H.
4. Soit $p : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
On sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$
En particulier
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1+x} = a + \frac{b(1-x)}{1+x}$$
En faisant tendre x vers 1 dans l'égalité précédente on obtient
$$\frac{1}{2} = a$$
De même, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x} = \frac{a(1+x)}{1-x} + b$$
En faisant tendre x vers -1 dans cette égalité, on obtient
$$\frac{1}{2} = b$$
Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$
On sait que de plus que $x \mapsto -\ln(|1-x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et que $x \mapsto \ln(|1+x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
D'où
$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(|1+x|) - \frac{1}{2}\ln(|1-x|)$$

est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$

Finalement

$$\begin{array}{rcccc} P & : & \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) \end{array}$$

est une primitive de P.

5. Soit $q :\mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Ici on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2,3\} \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2\cdot(x-3)}$$

Par suite

$$Q : x \mapsto \frac{\ln(x-1)}{2} - \ln(x-2) + \frac{\ln(x-3)}{2}$$

est une primitive de $q : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. Soit $r :\mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Ici on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5\cdot(x+2)} - \frac{x}{5\cdot(x^2+2\cdot x+5)}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} == \frac{1}{5\cdot(x+2)} - \frac{1}{10}\frac{2x+2}{\cdot(x^2+2\cdot x+5)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+1)^2+2^2}$$

Par suite

$$R : x \mapsto \frac{\ln(x+2)}{5} - \frac{\ln\left(x^2+2\cdot x+5\right)}{10} + \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

est une primitive de $r : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Réponse de l'exercice 5.8

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$1 + \tan(x)^2 = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(t) &= \sin\left(2\times\frac{t}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\tan\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right))^2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$= \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

2. Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc}\left[0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \frac{1}{\cos(t)}\end{array}$

   On pose $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Soit $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a alors

$$f(t) = \frac{1+u(t)^2}{1-u(t)^2} = \frac{u'(t)}{1-u(t)^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2u'(t)}{1-u(t)^2}$$

   On retrouve la dérivée de $-\frac{1}{2}\ln\left(1-u(t)^2\right)$

   Ainsi $F \ : \ \begin{array}{ccc}\left[0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & -\frac{1}{2}\ln\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\end{array}$

   est une primitive de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Réponse de l'exercice 5.9

a : $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

d est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $d(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En posant $u : x \mapsto e^{-x}$ on a alors $d = \frac{-u'}{1+u}$ Un primitive de d est alors $-\ln(1+u)$.
C'est-à-dire,

$$D \mapsto -\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

est une primitive de d.

b : $x \mapsto e^{2x} + 3e^x + 2$

e est définie sur $\mathbb{R}$.

$$E : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + 2x$$

est une primitive de e.

c : $x \mapsto \sin^3(x)\cos(x)$

f est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto \sin(x)$. On alors $a = u'u^3$. Une primitive de f est alors $\dfrac{u^4}{4}$.

C'est-dire,

$$F : x \mapsto \frac{\sin(x)^4}{4}$$

est une primitive de f.

d : $x \mapsto \dfrac{x}{(4+x^2)^3}$

g est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto 4 + x^2$. On a alors $g = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^3}$. Une primitive de g est alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{u^2} = \dfrac{-1}{4u^2}$

C'est-à-dire

$$G : x \mapsto \frac{-1}{4(2+x^2)^2}$$

est une primitive de g.

e : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$

h est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u = \cos(x)$. On a alors $h = \dfrac{-u'}{u^2}$. Une primitive de h est alors $\dfrac{1}{u}$

C'est-à-dire

$$H : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

est une primitive de h.

f : $x \mapsto x(1+x^2)^5$

i est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $u : x \mapsto 1 + x^2$. Alors $i = \dfrac{1}{2}u'u^5$. Une primitive de i est alors $\dfrac{1}{12}u^6$

C'est-à-dire

$$I : x \mapsto \frac{(1+x^2)^6}{12}$$

est une primitive de i.

g : $x \mapsto x^2\sqrt{1+x^3}$

j est définie sur $[-1, +\infty[$. Posons $u : x \mapsto 1 + x^3$. Alors $j = \dfrac{1}{3}u'\sqrt{u}$. Une primitive de j est alors $\dfrac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}$

C'est-à-dire

$$J : x \mapsto \frac{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}$$

est une primitive de j.

h : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$

k est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Posons $u : x \mapsto \cos(x)$. On a alors $k = \dfrac{-u'}{u^3}$. Une primitive de k est alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^2}$

C'est-à-dire
$$K : x \mapsto \frac{1}{2\cos(x)^2}$$
est une primitive de k.

i : $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln(x))^3}$

l est définie sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{e^{-1}\}$. Posons $u : x \mapsto 1+\ln(x)$. On a alors $l = \dfrac{u'}{u^3}$. Une primitive de l est alors $\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{u^2}$
C'est-à-dire
$$L : x \mapsto \frac{-1}{2(1+\ln(x))^2}$$
est une primitive de l.

j : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

m est définie sur $]1,+\infty[\backslash\{e\}$. Posons $u : x \mapsto \ln(\ln(x))$. On a alors $m = \dfrac{u'}{u}$. Une primitive de m est alors $\ln(|u|)$, C'est-à-dire, comme u est positive sur $]1,+\infty[\backslash\{e\}$,
$$M : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$$
est une primitive de m.

Réponse de l'exercice 5.10

- $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$ FAUX, on a, par exemple $\left(2^1\right)^2 = 4$ et $2^{(1^2)} = 2$.
- $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ VRAI, en effet
$$\left(a^b\right)^c = \exp(c\ln(a^b)) = \exp(c\ln(\exp(b\ln(a)))) = \exp(cb\ln(a)) = a^{bc}$$
- $a^b a^c = a^{bc}$ FAUX, on a, par exemple, $2^1 \times 2^1 = 4$ et $2^{1\times1} = 2$.
- $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$ VRAI, c'est un cas particulier de la deuxième égalité avec $c = 2$
- $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}}b^{\frac{c}{2}}$ FAUX, on a, par exemple $(2\times2)^2 = 16$ et $2^{\frac{2}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}} = 4$.
- $(a+b)^c = a^c + b^c$ HORRIBLEMENT FAUX, on a, par exemple, $(1+1)^2 = 4$ et $1^2+1^2 = 2$.
- $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$ VRAI, c'est une conséquence de la deuxième égalité, les deux termes étant égaux à a^{bc}.

Réponse de l'exercice 5.11

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} \end{array}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant 0$. Pour cela dérivons f. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$
Le signe de f' n'est pas évident, il va falloir continuer. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f''(x) = -\sin(x) + x$$

On peut s'arrêter là si sait que, pour $x \geqslant 0$, on a $\sin(x) \leqslant x$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f''(x) \geqslant 0$.

Si pour une raison ou une autre on a oublié que, pour $x \geqslant 0$, on a $\sin(x) \leqslant x$ on peut continuer à dériver, on a alors, pour $x \geqslant 0$,

$$f'''(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$$

Ainsi f'' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f''(0) = 0$ on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) \geqslant 0$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.

f' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f'(x) \geqslant f'(0)$. Or $f'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 0$.

f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant f(0)$. Or $f(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$$

Soit maintenant $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} \end{array}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant 0$.

Pour cela dérivons g. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

Le signe de g' n'est pas évident, il va falloir continuer. g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g''(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6}$$

On vient de prouver que, pour tout réel positif x, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g''(x) \leqslant 0$.

g' est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g'(x) \leqslant g'(0)$. Or $g'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g'(x) \leqslant 0$.

g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant g(0)$. Or $g(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Soit $h : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geqslant 0$$

Ainsi h est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad h(x) \geqslant h(0)$$

Or $h(0) = 0$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0 \qquad x \geqslant \ln(1+x)$$

Soit enfin $k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \end{array}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad k'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1-(x+1)+x^2+x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0$$

Ainsi k est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad k(x) \geqslant k(0)$$

Or $k(0) = 0$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

Réponse de l'exercice 5.12

Remarquons tout d'abord que, pour tout réel x, $4 + 9x^2 > 0$.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{4+9x^2}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x) = \frac{1}{2^2 + (3x)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{1}{6}\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}$$
   Posons $u : x \mapsto \dfrac{3}{2}x$. On a alors
   $$f = \frac{1}{6}\frac{u'}{1+u^2}$$
   On en déduit que $\dfrac{1}{6}\arctan(u)$ est une primitive de f. Ainsi
   $$\begin{array}{rcll} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{6}\arctan\left(\dfrac{3}{2}x\right) \end{array}$$
   est une primitive de F.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{6x}{4+9x^2}$
   Posons $v : x \mapsto 4 + 9x^2$, alors on a
   $$g = \frac{1}{3}\frac{v'}{v}$$
   On en déduit que $\dfrac{1}{3}\ln(v)$ est une primitive de g.
   Ainsi
   $$\begin{array}{rcll} G & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{3}\ln(4+9x^2) \end{array}$$
   est une primitive de G.
3. Soit $h : x \mapsto \dfrac{3x+2}{4+9x^2}$.
   On a $h = \dfrac{g}{2} + 2f$. $\dfrac{G}{2} + 2F$ est donc une primitive de h.
   Ainsi
   $$\begin{array}{rcll} H & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{6}\left(\ln(4+9x^2) + 2\arctan\left(\dfrac{3}{2}x\right)\right) \end{array}$$
   est une primitive de H.

4. Soit $p : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
On sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$
En particulier
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1+x} = a + \frac{b(1-x)}{1+x}$$
En faisant tendre x vers 1 dans l'égalité précédente on obtient
$$\frac{1}{2} = a$$
De même, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x} = \frac{a(1+x)}{1-x} + b$$
En faisant tendre x vers -1 dans cette égalité, on obtient
$$\frac{1}{2} = b$$
Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$
On sait que de plus que $x \mapsto -\ln(|1-x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et que $x \mapsto \ln(|1+x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
D'où
$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(|1+x|) - \frac{1}{2}\ln(|1-x|)$$
est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$
Finalement
$$\begin{array}{cccc} P & : & \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) \end{array}$$
est une primitive de P.

5. Soit $q :\mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
Ici on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2,3\} \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2\cdot(x-3)}$$
Par suite
$$Q : x \mapsto \frac{\ln(x-1)}{2} - \ln(x-2) + \frac{\ln(x-3)}{2}$$
est une primitive de $q : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. Soit $r :\mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Ici on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5\cdot(x+2)} - \frac{x}{5\cdot(x^2+2\cdot x+5)}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \qquad \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} == \frac{1}{5\cdot(x+2)} - \frac{1}{10}\frac{2x+2}{\cdot(x^2+2\cdot x+5)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+1)^2+2^2}$$

Par suite

$$R : x \mapsto \frac{\ln(x+2)}{5} - \frac{\ln\left(x^2+2\cdot x+5\right)}{10} + \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

est une primitive de $r : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

Réponse de l'exercice 5.13

— Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\\ &= \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a(x) = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$$

Cette dernière expression est facile à primitiver.

La fonction $A \;:\; \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(3x)}{12}+\dfrac{3\sin(x)}{4}\end{array}$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

— Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\sin(x)^4 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4\\ &= \frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}\\ &= \frac{\cos(4x)-4\cos(2x)+3}{8}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad b(x) = \frac{\cos(4x)-4\cos(2x)+3}{8}$$

On en déduit que $B \;:\; \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(4x)}{32}-\dfrac{\sin(2x)}{4}+\dfrac{3}{8}x\end{array}$ est une primitive de b sur $\mathbb{R}$.

— Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\sin(x)^3\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^3}{-64i} \\
&= \frac{e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}}{-64i} \\
&= \frac{3\sin(2x)-\sin(6x)}{32}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad c(x) = \frac{3\sin(2x)-\sin(6x)}{32}$$

On en déduit que $B \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(6x)}{192} - \dfrac{3\cos(2x)}{64} \end{array}$ est une primitive de c sur $\mathbb{R}$.

Réponse de l'exercice 5.14

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$1+\tan(x)^2 = 1+\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \sin\left(2\times\frac{t}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\tan\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right))^2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 \\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

2. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{\cos(t)} \end{array}$

   On pose $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a alors

$$f(t) = \frac{1+u(t)^2}{1-u(t)^2} = \frac{u'(t)}{1-u(t)^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2u'(t)}{1-u(t)^2}$$

   On retrouve la dérivée de $-\frac{1}{2}\ln\left(1-u(t)^2\right)$

   Ainsi $\begin{array}{cccc} F & : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & -\frac{1}{2}\ln\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) \end{array}$

   est une primitive de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

Réponse de l'exercice 5.15

1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

   Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que pour $x \in]0, +\infty[$. On se limitera donc à cet ensemble.

   Soit $x > 0$, on a alors

$$x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x}\ln(x)) \qquad \text{et } \sqrt{x}^x = \exp(x\ln(\sqrt{x}) = \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right)$$

   La fonction exponentielle étant bijective, notre équation est alors équivalente à l'équation

$$\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x)$$

   x étant strictement positif, on peut multiplier par $\frac{1}{\sqrt{x}}$ de part et d'autre de notre équation. En multipliant par 2 et en passant tous les termes d'un coté on aboutit alors à l'équation

$$\ln(x)\left(\sqrt{x}-2\right) = 0$$

   C'est-à-dire

$$\ln(x) = 0 \qquad \text{ou } \sqrt{x} = 2$$

   Les solutions de cette équation sont 1 et 4.

   Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ est $\{1, 4\}$.

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$
   On va travailler par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de cette équation. Posons $y = \exp(x) > 0$.
   y vérifie alors $y + \dfrac{e}{y} = e + 1$. Ainsi, y vérifie $y^2 - (e+1)y + e = 0$, c'est-à-dire $(y-e)(y-1) = 0$.
   On a donc $x \in \{1, e\}$, d'où $x \in \{0, 2\}$.
   Il est ensuite aisé de vérifier que 0 et 1 sont bien des solutions de l'équation $e^x + e^{1-x} = e + 1$.
   Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $e^x + e^{1-x} = e + 1$ est $\{0, 1\}$.
3. $\left(x^2\right)^x = x^{\left(x^2\right)}$
   Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que pour $x \in]0, +\infty[$. On se limitera donc à cet ensemble.
   Soit $x > 0$, on a alors
   $$\left(x^2\right)^x = x^{2x} = \exp(2x\ln(x)) \qquad \text{et} \qquad x^{\left(x^2\right)} = \exp(x^2\ln(x))$$
   La fonction exponentielle étant bijective, notre équation est alors équivalente à l'équation
   $$2x\ln(x) = x^2\ln(x)$$
   C'est-à-dire
   $$x(x-2)\ln(x) = 0$$
   On voit facilement que l'ensemble des solutions de l'équation $\left(x^2\right)^x = x^{\left(x^2\right)}$ est $\{1, 2\}$.
4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
   Notre équation est équivalente à
   $$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$
   C'est-à-dire
   $$4^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
   Voire encore
   $$\exp\left(x\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}}$$
   Finalement on aboutit à
   $$x\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = 3\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$$
   D'où
   $$x = \frac{3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)}{2\ln(2) - \ln(3)} = \frac{6\ln(2) - 3\ln(3)}{4\ln(2) - 2\ln(3)}$$
   L'ensemble des solutions de l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ est donc $\left\{\dfrac{6\ln(2) - 3\ln(3)}{4\ln(2) - 2\ln(3)}\right\}$

Chapitre 6

Introduction aux équations différentielles

Exercices

Exercice 6.1

Résoudre les problème de Cauchy suivants :

(P_1) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(P_2) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(P_3) $\begin{cases} y' + 5y = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

(P_4) $\begin{cases} y' - 2y = 6 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(P_5) $\begin{cases} y' + y + 1 = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

(P_6) $\begin{cases} 2y' - y + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 6.2

Résoudre les problème de Cauchy suivants :

$$(P_1)\ \begin{cases} y''=y \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \qquad (P_6)\ \begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$$(P_2)\ \begin{cases} y''+5y'=y+2 \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad (P_7)\ \begin{cases} y''-1=2y'+y \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$$(P_3)\ \begin{cases} y''=6 \\ y(0)=8 \\ y'(0)=-1 \end{cases} \qquad (P_8)\ \begin{cases} y''+y'-2y=3 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

$$(P_4)\ \begin{cases} y''-6y'+13y=0 \\ y(0)=4 \\ y'(0)=4 \end{cases} \qquad (P_9)\ \begin{cases} y''+y'=1 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

$$(P_5)\ \begin{cases} y''-4y'+4y=8 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad (P_{10})\ \begin{cases} y''+12y'+23y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Exercice 6.3

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'=4x-3y \\ y'=2x-y \end{cases}$$

Exercice 6.4 Cinétique chimique d'ordre 1

Considérons un système réactionnel fermé, de volume V constant, constitué d'un certain nombre d'espèces physicochimiques $A, B, C, \ldots$; on note $[A](t)$ (resp. $[B](t)$, etc) la concentration.en espèce A

Une réaction d'ordre 1 par rapport à A est une réaction de la forme :

$$\alpha A(+\beta B+\cdots) \to \varphi F+\gamma G+\cdots$$

Dans ce cas la concentration de A vérifie l'équation différentielle :

$$[A]'(t)=-\alpha k[A](t)$$

où k est la constante de vitesse de la réaction, qui ne dépend que de la température.

1. On part d'une concentration initiale en espèce A de $[A]_0$. Exprimer $[A](t)$ en fonction de t.
2. On appelle temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$ la durée au bout de laquelle la moitié de l'avancement final est atteint. Ici il s'agit de la durée nécessaire pour que la quantité de matière du réactif limitant $[A]$ soit égale à la moitié de sa valeur initiale. Déterminer $t_{\frac{1}{2}}$.

Les réactions d'ordre 1 sont notamment des réactions comportant un seul réactif (qui subit une décomposition, une isomérisation ...), ou dans lesquelles un soluté réagit avec le solvant.

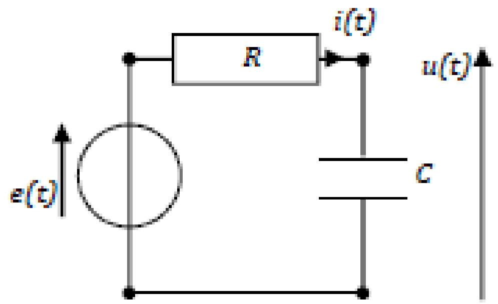
— Décomposition du peroxyde d'hydrogène : $2H_2O_{2(aq)}=2H_2O_{(l)}+O_{2(g)}$
— Décomposition du pentoxyde d'azote gazeux : $2N_2O_{5(g)}=4NO2(g)+O_{2(g)}$
— Isomérisation du cyclopropane en propène : $(CH_2)_3=CH_3-CH=CH_2$

— Hydrolyse d'un chlorure organique : $R - CL_{(aq)} + H_2O_{(l)} = R - OH_{(aq)} + HCl_{(aq)}$

Exercice 6.5 Circuit R-C

Dans cet exercice, on s'intéresse au montage suivant :

Figure 6.1 – Circuit R-C



L'intensité $i(t)$ du courant à travers le condensateur vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad i(t) = Cu'_C(t)$$

où $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

La loi des mailles donne très simplement l'équation différentielle caractéristique de ce montage :

$$\forall t \geqslant 0 \quad RCu'_C(t) + u_C(t) = e(t)$$

Cette équation fait apparaître la constante caractéristique $\tau = RC$. La quantité τ est homogène à un temps. On l'appelle constante de temps du circuit $R - C$. L'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur est donc :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \tau u'_C(t) + u_C(t) = e(t)$$

1. On dit que le circuit est en évolution libre lorsque $\forall t \geqslant 0$ $e(t) = 0$. C'est une situation qui correspond au montage dans le cas où la source est éteinte. La tension aux bornes de la capacité vérifie alors

$$\forall t \geqslant 0 \quad \tau u'(t) + u(t) = 0$$

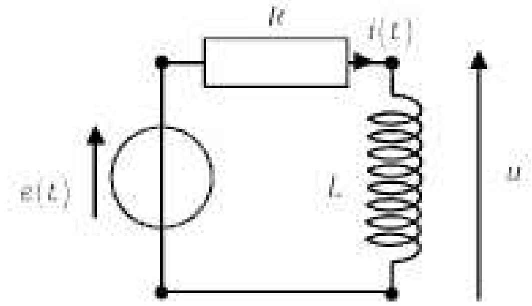
   On suppose que la tension initiale au borne du condensateur vaut u_0. Déterminer l'expression de $u_C(t)$ en fonction de t pour $t \geqslant 0$

2. On suppose maintenant que le condensateur est initialement déchargé : la tension à ses bornes est nulle. On se place dans la situation ou le générateur délivre une tension indicielle telle que $\forall t > 0 e(t) = U$ où U est constante. Déterminer alors l'expression de de $u_C(t)$ en fonction de t pour $t \geqslant 0$.

Exercice 6.6 Circuit R-L

Dans toute cette parte, on s'intéresse au montage suivant :

Figure 6.2 – Circuit R-L



La tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine idéale vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_L(t) = Li'(t)$$

où $i(t)$ est l'intensité du courant traversant la bobine.

La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

En utilisant la loi des mailles on montre aisément que l'intensité dans le montage vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \geqslant 0 \quad \frac{L}{R}i'(t) + i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

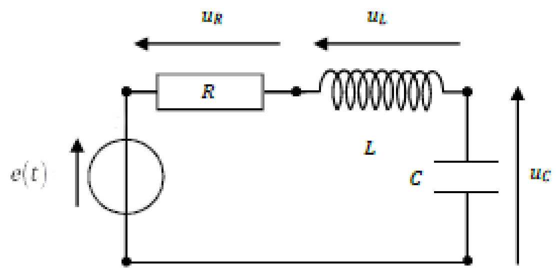
Cette équation fait apparaître la constante de temps caractéristique $\tau = \dfrac{L}{R}$.

1. On étudie l'établissement du courant dans le circuit. On suppose alors que l'intensité initiale du courant de le circuit est nulle. On se place dans la situation ou le générateur délivre une tension indicielle telle que $\forall t > 0 e(t) = U$ où U est constante. Déterminer alors l'expression de de $i(t)$ en fonction de t pour $t \geqslant 0$.
2. On dit que le circuit est en évolution libre lorsque $\forall t \geqslant 0$ $e(t) = 0$. C'est une situation qui correspond au montage dans le cas où la source est éteinte. On suppose que l'intensité initiale du courant dans le circuit vaut i_0. Déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction de t pour $t \geqslant 0$

Exercice 6.7 Circuit R-L-C

Dans cet exercice, on s'intéresse au montage suivant :

Figure 6.3 – Circuit R-L-C



On rappelle que :

— L'intensité $i(t)$ du courant à travers le condensateur vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad i(t) = Cu'_C(t)$$

où $u_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

— La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine idéale vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_L(t) = Li'(t)$$

où $i(t)$ est l'intensité du courant traversant la bobine.

— La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

La tension aux bornes du condensateur ,$u_C(t)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) + RCu'_C(t) + LCu''(t) = e(t)$$

On peut introduire la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

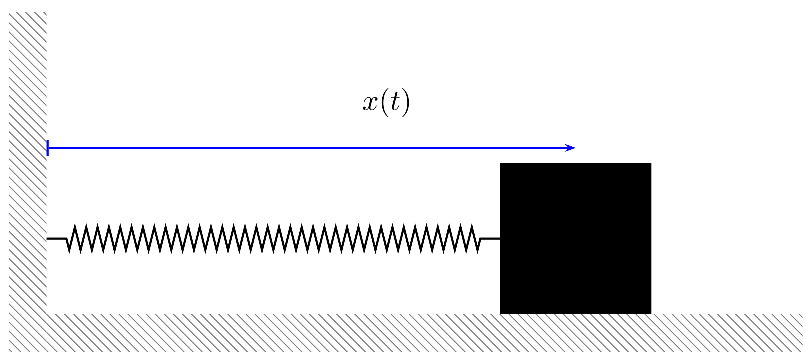
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

1. Réécrivez l'équation différentielle vérifiée par u_C en faisant apparaître ω_0 et Q.
2. On suppose que le générateur délivre une tension constante $\forall t \geqslant 0 U(t) = U$ et qu'à l'instant initial $t = 0$ le circuit se trouve dans l'état $u_C(0) = 0$ et $i(0) = 0$. Déterminer les expressions de $u_C(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps t.

Exercice 6.8 Masse reliée à un ressort (Oscillateur harmonique linéaire)

On se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on se donne un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. On attache une extrémité de ce ressort à un repère fixe d'abscisse 0 et l'autre extrémité à une masse m qui repose sur le sol.

Figure 6.4 – Masse reliée à un ressort



La masse est alors soumise à la tension du ressort, à la gravité et à la réaction du sol. On suppose que les frottements sont négligeables.

Quand la masse se trouve à une distance $x(t)$ du repère fixe vertical elle subit alors une force de rappel $\overrightarrow{R}$ telle que

$$\overrightarrow{R} = -k(x(t) - \ell_0)\overrightarrow{u}$$

Le principe fondamental de la dynamique nous dit alors que

$$mx''(t) = -k(x(t) - \ell_0)$$

1. On suppose que la masse part d'une position initiale $x_0 = \dfrac{1}{2}\ell_0$. Déterminer la position $x(t)$ à tout instant $t \geqslant 0$.
2. On suppose dans cette question que la masse est également soumise à une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F} = -\lambda x'(t)\overrightarrow{u}$ et, là encore, que la masse part d'une position initiale $x_0 = \dfrac{1}{2}\ell_0$. Déterminer la position $x(t)$ à tout instant $t \geqslant 0$. On prendra $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $m = 4 \times 10^{-2}$ et $k = 25$.

Exercice 6.9

Déterminer les fonctions réelles deux fois dérivables f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f'(t) = f(-t)$$

Indication : On pourra dériver cette relation

Exercice 6.10

Déterminer les solutions f de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

vérifiant

$$f(1) = \max_{x \in [0,1]} f(x)$$

Réponses

Réponse de l'exercice 6.1

(P_1) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_1 \qquad y' - y = 0$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_1$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^t$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^t$. La condition initiale $y(0) = 1$ impose alors $K = 1$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto e^t$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$

(P_2) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_2 \qquad y' - y = 0$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_2$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^t$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^t$. La condition initiale $y(0) = 0$ impose alors $K = 0$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto 0$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$

(P_3) $\begin{cases} y' + 5y = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_3 \qquad y' + 5y = 0$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_3$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^{-5t}$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^{-5t}$. La condition initiale $y(0) = -2$ impose alors $K = -2$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto -2e^{-5t}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$

(P_4) $\begin{cases} y' - 2y = 6 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_4 \qquad y' - 2y = 6$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_4$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^{2t} - 3$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^{2t} - 3$. La condition initiale $y(0) = 0$ impose alors $K = 3$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto 3e^{2t} - 3$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$

(P_5) $\begin{cases} y' + y + 1 = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_5 \qquad y' + y = -1$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_5$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^{-t} - 1$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^{-t} - 1$. La condition initiale $y(0) = 4$ impose alors $K = 5$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto 5e^{-t} - 1$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$

(P_6) $\begin{cases} 2y' - y + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_6 \qquad y' - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}$$

D'après le cours, les solutions de l'équation $\mathcal{E}_6$ sont de la forme $y : t \mapsto Ke^{\frac{t}{2}} + 1$.
Soit alors $y : t \mapsto Ke^{\frac{t}{2}} + 1$. La condition initiale $y(0) = 1$ impose alors $K = 0$.
Ainsi la fonction $y : t \mapsto 1$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$

Réponse de l'exercice 6.2

(P_1) $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_1 \qquad y'' - y = 0$$

Cette équation est homogène. Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{E}_1$ est $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
P admet donc deux racines réelles distinctes 1 et -1.
On sait alors que les solutions de $\mathcal{E}_1$ sont de la forme

$$y : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B$$

$$y'(0) = A - B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (1, 0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^t$$

$$(P_2) \begin{cases} y'' + 5y' = y + 2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ admet une unique solution. Si on a de l'intuition on pourrait le trouver tout de suite et conclure que c'est la seule. On va faire comme si on n'avait aucune intuition à ce sujet.
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_2 \qquad y'' + 5y' - y = 2$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_2 \qquad y'' + 5y' - y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_2$ est $P(x) = x^2 + 5x - 1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $25 + 4 = 29$. P admet deux racines réelles distinctes

$$\lambda = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad \mu = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \{y : t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_2$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_2}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_2$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -2$ est une solution de $\mathcal{E}_2$.

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \{t \mapsto 2 + Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - 2$$

$$y'(0) = \lambda A + \mu B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B - 2 = -2 \\ \lambda A + \mu B = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B) = (0,0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ est la fonction

$$y : t \mapsto -2$$

$$(P_3) \begin{cases} y'' = 6 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Ce problème peut très bien être résolu de manière simple sans utiliser la méthode vue en cours.
On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ admet une unique solution. Soit y cette solution.
On a alors $y'' = 6$. Ainsi y' est un primitive de la fonction constante égale à 6. C'est donc une fonction de la forme $y' : t \mapsto 6t + K$, où K est une constante. On sait que $y'(0) = -1$, ainsi $K = -1$.
Par suite y est une primitive de la fonction $t \mapsto 6t - 1$. Elle est donc de la forme $y : t \mapsto 3t^2 - t + C$, où C est une constante. On sait que $y(0) = 8$, ainsi $C = 8$.
Finalement l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

Retrouvons ce résultat en appliquant la méthode du cours
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_3 \qquad y'' = 6$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_3 \qquad y'' = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_3$ est $P(x) = x^2$. P admet 0 comme racine double.
l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_3$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \{y : t \mapsto Ae^{0t} + Bte^{0t} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_3$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_3} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_3}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_3$. On ne peut pas trouver de fonctions constante ou affine qui fonctionne. On essaye alors les polynômes de degré 2 et on voit alors que $t \mapsto 3t^2$ est une solution de $\mathcal{E}_3$ Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_3} = \{t \mapsto 3t^2 + A + Bt \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (8, -1)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est la fonction

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

$$(P_4) \quad \begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_4 \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$$

Cette équation est homogène.
Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_4$ est $P(x) = x^2 - 6x + 13$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $36 - 4 \times 13 = -16$. P admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = 3 + 2i \qquad \mu = 3 - 2i$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_4$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_4} = \{y : t \mapsto e^3t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \;,\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = 3A + 2B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 4 \\ 3A + 2B = 4 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (4, -4)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^{3t}\,(4\cos(2t) - 4\sin(2t))$$

On peut réutiliser ce que l'on a vu en trigonométrie pour mettre cette fonction sous une autre forme. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z = 4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Alors

$$4\cos(2t) - 4\sin(2t) = \mathrm{Re}(\overline{z}e^{2it}) = 4\sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto 4\sqrt{2}e^{3t}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(P_5)\ \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_5 \qquad y'' - 4y' + 4y = 8$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_5 \qquad y'' - 4y' + 4y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_5$ est $P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
P admet un racine réelle double 2.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_5} = \{y : t \mapsto Ae^{2t} + Bte^{2t}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_5$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_5} = \{y + y_0\ ,\ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_5}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_5$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto 2$ est une solution de $\mathcal{E}_5$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_5} = \{t \mapsto Ae^{2t} + Bte^{2t} + 2\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + 2$$

$$y'(0) = 2A + B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + 2 = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B) = (-1,2)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ est la fonction

$$y : t \mapsto +(2t-1)e^{2t} + 2$$

$$(P_6)\ \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_6 \qquad y'' + y = 0$$

Cette équation est homogène.
Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_6$ est $P(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$.
P admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = i = 0 + i \qquad \mu = -i = 0 - i$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_6$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_6} = \{y : t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (1, 1)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ est la fonction

$$y : t \mapsto \cos(t) + \sin(t)$$

On peut réutiliser ce que l'on a vu en trigonométrie pour mettre cette fonction sous une autre forme. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ est la fonction

$$y : t \mapsto \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(P_7)\ \begin{cases} y'' - 1 = 2y' + y \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_7 \qquad y'' - 2y' - y = 1$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_7 \qquad y'' - 2y' - y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_7$ est $P(x) = x^2 - 2x - 1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 8. P admet deux racines réelles distinctes $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_7$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_7} = \{y : t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t} + Be^{(1+\sqrt{2})t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_7$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_7$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_7} = \{y + y_0\ ,\ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_7}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_7$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -1$ est une solution de $\mathcal{E}_7$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_7} = \{t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t} + Be^{(1+\sqrt{2})t} - 1\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - 1$$

$$y'(0) = (1-\sqrt{2})A + (1+\sqrt{2})B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ (1-\sqrt{2})A + (1+\sqrt{2})B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1-\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t} - 1$$

C'est-à-dire

$$y : t \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t}\left(2e^{\sqrt{2}t} - 1\right) - 1$$

$$(P_8)\ \begin{cases} y'' + y' - 2y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_8 \qquad y'' + y' - 2y = 3$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_8 \qquad y'' + y' - 2y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_8$ est $P(x) = x^2 + x - 2$.

Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 9. P admet deux racines réelles distinctes -2 et 1.

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_8$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_8} = \{y : t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_8$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_8$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_8} = \{y + y_0\ ,\ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_8}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_8$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -\frac{3}{2}$ est une solution de $\mathcal{E}_8$.

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_8} = \left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t} - \frac{3}{2}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - \frac{3}{2}$$

$$y'(0) = B - 2A$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{3}{2} \\ B-2A=2 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B)=\left(-\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{3}\right)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{5}{3}e^{t}-\frac{3}{2}$$

$$(P_9)\ \begin{cases} y''+y'=1 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

Soit y l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_9$. Soit $z=y'$. Alors z vérifie

$$\begin{cases} z'+z=1 \\ z(0)=2 \end{cases}$$

Ainsi $z : t \mapsto e^{-t}+1$. y est alors une primitive de z. D'où

$$y : t \mapsto -e^{-t}+t+C$$

où C est une constante.
Comme $y(0)=3$ on alors $C=4$. Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_9$ est

$$y : t \mapsto -e^{-t}+t+4$$

$$(P_{10})\ \begin{cases} y''+12y'+23y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_9$ admet une unique solution. On remarque aisément que la fonction $y : t \mapsto 0$ est une solution de $\mathcal{P}_9$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_9$ est

$$y : t \mapsto 0$$

Réponse de l'exercice 6.3

On va procéder par analyse-synthèse :

Soit (x,y) une solution du système. Alors

$$x'=4x-3y$$

D'où

$$x''=4x'-3y'=4x'-3(2x-y)=4x'-6x+3y=4x'-6x+(4x-x')=3x'-2x$$

Ainsi $x''-3x'+2=0$.

Le polynôme caractéristique de cette équation est $P(t)=t^2-3t+2$. Les racines de P sont 1 et 2. Ainsi il existe deux constantes réelles A et B telles que $x : t \mapsto Ae^{t}+Be^{2t}$.

Par suite on a

$$y = \frac{4x - x'}{3}$$

D'où

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Ainsi, si x et y sont solutions du système alors il existe deux constantes A et B telles que

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Réciproquement il est facile de vérifier que, si x et y sont définies par

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

avec A et B deux constantes réelles, alors x et y sont solution de notre système.

Ainsi l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{ \left(t \mapsto Ae^t + Be^{2t}, t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3} \right) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Réponse de l'exercice 6.4

1. La fonction $t \mapsto [A](t)$ vérifie l'équation différentielle

$$y' + \alpha k y = 0$$

   Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0 \quad [A](t) = Ce^{-\alpha k t}$$

   La condition initiale $[A](0) = [A]_0$ nous donne alors $C = [A]_0$ et donc

$$\forall t \geqslant 0 \quad [A](t) = [A]_0 e^{-\alpha k t}$$

2. On cherche à déterminer le temps $t_{\frac{1}{2}}$ tel que

$$\forall t t_{\frac{1}{2}} \geqslant [A](t) \leqslant \frac{[A]_0}{2}$$

   Soit $t \geqslant 0$, on a $[A](t) \leqslant [A]_0$ si et seulement si

$$e^{-\alpha k t} \leqslant \frac{1}{2}$$

   c'est-à-dire si et seulement si

$$t \geqslant \frac{\ln(2)}{\alpha k}$$

   On a donc

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\alpha k}$$

Réponse de l'exercice 6.5

1. Dans le cas de l'évolution libre, u_C est une solution de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{\tau}y = 0$$

Ainsi il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

La condition $u_C(0) = u_0$ nous donne alors

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. Dans ce cas de , u_C est une solution de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{U}{\tau}$$

Ainsi il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + U$$

La condition $u_C(0) = 0$ nous donne alors

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Réponse de l'exercice 6.6

1. Dans le premier cas i est une solution de l'équation

$$y' + \frac{1}{tau}y = \frac{U}{L}$$

Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{R}$$

La condition $i(0) = 0$ nous donne alors K et on a

$$\forall t \geqslant 0 i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

2. Dans le cas de l'évolution libre, alors i est une solution de l'équation

$$y' + \frac{1}{tau}y = 0$$

Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}0$$

La condition $i(0) = i_0$ nous donne alors K et on a

$$\forall t \geqslant 0 i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Réponse de l'exercice 6.7

1. Avec ces nouvelles notations on voit que u_C est une solution de l'équation différentielle suivante :
$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 e(t)$$
Remarquons que Q est toujours positif.
2. Dans cette situation u_C est une solution de
$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 U$$
Le polynôme caractéristique associé est
$$P(x) = x^2 + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$
On va déterminer les racines de P. Son discriminant est $\dfrac{\omega^2}{Q^2}(1-4Q^2)$
   - Ainsi, si $Q < \dfrac{1}{2}$ alors P admet deux racines réelles distinctes
$$\frac{\omega}{2Q}(-1-\sqrt{1-4Q^2}) = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} \qquad \text{et } \frac{\omega_0}{2Q}(-1+\sqrt{1-4Q^2}) = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}$$
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + \dfrac{\omega_0}{2Q}y' + \omega_0^2 y$ est alors
$$\left\{t \mapsto e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(Ae^{-\frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}t} + Be^{\frac{-\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}t}\right)\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. La fonction constante $u : t \mapsto U$ convient.
Ainsi, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(Ae^{-\frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}t} + Be^{\frac{-\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}t}\right)$$
De plus, on sait que $u_C u(0) = 0$ et que $i(0) = u_C'(0) = 0$. On en déduit alors
$$\begin{cases} A + B + U = 0 \\ \dfrac{\omega}{2Q}(-1-\sqrt{1-4Q^2})A + \dfrac{\omega}{2Q}(-1+\sqrt{1-4Q^2})B = 0 \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} A + B = -U \\ B - A = \dfrac{-U}{\sqrt{1-4Q^2}} \end{cases}$$
Ainsi
$$A = -U\frac{-1+\sqrt{1-4Q^2}}{2\sqrt{1-4Q^2}} \qquad B = -U\frac{1+\sqrt{1-4Q^2}}{2\sqrt{1-4Q^2}}$$
Finalement on obtient
$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U\left(1 - \frac{-1+\sqrt{1-4Q^2}}{2\sqrt{1-4Q^2}}e^{\frac{\omega}{2Q}(-1-\sqrt{1-4Q^2})t} - \frac{1+\sqrt{1-4Q^2}}{2\sqrt{1-4Q^2}}e^{\frac{\omega}{2Q}(-1+\sqrt{1-4Q^2})t}\right)$$
La forme exacte est peu élégante. On constate par contre que la tension $u_C(t)$ tend à s'équilibrer en la valeur U.

- Si $Q = \dfrac{1}{2}$ alors P admet une racine double $-\omega_0$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y$ est alors
$$\left\{t \mapsto e^{-\omega_0 t}\left(A + Bt\right)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. La fonction constante $u : t \mapsto U$ convient.
Ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U + e^{-\omega_0 t}\left(A + Bt\right)$$
De plus, on sait que $u_C u(0) = 0$ et que $i(0) = u_C'(0) = 0$. On en déduit alors
$$\begin{cases} U + A = 0 \\ -\omega_0 A + B = 0 \end{cases}$$
D'où
$$A = -U \quad B = -\omega_0 U$$
Finalement on obtient
$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U\left(1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right)$$
On constate de même que la tension $u_C(t)$ tend à s'équilibrer en la valeur U.
- Enfin si $Q > \dfrac{1}{2}$ alors P admet deux racines complexes conjuguées
$$\frac{\omega_0}{2Q}(-1 - i\sqrt{4Q^2 - 1} \qquad \text{et } \frac{\omega_0}{2Q}(-1 + i\sqrt{4Q^2 - 1})$$
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y$ est alors
$$\left\{t \mapsto e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right)\right)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. La fonction constante $u : t \mapsto U$ convient.
Ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right)\right)$$
De plus, on sait que $u_C u(0) = 0$ et que $i(0) = u_C'(0) = 0$. On en déduit alors
$$\begin{cases} A + U = 0 \\ -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \dfrac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}B = 0 \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} A = -U \\ -A + \sqrt{4Q^2-1}B = 0 \end{cases}$$
Ainsi
$$A = -U \qquad B = -\frac{U}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

Finalement on obtient

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right)\right)\right)$$

La forme exacte est peu élégante. On constate par contre que la tension $u_C(t)$ tend à s'équilibrer en oscillant en la valeur U.

Réponse de l'exercice 6.8

1. La position à l'instant t est une solution du problème

$$\begin{cases} y'' + \frac{k}{m}y = \frac{k\ell_0}{m} \\ y(0) = \frac{\ell_0}{2} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de cette équation est $P = X^2 + \frac{k}{m}$ qui admet deux racines complexes conjuguées $i\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$.
La fonction constante $t \mapsto \ell_0$ est une solution particulière de l'équation $y'' + \frac{k}{m}x = \frac{k\ell_0}{m}$, ce qui est physiquement logique, si on part de la position d'équilibre la masse ne bougera pas.
Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x : t \mapsto A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \ell_0$$

On sait que $x(0) = \frac{\ell_0}{2}$, ainsi $A = -\frac{\ell_0}{2}$.
Il nous manque une hypothèse sur la vitesse initiale $x'(0)$ pour déterminer entièrement x. Pour simplifier supposons que le solide parte sans vitesse initiale, soit $x'(0) = 0$. On en déduit alors que

$$\begin{array}{rccc} x & : & \mathbb{R} & \rightarrow & R \\ & & t & \mapsto & \frac{\ell_0}{2}\left(2 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) \end{array}$$

Le solide oscille donc entre les positions $\frac{\ell_0}{2}$ et $\frac{3\ell_0}{2}$ avec une période de $\frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}$.

2. En prenant en compte le frottement visqueux on aboutit à

$$mx''(t) = -k(x(t) - \ell_0) - \lambda x'(t)$$

D'où au problème

$$\begin{cases} y'' + \frac{\lambda}{m}y' + \frac{k}{m}x = \frac{k\ell_0}{m} \\ y(0) = \frac{\ell_0}{2} \end{cases}$$

On prend $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $m = 4 \times 10^{-2}$ et $k = 25$, ce qui nous donne le problème

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{200}y' + \frac{2500}{4}y = \frac{2500\ell_0}{4} \\ y(0) = \frac{\ell_0}{2} \end{cases}$$

Là encore la fonction constante $t \mapsto \ell_0$ est une solution particulière de l'équation.
Le polynôme caractéristique est alors $P = X^6 2 + \dfrac{1}{200} X + \dfrac{2500}{4}$. Son discriminant est $\Delta = \dfrac{1}{40000} - 2500 < 0$.
On a alors deux racines complexes conjuguées qui sont $\dfrac{-1}{400} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-1}{400} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
On peut remarquer que $\sqrt{-\Delta}$ vaut à peu près 50, plus précisément $\left|\sqrt{-\Delta} - 50\right| \leqslant 10^{-6}$. On prendra alors $\sqrt{-\Delta} = 50$ par la suite pour simplifier les écritures.
On en déduit qu'il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x : t \mapsto e^{-\frac{t}{400}} \left(A\cos(25t) + B\sin(25t)\right) + \ell_0$$

La condition $x(0) = \dfrac{\ell_0}{2}$ nous donne $A = -\dfrac{\ell_0}{2}$. Si on suppose de nouveau que $x'(0) = 0$, on a alors $B = 0$, d'où

$$\begin{array}{cccc} x & : & \mathbb{R} & \rightarrow & R \\ & & t & \mapsto & \dfrac{\ell_0}{2}\left(2 - e^{-\frac{t}{400}}\cos(25t)\right) \end{array}$$

Le solide oscille donc entre les positions $\dfrac{\ell_0}{2}$ et $\dfrac{3\ell_0}{2}$ avec une période de $\dfrac{2\pi}{25}$ et une amplitude qui décroit exponentiellement au cours du temps.

Réponse de l'exercice 6.9

On va procéder par analyse-synthèse :

Soit f une fonction réelle deux fois dérivables telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f'(t) = f(-t)$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f''(t) = -f'(-t) = -f(t)$$

Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

On va utiliser l'équation pour obtenir plus d'information sur A et B. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = B\cos(t) - A\sin(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(-t) = A\cos(t) - B\sin(t)$$

Ainsi, comme, pour tout réel t, on a $f'(t) = f(-t)$ alors $B = A$ et $-A = -B$, c'est-à-dire $A = B$.

On a donc montré que, si f vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f'(t) = f(-t)$$

alors il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = A(\cos(t) + \sin(t))$$

Réciproquement, il est aisé de vérifier que, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = A(\cos(t) + \sin(t))$$

alors f vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f'(t) = f(-t)$$

Ainsi l'ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f'(t) = f(-t)$$

est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto A(\cos(t) + \sin(t)) \ , \ A \in \mathbb{R}\}$$

Réponse de l'exercice 6.10

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ae^t + Be^{2t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$. On va étudier les variations de f. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = Ae^t + 2Be^{2t} = e^t \left(A + 2Be^t\right)$$

Si B est nul alors f est croissante si A est positif et alors $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(1)$ et si A est négatif alors f est décroissante et $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(0)$

Supposons alors B non-nul. Soit $t \in [0, 1]$ on a $f'(t) = 0$ si et seulement si $e^t = -\dfrac{A}{2B}$. On en déduit alors que, si $-\dfrac{A}{2B} \notin [1; e]$, alors f' ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Comme f' est continue alors f' est de signe constant.

Si A et B sont négatifs alors f est décroissante et

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f(0)$$

Si A et B sont positifs alors f est croissante et

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f(1)$$

Si A est positif et B est négatif alors f est croissante sur $\left]-\infty, \ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right)\right]$ et décroissante sur $\left[\ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right), +\infty\right[$, on a alors $f(1) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ si $\ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right) \geqslant 1$

Si A est négatif et B est positif alors f est croissante sur $\left]-\infty, \ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right)\right]$ et décroissante sur $\left[\ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right), +\infty\right[$, en étudiant les variations de f on voit alors que $f(1) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ si $\ln\left(-\dfrac{A}{2B}\right) \leqslant -\ln(2(1-e))$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

qui vérifient

$$f(1) = \max_{x\in[0,1]} f(x)$$

est

$$\{t \mapsto Ae^t+Be^{2t} \ , \ (A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2\} \cup \{t \mapsto Ae^t+Be^{2t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \ln\left(-\frac{A}{2B}\right) \in]-\infty, -\ln(2(1+e))] \cup [1, +\infty[\}$$

Chapitre 7

Suites réelles

Exercices

Exercice 7.1

Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n

1. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_3 = 1 \\ \forall n \in [\![3, +\infty[\![\quad u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in [\![1, +\infty[\![\quad u_{n+1} = u_n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in [\![1, +\infty[\![\quad u_{n+1} = -u_n + 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_2 = 4 \\ \forall n \in [\![2, +\infty[\![\quad u_{n+1} = 5u_n + 1 \end{cases}$

Exercice 7.2

Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 17 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{2}u_{n+2} - 3u_{n+1} + 6u_n = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + 13u_n = 6u_{n+1} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = -12u_{n+1} - 23u_n \end{cases}$

Exercice 7.3

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. Si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle converge.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors $L > 0$.
5. La suite $\left(\dfrac{\cos(n^3)}{n+1}\right)$ est convergente.
6. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = L$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant L$.

Exercice 7.4

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-4}{x-3} \end{array}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 2]$, $f(x) \leqslant 2$.
2. Montrer que la suite est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant 2$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R} \in \backslash\{3\}$.
4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
5. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -10u_n - 28v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 16v_n \end{cases}$$

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 1$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7.6

1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + n^2$$
2. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 2^n$$

3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$$

4. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2^n u_n$$

Exercice 7.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7.8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 13u_n + 16 \end{cases}$$

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n. On pourra considérer K l'unique solution de l'équation $x = 6x - 13x + 16$ et étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - K$$

Exercice 7.9

On considère la croissance d'un amas de bactérie dans une boîte de Pétri. L'amas croît uniformément dans toutes les directions. On suppose que le taux de reproduction des bactéries est proportionnel à la surface de contact entre l'amas et le milieu nutritif. On note u_n le nombre de bactéries au jour n. Une modélisation mathématique mène au modèle suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = r u_n^{\frac{5}{3}}$$

où $r > 0$.

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et de u_0. On pourra par exemple considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \ln(u_n)$$

Exercice 7.10 (*Oral Agro-Véto 2016*)

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :
- Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année
- La probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0.25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans. Notons pour tout entier naturel n, après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25 j_n \end{cases}$$

   On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.

2. Exprimer j_n et a_n en fonction de n

Exercice 7.11

Déterminer si les suites suivantes ont une limite et, si oui, la calculer

1. $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\ln(n^2+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(e^{n-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $\left((-1)^n+\dfrac{1}{\ln(n+4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
6. $\left(e^{n+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
7. $\left(\dfrac{e^{2n}}{e^{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
8. $\left(e^{2n}-e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
9. $\left(e^{-2n}-e^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
10. $\left(\dfrac{(e^n)^n}{e^{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
11. $\left(\exp(2+\ln(3+n))\right)_{n\in\mathbb{N}}$
12. $\left(\exp(2n)^3-\exp(3n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
13. $\left(\left(ne^{2n}\right)^3-\left(2ne^{3n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
14. $\left(\dfrac{50n^4+8n^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
15. $\left(\dfrac{2n^3+n\sin(n)}{n^3+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
16. $\left(\ln(n^3+1)-3\ln(n+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
17. $\left(\dfrac{(-1)^{2n}+2n}{(-1)^{3n}+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
18. $\left(\dfrac{(-1)^n n^2+3n+1}{10n^2+10}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
19. $\left(\dfrac{\left\lfloor \frac{4n}{5}\right\rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
20. $\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor-\dfrac{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
21. $\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
22. $\left((-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
23. $\left(\ln(\sqrt{n})-\ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
24. $\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
25. $\left(\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
26. $\left(5^n-5^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
27. $\left(3^{2n}-6^{2n}+2^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
28. $\left(\left\lfloor \dfrac{n^3+1}{n^2}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 7.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 1 \\ u_{n+1} = 1+\ln(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et étudier sa convergence.

Exercice 7.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2-u_n} \end{cases}$$

1. Justifier que, pour tout entier n, $u_n \in [0,2]$. Calculer u_1 et u_2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{array}$. Montrer que $f\circ f$ est croissante.
3. En déduire la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
4. Montrer que ces deux suites convergent et déterminer leurs limites.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 7.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie
2. Montrer que, pour tout entier n, $|u_{n+1}-2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour tout entier n, $|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 7.15

Pour $n \in [\![3,+\infty[\![$ on définit l'équation

$$(E_n) \qquad\qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera x_n cette solution
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $x_n \in]0,1[$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite

---

Exercice 7.16

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 7.17

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

Exercice 7.18

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a \quad b_0 = b \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, pour tout entier n, $a_n \leqslant b_n$.
3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que ces deux suites sont convergentes.
5. En déduire qu'elles sont adjacentes.

Exercice 7.19

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note L leur limite commune.
2. Donner un encadrement de L d'amplitude inférieure à $0,01$.
3. Que pensez-vous alors de L ?

Exercice 7.20

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites respectives.

Exercice 7.21

A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$$

On appelle v la moyenne de Césaro de u.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Prouver qu'alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et ce vers la même limite.
2. Étudier la réciproque.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim(u_{n+1} - u_n) = l \in \mathbb{R}$. Prouver qu'alors $\lim \left(\frac{u_n}{n}\right) = l$.
4. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 > 0$ et par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{w_n}$.
   (a) Prouver que cette suite est croissante et tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $\lim(w_{n+1}^2 - w_n^2) = 2$.

Exercice 7.22

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 > -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

2. Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x} \end{array}$.
   Déterminer l'unique point fixe α de f sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que, si $-1 < u_0 < \alpha$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, si $u_0 > \alpha$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que, quel que soit $u_0 > -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 7.23

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [-1,1] \text{ et } u_{n+1} = 1 - \mu \times u_n^2, \text{ où } \mu \in]0,1]$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [-1,1].$$
2. Montrer que la suite converge si, et seulement si,
$$\mu \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$$
3. Montrer que, pour tout $\mu \in]0,1]$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 7.24

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Si $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. (Dans cette question et les suivantes, il est important de faire un dessin)
2. Si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
3. Pour u_0 réel quelconque, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et donner sa limite.

Exercice 7.25

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

en fonction du paramètre a.

Exercice 7.26

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation
$$x + \ln x = n$$
admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Exercice 7.27

Pour chacune des suites suivantes donner un équivalent et sa limite.

1. $\left(\ln(n^2+2n+5)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\ln\left(\dfrac{2n+5}{7n^2+3n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $\left(n^2\ln\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
6. $\left(n\ln\left(1+e^{-n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
7. $\left(4n-\sqrt{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
8. $\left(\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
9. $\left((n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
10. $\left(\dfrac{\cos(n)+\ln n}{(n+3)^2-e^{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
11. $\left(\sqrt[n]{2+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
12. $\left(n^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
13. $\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
14. $\left(\dfrac{\ln(n^2+n)}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
15. $\left(\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}}{\sqrt[3]{n^3-3n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 7.28

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\tan\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}$$

Exercice 7.29

Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 7.30

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ Montrer que $\lfloor\alpha n\rfloor\sim\alpha n$

Réponses

Réponse de l'exercice 7.1

1. $\begin{cases}u_0=-3\\ \forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=-u_n\end{cases}$

Cette suite est géométrique de raison -1. Ainsi il existe un réel A tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A(-1)^n$$

On a, en particulier $u_0 = A = -3$.
Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -3 \times (-1)^n$$

2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Soit c l'unique réel vérifiant

$$c = 3c - 4$$

C'est-à-dire $c = 2$.
On a alors

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \\ c = 3c - 4 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne de la première on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - c = 3(u_n - c)$$

La suite $(u_n - 2)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 3. Il existe alors un réel A tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 2 = A3^n$$

On a, en particulier,

$$u_0 - 2 = A = -4$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + (-4) \times 3^n$$

3. $\begin{cases} u_3 = 1 \\ \forall n \in [\![3, +\infty[\![\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Il s'agit ici d'une suite arithmétique de raison 2. Ainsi, il existe un réel A tel que

$$\forall n \in [\![3, +\infty[\![\quad u_n = A + 2n$$

On a, en particulier, $u_3 = A + 6 = 1$, d'où $A = -5$
Ainsi

$$\forall n \in [\![3, +\infty[\![\quad u_n = -5 + 2n$$

4. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in [\![1, +\infty[\![\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$

Il s'agit ici d'une suite constante. On a, de plus $u_1 = 1$.
Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1$$

5. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in [\![1, +\infty[\![\; u_{n+1} = -u_n + 2 \end{cases}$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Soit c l'unique réel vérifiant

$$c = -c + 2$$

C'est-à-dire $c = 1$.
On a alors

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}[\![1, +\infty[\![\; u_{n+1} = -u_n + 2 \\ c = -c + 2 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne de la première on a alors

$$\forall n \in [\![1, +\infty[\![\quad u_{n+1} - c = -(u_n - c)$$

La suite $(u_n - 1)_{n \in [\![1, +\infty[\![}$ est donc une suite géométrique de raison -1. Il existe alors un réel A tel que

$$\forall n \in [\![1, +\infty[\![\quad u_n - 1 = A(-1)^n$$

On a, en particulier,

$$u_1 - 1 = -A = 0$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1$$

6. $\begin{cases} u_2 = 4 \\ \forall n \in [\![2, +\infty[\![\; u_{n+1} = 5u_n + 1 \end{cases}$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Soit c l'unique réel vérifiant

$$c = 5c + 1$$

C'est-à-dire $c = -\dfrac{1}{4}$.
On a alors

$$\begin{cases} \forall n \in [\![2, +\infty[\![\; u_{n+1} = 5u_n + 1 \\ c = 5c + 1 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne de la première on a alors

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![\quad u_{n+1} - c = 5(u_n - c)$$

La suite $\left(u_n + \dfrac{1}{4}\right)_{n \in [\![2, +\infty[\![}$ est donc une suite géométrique de raison 5. Il existe alors un réel A tel que

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![\quad u_n + \frac{1}{4} = A5^n$$

On a, en particulier,

$$u_2 + \frac{1}{4} = 25A = \frac{17}{4}$$

D'où $A = \dfrac{17}{100}$ Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{4} + \frac{17}{100} \times 5^n = \frac{17 \times 5^n - 25}{100}$$

Réponse de l'exercice 7.2

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Soit $P(x) = x^2 - 2x + 1$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = (x-1)^2$, ainsi P admet une racine double qui est 1.
On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A \times 1^n + Bn \times 1^n = A + Bn$$

On sait de plus que

$$u_0 = A = -1 \quad \text{et} \quad u_1 = A + B = 2$$

D'où $(A, B) = (-1, 3)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n - 1$$

2. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 17 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$

Soit $P(x) = x^2 - 3x - 4$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P vaut 25, il admet donc deux racines réelles simples qui sont 4 et -1.
On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = A \times 4^n + B(-1)^n$$

On sait de plus que

$$u_1 = 4A - B = 3 \quad \text{et} \quad u_2 = 16A + B = 17$$

D'où $(A, B) = (1, 1)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 4^n + (-1)^n$$

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{1}{2}u_{n+2} - 3u_{n+1} + 6u_n = 0 \end{cases}$

Soit $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P vaut -3, P admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(2\sqrt{3}\right)^n \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$$

On sait de plus que

$$u_0 = A = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 3A + B\sqrt{3} = -2$$

D'où $(A, B) = \left(1, \dfrac{-5}{\sqrt{3}}\right)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(2\sqrt{3}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$$

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \end{cases}$

Soit $P(x) = x^2 + 5x + 6$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P vaut 1, P admet donc deux racines simples réelles qui sont -3 et -2.
Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A(-2)^n + B(-3)^n$$

On sait de plus que

$$u_0 = A + B = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = -2A - 3B = 0$$

D'où $(A, B) = (3, -2)$
Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times (-2)^n + 2 \times (-3)^n$$

5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} + 13u_n = 6u_{n+1} \end{cases}$

Soit $P(x) = x^2 - 6x + 13$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P vaut -16, P admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont $3+2i$ et $3-2i$.
Notons $z = 3 + 2i$, puisque $\text{Re}(z) > 0$ on sait que $\arctan\left(\dfrac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$ est un argument de z. Ainsi

$$3 + 2i = \sqrt{13}e^{i\arctan\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{et} \quad 3 - 2i = \sqrt{13}e^{-i\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\sqrt{13}\right)^n \left(A\cos\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) + B\sin\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right)$$

On sait de plus que $u_0 = A = 2$ et

$$\begin{aligned} u_1 &= A\sqrt{13}\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) + B\sqrt{13}\sin\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ &= A\,\text{Re}\left(\sqrt{13}e^{i\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}\right) + B\,\text{Im}\left(\sqrt{13}e^{i\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}\right) \\ &= A\,\text{Re}(3+2i) + B\,\text{Im}(3+2i) \\ &= 3A + 2B \end{aligned}$$

D'où $3A + 2B = 2$. On obtient donc $(A, B) = (2, -2)$
Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\sqrt{13}\right)^n \left(2\cos\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 2\sin\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right)$$

6. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = -12u_{n+1} - 23u_n \end{cases}$

Ici il est tout à fait possible d'appliquer la méthode précédente pour obtenir le résultat mais ce serait une perte de temps. En effet, on sait qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = -12u_{n+1} - 23u_n \end{cases}$$

On peut constater que la suite constante $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = 0$$

vérifie ces conditions. Ainsi

$$\forall n\ in \mathbb{N} \quad u_n = 0$$

Il est également possible (voire souhaitable) de procéder par récurrence pour montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Réponse de l'exercice 7.3

1. Si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée. VRAI
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée à partir d'un certain rang. Soit alors$M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

   $$\forall n \geqslant N \quad |u_n| \leqslant M$$

   La famille $(u_0, \cdots u_{N-1})$ est une famille finie. Elle est donc bornée, soit alors M' tel que

   $$\forall n \in [\![0, N-1]\!] \quad |u_n| \leqslant M'$$

   On a alors

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant \max(M, M')$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle converge. FAUX
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (-1)^n$$

   est bornée mais ne converge pas
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. VRAI
   Il s'agit d'un résultat du cours
4. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors $L > 0$. FAUX
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n}$$

   vérifie bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. La suite $\left(\dfrac{\cos(n^3)}{n+1}\right)$ est convergente. VRAI
   Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-1}{n+1} \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant \frac{\cos(n^3)}{n+1} \leqslant v_n$$

De plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0. Le théorème des gendarmes nous assure alors que la suite $\left(\dfrac{\cos(n^3)}{n+1}\right)$ converge vers 0.

6. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = L$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant L$. FAUX

   A priori rien ne nous assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. Par exemple, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$. Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Réponse de l'exercice 7.4

1. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 2]$, $f(x) \leqslant 2$.

   La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 2]$ en tant que quotient de fonctions dérivables

   Sa dérivée est

   $$\forall x \in]-\infty, 2] \quad f'(x) = \frac{(x-3)-(x-4)}{(x-3)^2} = \frac{1}{(x-3)^2}$$

   f est donc croissante sur $]-\infty, 2]$. On en déduit donc que, pour tout $x \in]-\infty, 2]$, $f(x) \leqslant f(2)$. De plus $f(2) = 2$. Ainsi

   $$\forall x \in]-\infty, 2] \quad f(x) \leqslant 2$$

2. Montrer que la suite est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant 2$.

   On va montrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \leqslant 2$.

   Initialisation :

   u_0 est bien définie et vérifie $u_0 \leqslant 2$

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que u_n est bien défini et vérifie $u_n \leqslant 2$.

   Ainsi, puisque $u_n \neq 3$, $f(u_n)$ est bien défini. De plus, comme $u_n \leqslant 2$ alors, d'après la question précédente, $f(u_n) \leqslant 2$

   Ainsi, u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} \leqslant 2$.

   On a donc montré par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \leqslant 2$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R} \in \backslash\{3\}$.

   On va résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R} \in \backslash 3$. On procède par analyse-synthèse.

   Soit $x \in \mathbb{R} \in \backslash\{3\}$ tel que $f(x) = x$. Alors

   $$x = \frac{x-4}{x-3}$$

   D'où

   $$x^2 - 3x = x - 4$$

   Ainsi x est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. D'où $x = 2$.

   Ainsi, si $x \in \mathbb{R} \in \backslash\{3\}$ vérifie $f(x) = x$ alors nécessairement $x = 2$.

   Réciproquement, il est aisé de vérifier que $f(2) = 2$.

   Ainsi on a montré que, pour $x \in \mathbb{R} \in \backslash\{3\}$, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 2$. C'est-à-dire, on a montré $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R} \in \backslash\{3\}$ et cette solution est 2.

4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} v_{n+1} =& \frac{1}{u_{n+1} - 2} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3} - 2} \\ &= \frac{u_n - 3}{u_n - 4 - 2(u_n - 3)} \\ &= \frac{u_n - 3}{2 - u_n} \\ &= \frac{u_n - 2 - 1}{2 - u_n} \\ &= \frac{u_n - 2}{2 - u_n} + \frac{1}{u_n - 2} \\ &= -1 + v_n \end{aligned}$$
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique est une suite arithmétique de raison -1.
5. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique est une suite arithmétique de raison -1. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = A + (-1)n = A - n$$
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{1}{A-n} + 2$$
De plus $u_0 = 1$, d'où $A = -1$. on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

Réponse de l'exercice 7.5

On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient
$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -10u_n - 28v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 16v_n \end{cases}$$
D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient
$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -10u_n - 28v_n \\ u_{n+2} = -10u_{n+1} - 28v_{n+1} \\ v_{n+1} = 6u_n + 16v_n \end{cases}$$
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+2} = -10u_{n+1} - 28v_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= -10u_{n+1} - 28\left(6u_n + 16v_n\right)\\
&= -10u_{n+1} - 168u_n + 16 \times (-28v_n)\\
&= -10u_{n+1} - 168u_n + 16(u_{n+1} + 10u_n)\\
&= -10u_{n+1} - 168u_n + 16un + 1 + 160u_n\\
&= 6u_{n+1} - 8u_n
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$$

Soit alors $P(x) = x^2 - 6x + 8$ le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. P admet deux racines simples réelles qui sont 2 et 4. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A \times 2^n + B \times 4^n$$

on sait de plus que $u_0 = A + B = 1$ et

$$u_1 = -10u_0 - 28v_0 = -38 = 2A + 4B$$

D'où $(A, B) = (21, -20)$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 21 \times 2^n - 20 \times 4^n$$

Par suite on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{-u_{n+1} - 10u_n}{28} = \frac{(-42 - 210)2^n + (80 + 200)4^n}{28} = -9 \times 2^n + 10 \times 4^n$$

Réponse de l'exercice 7.6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + n^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 + 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2\\
&= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= u_0 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + n^2$$

sont les suites de la forme $\left(K + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 2^n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$u_n = u_0 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= u_0 + \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= u_0 + 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 2^n$$

sont les suites de la forme $(K + 2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $K \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les suites de la forme $(C + 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_0 \times 1^2 \times 2^2 \times \cdots \times (n-1+1)^2 \\
&= u_0 \times \prod_{k=1}^{n} k^2 \\
&= u_0 \times \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= u_0 \times (n!)^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$$

sont les suites de la forme $\left(K \times (n!)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2^n u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_0 \times 2^0 \times 2^1 \times \cdots \times 2^{n-1} \\
&= u_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= u_0 \times 2^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \\
&= u_0 \times 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \\
&= u_0 \sqrt{2}^{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2^n u_n$$

sont les suites de la forme $\left(K \times \sqrt{2}^{n(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Réponse de l'exercice 7.7

Commençons prouver que la suite est bien définie et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n > 0$$

Initialisation :
u_0 est bien défini et on a $u_0 > 0$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que u_n est bien défini et vérifie $u_n > 0$.

Comme $u_n > 0$ alors $\sqrt{2u_n}$ est bien défini. Ainsi u_{n+1} est bien défini et on a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n} > 0$. Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut alors définir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln(\sqrt{2u_n}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2u_n) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{\ln(2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. Soit c tel que $c = \frac{1}{2}c + \frac{\ln(2)}{2}$, c'est-à-dire $c = \ln(2)$.

La suite $(v_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \ln(2) + \frac{1}{2^n}(v_0 - \ln(2)) = \ln(2) - \frac{\ln(2)}{2^n}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \exp(v_n) = \exp\left(\ln(2) - \frac{\ln(2)}{2^n}\right) = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

Réponse de l'exercice 7.8

Soit K l'unique réel tel que $K = 6K - 13K + 16$, c'est-à-dire $K = 2$. On a alors

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 13u_n + 16 \\ K = 6K - 13K + 16 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne de la première, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} - K = 6(u_{n+1} - K) - 13(u_n - K)$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \quad v_n = u_n - 2$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = 6v_{n+1} - 13v_n \end{cases}$$

Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sqrt{13}^n \left(A\cos\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) + B\sin\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right)$$

On a, en particulier,

$$v_0 = A = -3 \quad \text{ et } v_1 = A\sqrt{13}\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) + B\sqrt{13}\sin\left(\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 0$$

D'où

$$A = -3 \quad \text{ et } 3A + 2B = 0$$

Ainsi $(A, B) = \left(-3, \frac{9}{2}\right)$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + \sqrt{13}^n \left(-3\cos\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{9}{3}\sin\left(n\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right)$$

Réponse de l'exercice 7.9

Il est aisé de monter que, pour tout entier n, $u_n > 0$. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}\; v_n = \ln(u_n)$$

On a

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(ru_n^{\frac{5}{3}}\right) = \ln(r) + \frac{5}{3}\ln(u_n) = \ln(r) + \frac{5}{3}v_n$$

Si $r = 1$ alors la suite v_n est géométrique de raison $\frac{5}{3}$. Dans ce cas ; il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \exp\left(\ln(u_0)\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$$

Si $r \neq 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique

Soit c l'unique réel tel que $c = \ln(r) + \frac{5}{3}c$, c'est-à-dire $c = -\frac{3\ln(r))}{2}$.

La suite $(v_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison $\frac{5}{3}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = c + (v_0 - c)\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \exp\left(c + (v_0 - c)\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\ln\left(u_0 r^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$$

Réponse de l'exercice 7.10

1. La modélisation ici est assez transparente. Il peut être bon de signaler que l'on suppose que la population modélisée se comporte selon l'évolution moyenne observée, ce qui est une hypothèse acceptable quand on travaille avec des populations de tailles assez grandes.

   Soit n un entier. A la génération $n+1$ combien a-t-on de souris adultes ? Puisqu'aucune souris adulte ne peut survivre deux ans, les adultes de la génération $n+1$ ne peuvent être que des jeunes de la génération n, ceux-ci ont une chance sur quatre de survivre, on va alors modéliser cela par exactement un quart d'entre eux survivent.

   Et combien de jeunes souris à la génération n ? Il s'agit des souris nées lors de la dernière génération. On va supposer que chaque souris de la génération n se comporte exactement comme la moyenne et donne naissance à exactement une femelle si elle est jeune et à exactement 8 femelles si elle est adulte.

   En notant, pour tout entier naturel n, après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles.On tire le système suivant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25 j_n \end{cases}$$

2. On sait que $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25 j_n \end{cases}$$

   D'où $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} j_{n+2} = j_{n+1} + 8a_{n+1} \\ a_{n+1} = 0,25 j_n \end{cases}$$

   Ainsi, la suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

   Soit $P(x) = x^2 - x - 2$ le polynôme caractéristique de la suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$. P admet deux racines simples qui sont 2 et -1. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad j_n = A \times 2^n + B \times (-1)^n$$

   On sait que $j_0 = 20 = A + B$ et $j_1 = j_0 + 8a_0 = 20 = 2A - B$. D'où $(A, B) = \left(\frac{40}{3}, \frac{20}{3}\right)$

   On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad j_n = \frac{40 \times 2^n + 20 \times (-1)^n}{3}$$

   et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{j_{n+1} - j_n}{8} = \frac{40 \times 2^n - 40 \times (-1)^n}{24}$$

Réponse de l'exercice 7.11

1. $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
2. $\left(\ln(n^2+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   La suite $\left(\ln(n^2+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. $\left(e^{n-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$e^{n-\sqrt{n}} = e^{n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$
   Ainsi, comme $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 1, $n - \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, d'où $e^{n-\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$.
4. $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{n+1}$$
   D'après le théorème des gendarmes on en déduit que la suite $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
5. $\left((-1)^n + \dfrac{1}{\ln(n+4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons
   $$u_n = (-1)^n + \frac{1}{\ln(n+4)}$$
   On a alors
   $$u_{2n} = 1 + \frac{1}{\ln(2n+4)} \qquad u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{\ln(2n+5)}$$
   On voit alors que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 tandis que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. Comme les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite,la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
6. $\left(e^{n+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$e^{n-1} \leqslant e^{n+(-1)^n}$$
   Puisque la suite $\left(e^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ on en déduit que la suite $\left(e^{n+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
7. $\left(\dfrac{e^{2n}}{e^{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$\frac{e^{2n}}{e^{3n}} = \frac{1}{e^n}$$
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{e^{2n}}{e^{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

8. $\left(e^{2n}-e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$e^{2n}-e^{3n}=-e^{3n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$$
Ainsi la suite $\left(e^{2n}-e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
9. $\left(e^{-2n}-e^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Il n'y a pas forme indéterminée ici, les deux termes tendent vers 0. La suite $\left(e^{-2n}-e^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0.
10. $\left(\frac{(e^n)^n}{e^{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\frac{(e^n)^n}{e^{2n+1}}=e^{n^2-2n-1}=e^{n^2\left(1-2\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}$$
Ainsi la suite $\left(\frac{(e^n)^n}{e^{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
11. $(\exp(2+\ln(3+n)))_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\exp(2+\ln(3+n))=(3+n)^2$$
La suite $(\exp(2+\ln(3+n)))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.
12. $\left(\exp(2n)^3-\exp(3n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\exp(2n)^3-\exp(3n)^2=\exp(6n)-\exp(6n)=0$$
La suite $\left(\exp(2n)^3-\exp(3n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0.
13. $\left(\left(ne^{2n}\right)^3-\left(2ne^{3n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\left(ne^{2n}\right)^3-\left(2ne^{3n}\right)^2=(n^3-4n^2)e^{6n}=n^3\left(1-\frac{4}{n}\right)e^{6n}$$
La suite $\left(\left(ne^{2n}\right)^3-\left(2ne^{3n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.
14. $\left(\frac{50n^4+8n^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$
$$\frac{50n^4+8n^3}{n^2+1}=\frac{n^4}{n^2}\frac{50+\frac{8}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=n^2\frac{50+\frac{8}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
La suite $\left(\frac{50n^4+8n^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.
15. $\left(\frac{2n^3+n\sin(n)}{n^3+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\frac{2n^3+n\sin(n)}{n^3+3}=\frac{n^3}{n^3}\frac{2+\frac{\sin(n)}{n^2}}{1+\frac{3}{n^3}}=\frac{2+\frac{\sin(n)}{n^2}}{1+\frac{3}{n^3}}$$
La suite $\left(\frac{2n^3+n\sin(n)}{n^3+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 2.

16. $\left(\ln(n^3+1) - 3\ln(n+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\ln(n^3+1) - 3\ln(n+2) = \ln\left(\frac{n^3+1}{(n+2)^3}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+6\frac{1}{n}+12\frac{1}{n^2}+\frac{8}{n^3}}\right)$$

La suite $\left(\ln(n^3+1) - 3\ln(n+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\ln(1)$, c'est-à-dire 0.

17. $\left(\dfrac{(-1)^{2n}+2n}{(-1)^{3n}+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{(-1)^{2n}+2n}{(-1)^{3n}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{(-1)^{3n}}{n}}$$

Ainsi la suite $\left(\dfrac{(-1)^{2n}+2n}{(-1)^{3n}+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{2}{3}$.

18. $\left(\dfrac{(-1)^n n^2+3n+1}{10n^2+10}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{(-1)^n n^2+3n+1}{10n^2+10} = \frac{(-1)^n+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{10+10\frac{1}{n^2}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = \dfrac{(-1)^n+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{10+10\frac{1}{n^2}}$. On voit alors que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{1}{10}$ et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{-1}{10}$. Comme les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite,la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

19. $\left(\dfrac{\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{4n}{5} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{4n}{5} \right\rfloor \leqslant \frac{4n}{5}$$

D'où

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor}{n} \leqslant \frac{4}{5}$$

D'après le théorème des gendarmes on en déduit que la suite $\left(\dfrac{\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{4}{5}$.

20. $\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - \dfrac{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor - \frac{2n}{2} = 0$$

$$\left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor - \frac{2n+1}{2} = n - (n+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

On voit alors que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite,la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

21. $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers 1. De plus la fonction ln est continue. Ainsi la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(1)=0$.
22. $\left((-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leqslant(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
D'après le théorème des gendarmes et la question précédente on voit que la suite $\left((-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
23. $\left(\ln(\sqrt{n})-\ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\ln(\sqrt{n})-\ln(n)=\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{1}{2}\ln(n)$$
Ainsi la suite $\left(\ln(\sqrt{n})-\ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
24. $(\ln(n+1)-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Ainsi la suite $(\ln(n+1)-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
25. $\left(\frac{3^n-2^n}{3^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\frac{3^n-2^n}{3^{n+2}}=\frac{3^n}{3^n}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{9}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{9}$$
Ainsi la suite $\left(\frac{3^n-2^n}{3^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{9}$.
26. $\left(5^n-5^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Il n'y a pas de forme indéterminée ici, la suite de terme général 5^n tend vers $+\infty$ et la suite de terme général 5^{-n} tend vers 0. Ainsi la suite $\left(5^n-5^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
27. $\left(3^{2n}-6^{2n}+2^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$3^{2n}-6^{2n}+2^{-3n}=9^n-36^n+\frac{1}{8^n}=36^n\left(-1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}\right)$$
Ainsi la suite $\left(3^{2n}-6^{2n}+2^{-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
28. $\left(\left\lfloor\frac{n^3+1}{n^2}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\frac{n^3+1}{n^2}-1\leqslant\left\lfloor\frac{n^3+1}{n^2}\right\rfloor$$
D'où
$$n\left(1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n}\right)\leqslant\left\lfloor\frac{n^3+1}{n^2}\right\rfloor$$
Ainsi la suite $\left(\left\lfloor\frac{n^3+1}{n^2}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Réponse de l'exercice 7.12

1. On peut procéder de deux manières :
   - Par une étude de fonction
     Soit $F : \begin{array}{ccc}]0,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+\ln(x) \end{array}$ et $I = [1,+\infty[$. On montre que

     $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall x \in I, \qquad F(x) \in I \end{cases}$$

     On clairement $u_0 \in I$.
     Soit $x \in I$, on a donc $\ln(x) \geqslant 0$, d'où $1+\ln(x) \geqslant 1$, c'est-à-dire $F(x) \in I$.
     On a alors montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in I$$

     C'est-à-dire

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 1$$

   - Par récurrence
     On va montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien définie et est minoré par 1.
     <u>Initialisation :</u>
     Pour $n = 0$ u_0 est bien défini et est minoré par 1.
     <u>Hérédité :</u>
     Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien définie et est minoré par 1. Alors $1+\ln(u_n)$ est bien défini. C'est-à-dire u_{n+1} est bien défini.
     De plus, par croissance de la fonction ln on a

     $$u_{n+1} = 1+\ln(u_n) \geqslant 1+\ln(1) \geqslant 1$$

     Ainsi, u_{n+1} est bien minoré par 1.
     On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien définie et est minoré par 1.
2. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

   $$\ln(x) \leqslant x-1$$

   Pour cela posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)-x+1 \end{array}$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables et on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

   f est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. De plus on a $f(1) = 0$
   On en déduit que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \geqslant 0$$

   et que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.
   Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

   $$1+\ln(u_n) \leqslant u_n$$

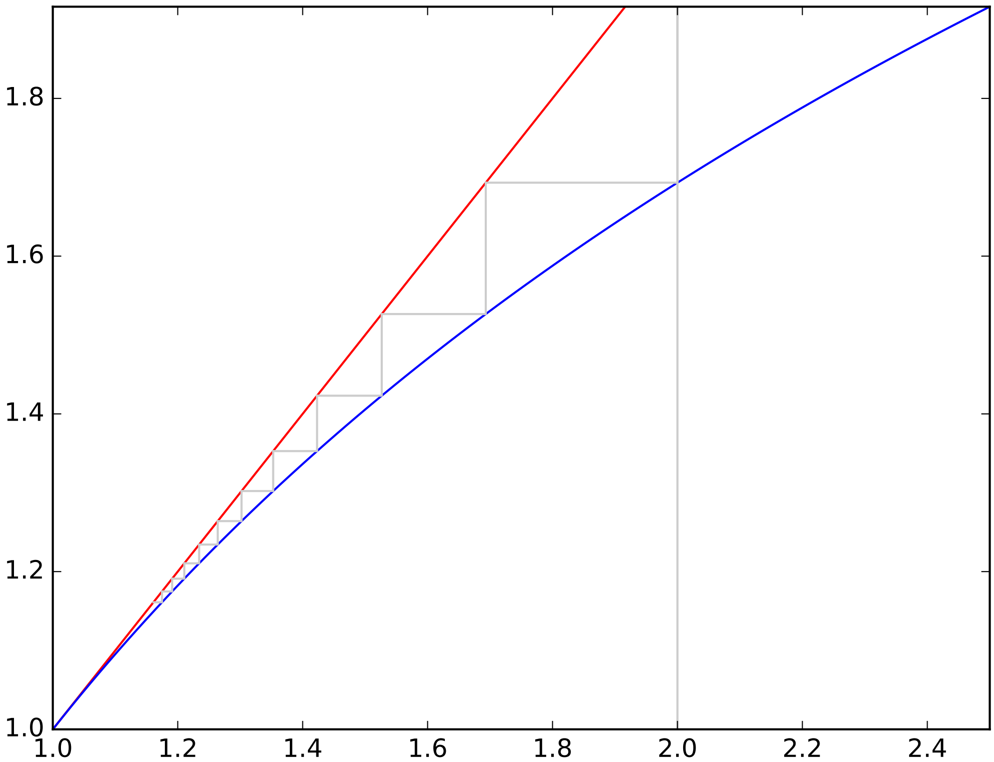
   c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante. De plus elle est minorée, elle converge donc. Notons l sa limite. l vérifie alors

$$l = 1 + \ln(l)$$

c'est-à-dire $f(l) = 0$. On en déduit que $l = 1$.
En conclusion la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Figure 7.1 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$



Réponse de l'exercice 7.13

1. On peut procéder de deux manières :
   — Par une étude de fonction
   Soit $F \; : \; \begin{array}{ccc}]-\infty, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{array}$ et $I = [0, 2]$. On montre que

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall x \in I, \qquad f(x) \in I \end{cases}$$

   On clairement $u_0 \in I$.
   Soit $x \in I$, on a donc $0 \leqslant x \leqslant 2$, d'où $2 \geqslant 2 - x \geqslant 0$, puis, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $2 \geqslant \sqrt{2} \geqslant \sqrt{2-x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \in I$.

On a alors montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in I$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$$

— Par récurrence
On va montrer par récurrence que u_n est bien définie et vérifie $u_n \in [0,2]$.
Initialisation :
Pour $n = 0$ u_0 est bien défini et vérifie $u_0 \in [0,2]$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien définie et vérifie $u_n \in [0,2]$. Alors $\sqrt{2-u_n}$ est bien défini. C'est-à-dire u_{n+1} est bien défini.
De plus, par décroissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$ on a

$$\sqrt{2-2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{2-0}$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0,\sqrt{2}]$, or $\sqrt{2} < 2$, ainsi on a bien $u_{n+1} \in [0,2]$.
On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien définie et vérifie $u_n \in [0,2]$.

On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \sqrt{2-\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} > 1$ et $u_2 = \sqrt{2-\sqrt{\dfrac{3}{1}}} \in]u_0, 1]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est manifestement pas monotone.

2. f est décroissante donc $f \circ f$ est croissante. En effet, soit $(x,y) \in [0,2]$ avec $x \leqslant y$, alors on a $f(y) \leqslant f(x)$ puis $f(f(x)) \leqslant f(f(y))$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $v_n = u_{2n}$. On a alors $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = u_2 > \dfrac{1}{2}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
Initialisation :
On a bien $v_1 \geqslant v_0$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
Alors $f \circ f(v_{n+1}) \geqslant f \circ f(v_n)$, c'est-à-dire $v_{n+2} \geqslant v_{n+1}$.
On a donc montré par récurrence que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
De la même manière on peut prouver que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers une limite L_1. De plus L_1 vérifie $f \circ f(L_1) = L_1$
D'où

$$\sqrt{2-\sqrt{2-L_1}} = L_1$$

On en déduit que

$$L_1^2 - 2 = -\sqrt{2-L_1}$$

et par suite

$$(L_1^2-2)^2 = 2 - L_1$$

L_1 est donc une racine du polynôme $P(x) = x^4 - 4x^2 + 4 - 2 + x$
Or, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 4x^2 + x + 2 \\ &= (x-1)(x^3 + x^-3x - 2) \end{aligned}$$

$$= (x-1)(x+2)(x^2-x-1)$$

Le polynôme x^2-x-1 admet deux racines qui sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit alors que

$$L_1 \in \left\{1, -2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right\}$$

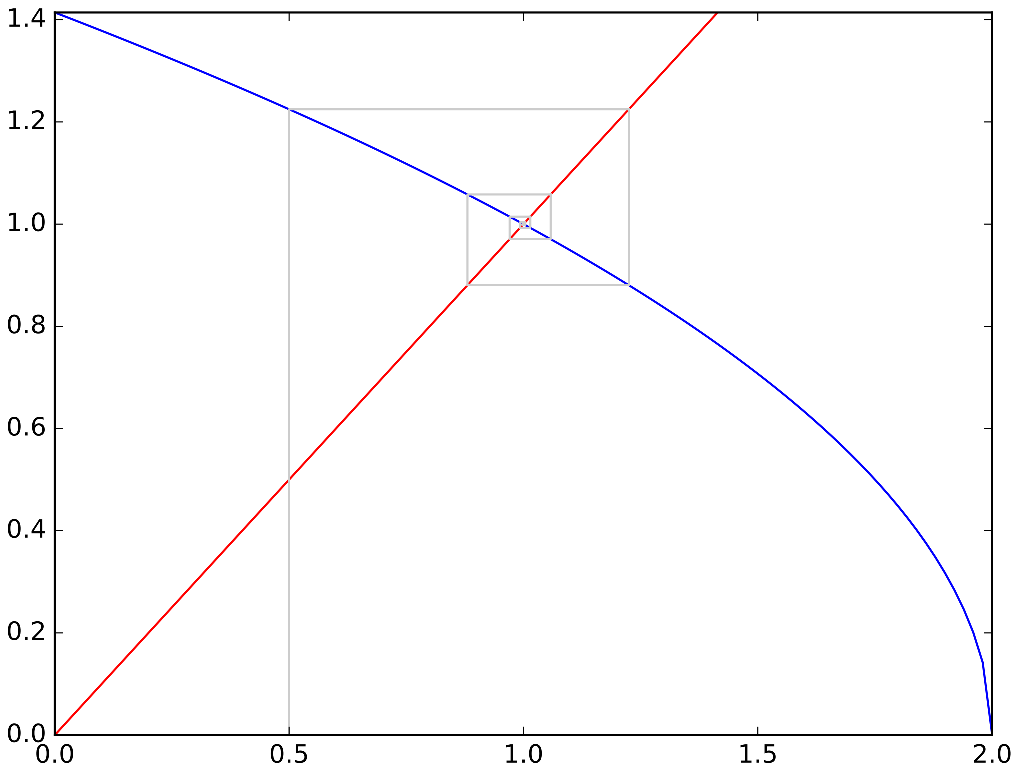
Or $L_1 \in [0, \sqrt{2}]$ d'où

$$L_1 \in \left\{1, -2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right\} \cap [0\sqrt{2}] = \{1\}$$

Ainsi $L_1 = 1$.
De la même manière la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite L_2 qui vérifie également $f\circ f(L_2) = L_2$ et $L_2 \in [0, \sqrt{2}]$. D'où $L_2 = 1$
Les deux $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc toutes les deux vers 1.

5. On vient de prouver que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers la limite 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Figure 7.2 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$

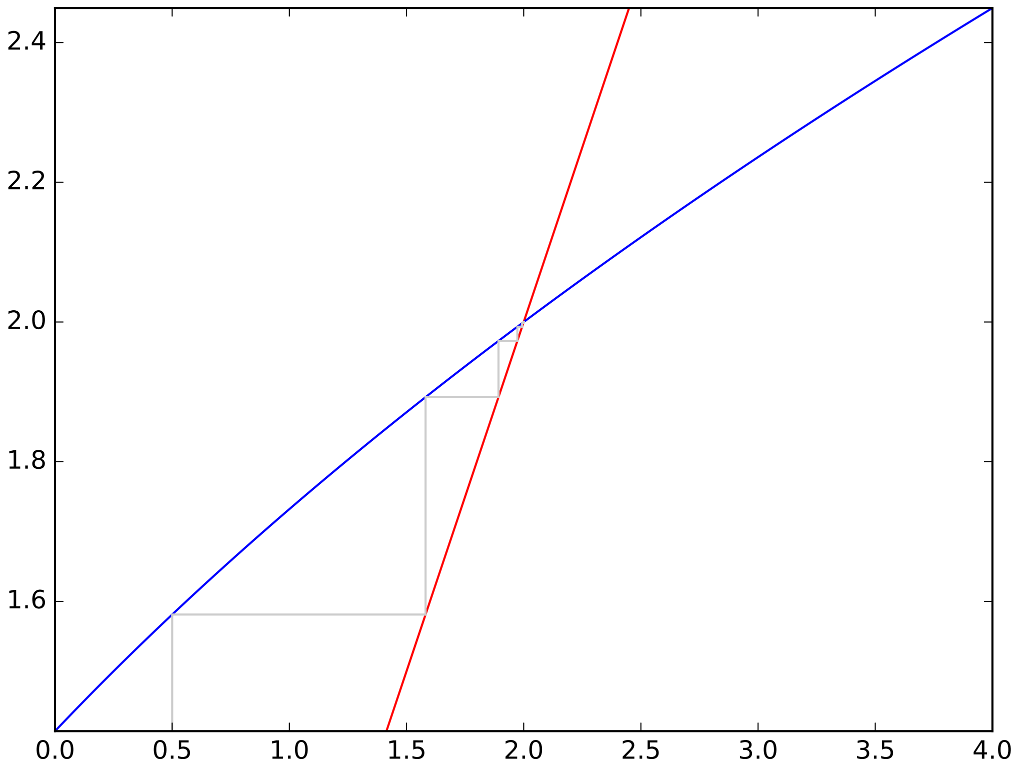


Réponse de l'exercice 7.14

1. On peut procéder de deux manières :
   — Par une étude de fonction
   Soit $f : \begin{array}{ccc} [-2,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2+x} \end{array}$ et $I = [0,+\infty[$. On montre que
   $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall x \in I, \qquad f(x) \in I \end{cases}$$
   On clairement $u_0 \in I$.
   Soit $x \in I$, on a donc $2+x \geqslant 0$, ainsi $\sqrt{2+x}$ est bien défini et on a $\sqrt{2+x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \in I$.
   On a alors montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in I$$
   C'est-à-dire
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 0$$
   — Par récurrence
   On va montrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et positif.
   Initialisation :
   u_0 est bien défini et positif.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n est bien défini et positif. Alors $\sqrt{2+u_n}$ est bien défini et positif, c'est-à-dire u_{n+1} est bien défini et positif.
   On a donc montré par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et positif.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| &= \left|\sqrt{2+u_n} - 2\right| \\ &= \left|\frac{(\sqrt{2+u_n} - 2)(\sqrt{2+u_n} + 2}{\sqrt{2+u_n} + 2}\right| \\ &= \left|\frac{2+u_n-4}{\sqrt{2+u_n}+2}\right| \\ &= \left|\frac{u_n-2}{\sqrt{2+u_n}+2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{u_n-2}{2}\right| \end{aligned}$$
3. On va prouver par récurrence que, pour tout entier n, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Initialisation :
   On a bien $|u_0 - 2| \leqslant 2$.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   On a alors
   $$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
   Ce qui est l'inégalité voulue.
   On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout entier n, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$
Les suites $\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers 2. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Figure 7.3 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$



Réponse de l'exercice 7.15

1. Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$ et soit $f_n \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + x^2 + 2x - 1 \end{array}$

   f est dérivable en tant que somme de fonctions continues et on
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 2 > 0$$
   f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc est injective sur $\mathbb{R}_+$. De plus on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 3$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Par injectivité de f_n sur $\mathbb{R}_+$, x_n est unique.

3 Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$ on a
$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n^2 + 2x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} > 0$$

Ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, on a donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de x_{n+1},

$$\forall n \in [\![3, +\infty[\![\quad x_{n+1} \in]x_n, 1[$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.

2. La suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et majorée, elle converge donc. Notons l sa limite
Pour $n \in [\![3, +\infty[\![$ on a $0 < x_n < \frac{1}{2}$, ainsi $0 < x_n^n < \frac{1}{2^n}$. D'après le théorème des gendarmes on peut en déduire que La suite $(x_n^n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0.
Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0 + l^2 + 2l - 1 = 0$$

l vérifie donc $l^2 + 2l - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$.
Comme on a, pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$ $0 < x_n < \frac{1}{2}$ alors $0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}$. La seule possibilité est $l = \sqrt{2} - 1$.

Réponse de l'exercice 7.16

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ainsi

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$$

On en déduit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
De même, pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2 + k^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Ainsi $v_n \geqslant 0$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème de gendarmes la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Enfin, pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant w_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leqslant w_n \leqslant 1$$

D'après le théorème de gendarmes la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 1.

Réponse de l'exercice 7.17

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$u_n = S_{2n} \qquad v_n = S_{2n+1}$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= u_n + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= u_n - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= u_n - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a également

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= v_n + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= v_n + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \\ &= v_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n - v_n = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

On voit donc que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge 0.

Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la limite L. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L (en pratique L vaut $-\ln(2)$).

Réponse de l'exercice 7.18

1. On va montrer par récurrence que, pour tout entier n, a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
   Initialisation : a_0 et b_0 sont bien définis et sont strictement positifs.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
   Alors $\sqrt{a_n b_n}$ est bien défini et est strictement positif et de même $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ est bien défini est strictement positif. Ainsi a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis et strictement positifs.
   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier n, a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.

2. On sait que, pour tout réels (u, v) on a
$$\frac{u^2+v^2}{2} \geqslant uv$$
Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant cette inégalité à $\sqrt{a_n}$ et $\sqrt{b_n}$ on obtient
$$\frac{a_n+b_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n b_n}$$
Ainsi, pour tout entier n, on a $b_{n+1} \geqslant a_{n+1}$, d'où
$$\forall n \geqslant 1 \quad b_n \geqslant a_n$$
Comme $b_0 \geqslant a_0$ on a donc bien,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \geqslant a_n$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geqslant 1$$
Ainsi, pour tout entier n on a $a_{n+1} \geqslant a_n$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a également
$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \geqslant 0$$
Ainsi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$$
On voit alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0. Elle est donc convergente vers une limite L_1.
De même la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par a_0. Elle est donc convergente vers une limite L_2.
On sait que, pour tout entier n, on a
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
Le terme de gauche tend vers L_2 et le terme de droite tend vers $\dfrac{L_1+L_2}{2}$. Par unicité de la limite on a donc $L_2 = \dfrac{L_1+L_2}{2}$, d'où $L_1 = L_2$.
5. D'après la question précédente la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 - L_2 = 0$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien adjacentes.

Réponse de l'exercice 7.19

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \geqslant u_n$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
Concernant v_n, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} + \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{n! \times n \times (n+1)^2}$$
$$\leqslant 0$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

Ainsi la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

2. On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers sa borne supérieure. De même la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a l'encadrement suivant

$$u_n \leqslant L \leqslant v_n$$

dont l'amplitude est $\dfrac{1}{n \times n!}$
Ainsi pour $n = 5$ on a $\dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{1}{600}$

$$u_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{1630}{600}$$
$$v_5 = u_5 + \frac{1}{5 \times 120} = \frac{1631}{600}$$

On a donc

$$\frac{1630}{600} \leqslant L \leqslant \frac{1631}{600}$$

3. On a $\dfrac{1630}{600} \simeq 2.72$. Ainsi L est à peu près égale à 2.72 ce qui nous conduit à penser que $L = e$.
C'est effectivement le cas mais nous ne pouvons pas encore le prouver avec les outils de ce chapitre.

Réponse de l'exercice 7.20

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et strictement positifs. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n \times v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$ et cette inégalité est aussi vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2v_n}{u_n + v_n} \geq 1,$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle converge. Notons λ sa limite. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \times v_{n+1} = u_n \times v_n$. On en déduit par récurrence que $u_n \times v_n = u_0 \times v_0 = 2$. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient $\lambda \times \ell = 2$. En passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ on obtient $\ell = \dfrac{\lambda + \ell}{2}$. On déduit de ces deux équations que $\lambda = \ell = \sqrt{2}$.

Réponse de l'exercice 7.21

1. Notons λ la limite de u. Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \epsilon.$$

Soit $n \geq N$. On a

$$\begin{aligned} |v_n - \lambda| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k - n \times \lambda}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \lambda) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \lambda| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \lambda| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} |u_k - \lambda| \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \lambda|$ ne dépend pas de n.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \lambda| = 0$.

Il existe ainsi $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$, on ait $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \lambda| \leq \epsilon$.

Pour $n \geq N'$ on a donc

$$\begin{aligned} |v_n - \lambda| &\leq \epsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} \epsilon \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Ainsi v converge et sa limite est λ.

2. La réciproque est fausse. Par exemple la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais sa moyenne de Césaro converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on poste $a_n = u_n - u_{n-1}$.
La suite a est convergente de limite ℓ. D'après la question 1, sa limite de Césaro est aussi convergente de limite ℓ. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \frac{1}{n}(u_n - u_0).$$

On en déduit que $\displaystyle\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n}(u_n - u_0) + \frac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + 0 = \ell$.

4. On va commencer par prouver que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est bien défini et vérifie $w_n > 0$:
Initialisation : w_0 est bien définie et on a $w_0 > 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que w_n existe et vérifie $w_n > 0$. Alors $\frac{1}{w_n} > 0$. D'où $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$ est bien défini et vérifie $w_{n+1} > 0$
On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est bien défini et vérifie $w_n > 0$.
De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = \frac{1}{w_n} > 0$$

La suite (w_n) est donc croissante.
On va montrer qu'elle tend vers $+\infty$ en montrant qu'elle n'est pas majorée. Supposons par l'absurde que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L qui vérifie $L = L + \frac{1}{L}$, ce qui est impossible. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(b) On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1}^2 - w_n^2 = 2 + \frac{1}{w_n^2}$$

Ainsi la suite $(w_{n+1}^2 - w_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
On peut en déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n^2}{n} = 2$.

Réponse de l'exercice 7.22

1. On va montrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $u_n > -1$.
Initialisation :
u_0 est bien défini et vérifie bien $u_0 > -1$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que u_n est bien défini et vérifie $u_n > -1$. Alors $\sqrt{1+u_n}$ est bien défini et vérifie $\sqrt{1+u_n} \geqslant 0 > -1$.
Ainsi u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} > -1$.
On a donc montré par récurrence que, pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $u_n > -1$.

2. On veut ici résoudre sur $]-1,+\infty[$,l'équation

$$\sqrt{1+x} = x$$

On procède par analyse-synthèse :
Analyse :
Soit $x \in]-1,+\infty[$ tel que $\sqrt{1+x} = x$.
Alors on a

$$1 + x = x^2$$

x est donc une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Les deux solutions réelles de cette équation sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi, on a montré que, si x est un point fixe de f alors $x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Synthèse :
On va maintenant vérifier si les deux réels obtenus plus tôt sont bien des points fixes de f. On a

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

et

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas un point fixe de f. f n'admet qu'un seul point fixe qui est

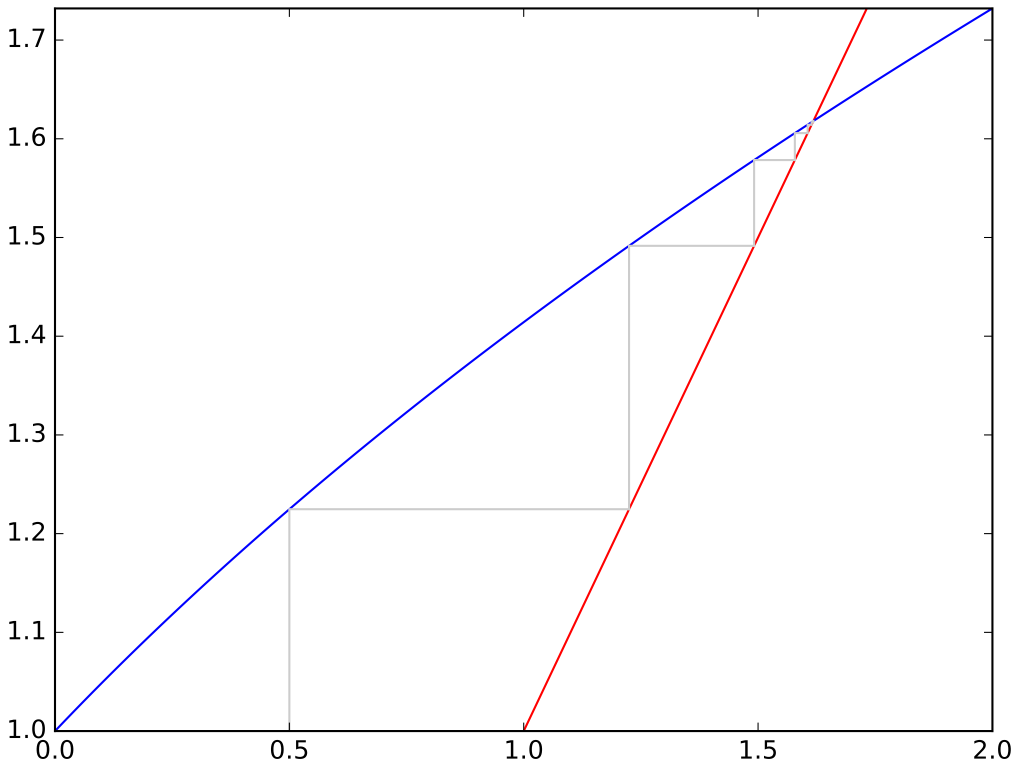
$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3. On va étudier le signe de $f(x)-x$. La fonction $f(x)-x$ est continue et ne s'annule qu'en α. Ainsi elle est de signe constant sur $]-1,\alpha[$. Or $0\in]-1,\alpha[$ et $f(0)-0=1\geqslant 0$.
On a donc
$$\forall x\in]-1,\alpha[\quad f(x)\geqslant x$$
On va alors montrer par récurrence que, si $-1<u_0<\alpha$ alors, pour tout entier n, on a
$$u_0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$$
Initialisation
On a $u_0\leqslant\alpha$. De plus f est croissante, d'où $f(u_0)\leqslant f(\alpha)$, c'est-à-dire $u_1\leqslant\alpha$.
On sait également que $\forall x\in]-1,\alpha[\quad f(x)\geqslant x$. Ainsi $f(u_0)\geqslant u_0$, c'est-à-dire $u_1\geqslant u_0$.
Hérédité :
Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $u_0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
Par croissance de f on a alors
$$f(u_0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(\alpha)$$
C'est-à-dire
$$u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$$
Or $u_1\geqslant u_0$. On a ainsi
$$u_0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$$
ce qui l'inégalité voulue.
On a donc montré par récurrence que, si $-1<u_0<\alpha$ alors, pour tout entier n, on a
$$u_0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$$
On procède de même dans le cas où $u_0>\alpha$.

4. On montré que, si $-1<u_0<\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. Elle converge donc et ne peut converger que vers un point fixe de f. Or α est le seul point fixe de f. Ainsi si $-1<u_0<\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
De même si, $u_0>\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par α. Elle converge donc et ne peut converger que vers un point fixe de f. Or α est le seul point fixe de f. Ainsi si $u_0>\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
Si $u_0=\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge donc aussi vers α.

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Figure 7.4 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$



Réponse de l'exercice 7.23

1. On raisonne par récurrence.
   — Initialisation : $u_0 \in [-1,1]$.
   — Hérédité. On suppose $u_n \in [-1,1]$. On a alors $u_n^2 \in [0,1]$. Comme $\mu \in]0,2]$, on en déduit :
   $$-1 = 1 - 2 \leq 1 - \mu \times u_n^2 \leq 1.$$
   D'où $u_{n+1} \in [-1,1]$.
   — Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = 1 - \mu \times x^2$. $f([-1,1]) \subset [-1,1]$
   f est dérivable et on a pour tout $x \in [-1,1]$, $f'(x) = -2\mu x$.
   Pour $\mu \leqslant 1$, on a $f([-1,1]) \subset [0,1]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
   Or f est décroissante sur $[0,1]$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones (cf exercices précédents pour comment le prouver)
   Comme elles sont bornées (car à valeurs dans $[0,1]$), elles sont convergentes. Nous allons étudier leurs limites respectives. Si elles ont la même limite, alors on conclura que (u_n) converge. Si elles n'ont pas la même limite, alors on conclura que (u_n) diverge.

Par continuité de $f \circ f$, les limites possibles de ces deux sous-suites sont les points fixes de $f \circ f$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1],\ f \circ f(x) &= 1 - \mu \times (1 - \mu \times x^2)^2 \\ &= 1 - \mu + 2\mu^2 \times x^2 - \mu^3 \times x^4 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in [-1,1],\ f \circ f(x) - x = 1 - \mu - x + 2\mu^2 \times x^2 - \mu^3 \times x^4$$

Il nous faut trouver les racines d'un polynôme de degré 4 ! Comment faire ? Il faut remarquer que si x est solution de $f(x) - x$, alors x est solution de $f \circ f(x) = x$. Étudions d'abord les solutions de $f(x) = x$, ce sont les limites potentielles de (u_n).

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1],\ f(x) - x &= 1 - x - \mu \times x^2 \\ &= -\mu \times (x - \ell_1) \times (x - \ell_2) \end{aligned}$$

où on a posé $\ell_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1+4\mu}}{2\mu}$ et $\boxed{\ell_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4\mu}}{2\mu}}$. On a $\ell_1 < -1$ et $0 < \ell_2 < 1$. ℓ_2 est donc la seule limite possible de la suite (u_n). Revenons à l'étude des racines de $f \circ f(x) - x$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1],\ f \circ f(x) - x &= (1 - x - \mu \times x^2) \times (1 - \mu - \mu \times x + \mu^2 \times x^2) \\ &= -\mu(x - \ell_1)(x - \ell_2)(1 - \mu - \mu \times x + \mu^2 \times x^2) \end{aligned}$$

Le discriminant du dernier facteur vaut $\Delta = \mu^2(4\mu - 3)$.

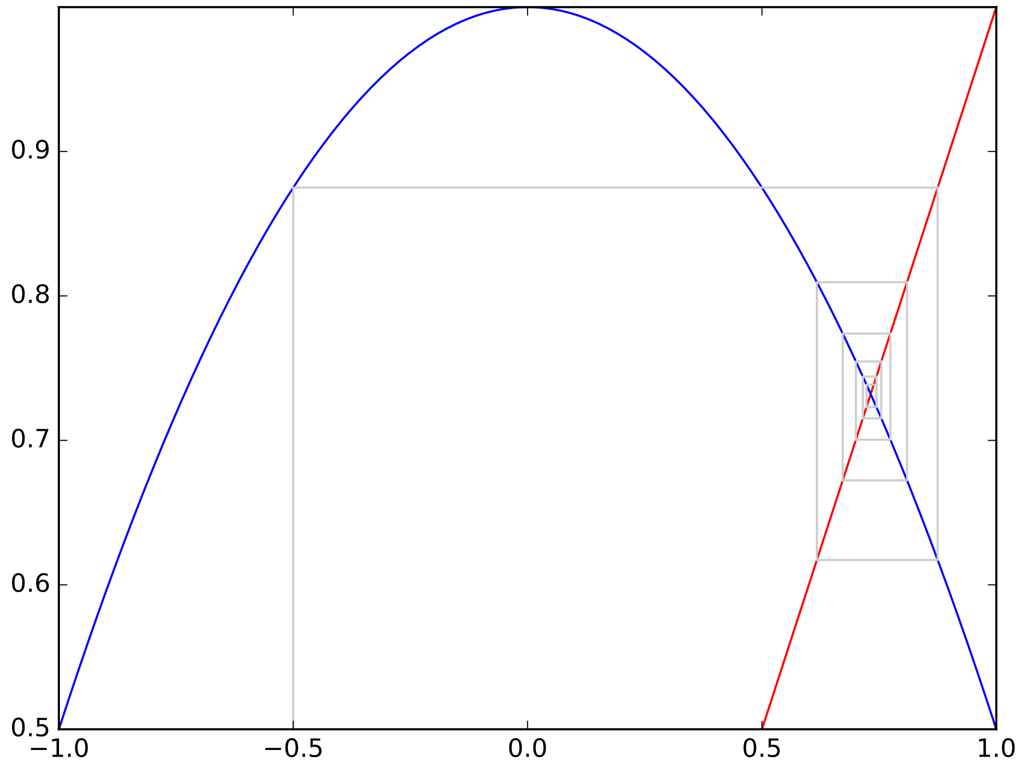
- Si $\mu < \dfrac{3}{4}$, alors $\Delta < 0$. La seule solution de l'équation $f \circ f(x) - x = 0$ dans $[0,1]$ est ℓ_2. Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ_2. Donc (u_n) converge vers ℓ_2.

$$\boxed{\text{Si } \mu < \frac{3}{4},\ (u_n) \text{ converge vers } \ell_2.}$$

- Si $\mu = \dfrac{3}{4}$, alors $\Delta = 0$. On trouve la racine double $\dfrac{2}{3}$ qui n'est autre que ℓ_2. De même que précédemment, on conclue :

$$\boxed{\text{Si } \mu = \frac{3}{4},\ (u_n) \text{ converge vers } \ell_2 = \frac{2}{3}.}$$

Figure 7.5 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $\mu < \frac{3}{4}$



— Si $\mu > \frac{3}{4}$, alors $\Delta > 0$. On trouve deux racines supplémentaires de $f\circ f(x)-x$: $\boxed{r_1 = \frac{1-\sqrt{4\mu-3}}{2\mu} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{}}{2}}$
On peut montrer facilement que $-1 < 0 \leq r_1 < \ell_2 < r_2 \leq 1$. On a le tableau suivant :

x	0		r_1		ℓ_2		r_2		1
$f\circ f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Par ailleurs $f \circ f$ est croissante. Et les intervalles $[0, r_1]$, $[r_1, \ell_2[$, $]\ell_2, r_2]$ et $[r_1, 1]$ sont stables par $f \circ f$.

— Si $u_0 = \ell_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell_2$. Donc la suite (u_n) converge.

— Si $u_0 \in [0, r_1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [-1, r_1]$. Pour tout x dans cet intervalle, on a $f \circ f(x) - x \geq 0$. Donc la suite (u_{2n}) est croissante. Comme elle est majorée par r_1, elle converge. Sa limite étant nécessairement un point fixe de $f \circ f$ dans $[0, r_1]$, c'est r_1. Par ailleurs, puisque $f \circ f(f(r_1)) = f(f \circ f(r_1)) = f(r_1)$ et que r_1 n'est pas un point fixe de f, on a $f(r_1) = r_2$. De même, $f(r_2) = r_1$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ on en déduit que (u_{2n+1}) converge vers r_2. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ayant des limites différentes, (u_n) ne converge pas.

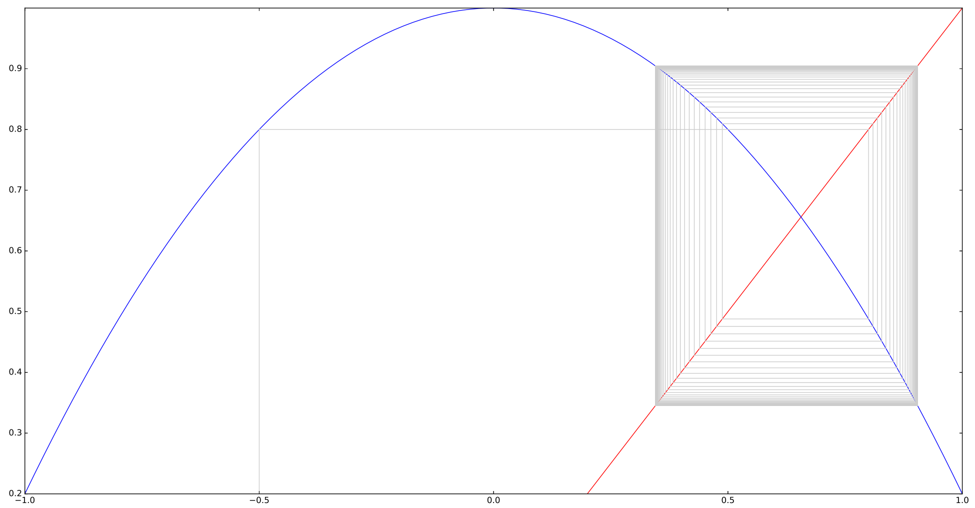
— Si $u_0 \in [r_1, \ell_2[$, la suite (u_{2n}) est à valeurs dans $[r_1, \ell_2[$. Elle est décroissante, minorée par r_1. On montre alors qu'elle converge vers r_1 et que (u_{2n+1}) converge vers r_2. Ainsi (u_n) ne converge pas.

— On montre de même que si $u_0 \in]\ell_2, r_2]$ ou $u_0 \in [r_2, 1]$, la suite (u_{2n})converge vers r_2 et et la suite (u_{2n+1}) converge vers r_1. Ainsi (u_n) ne converge pas.

Finalement

$$\boxed{\text{Si } \mu > \frac{3}{4},\ (u_n) \text{ ne converge pas, sauf si } u_0 = \ell_2.}$$

Figure 7.6 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $\mu > \dfrac{3}{4}$

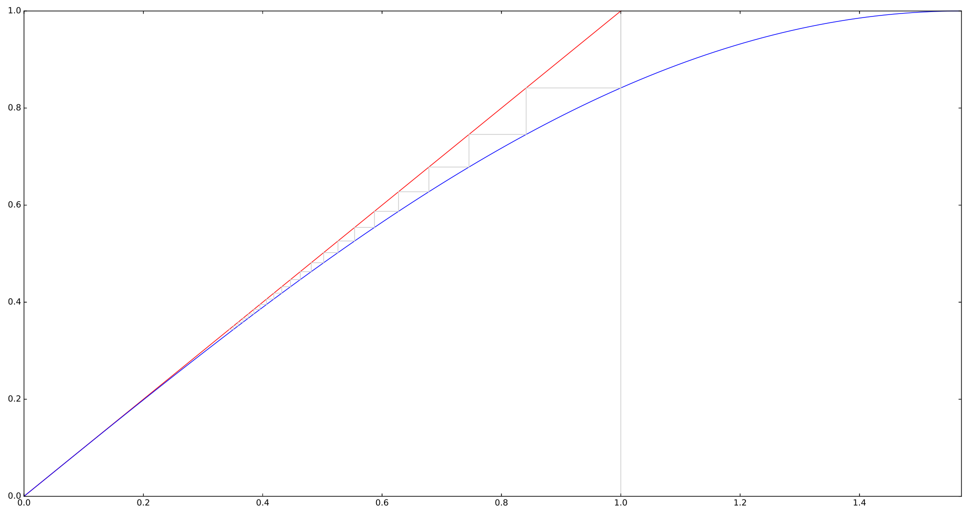


3. On a répondu à cette question dans notre réponse à la question précédente.

Réponse de l'exercice 7.24

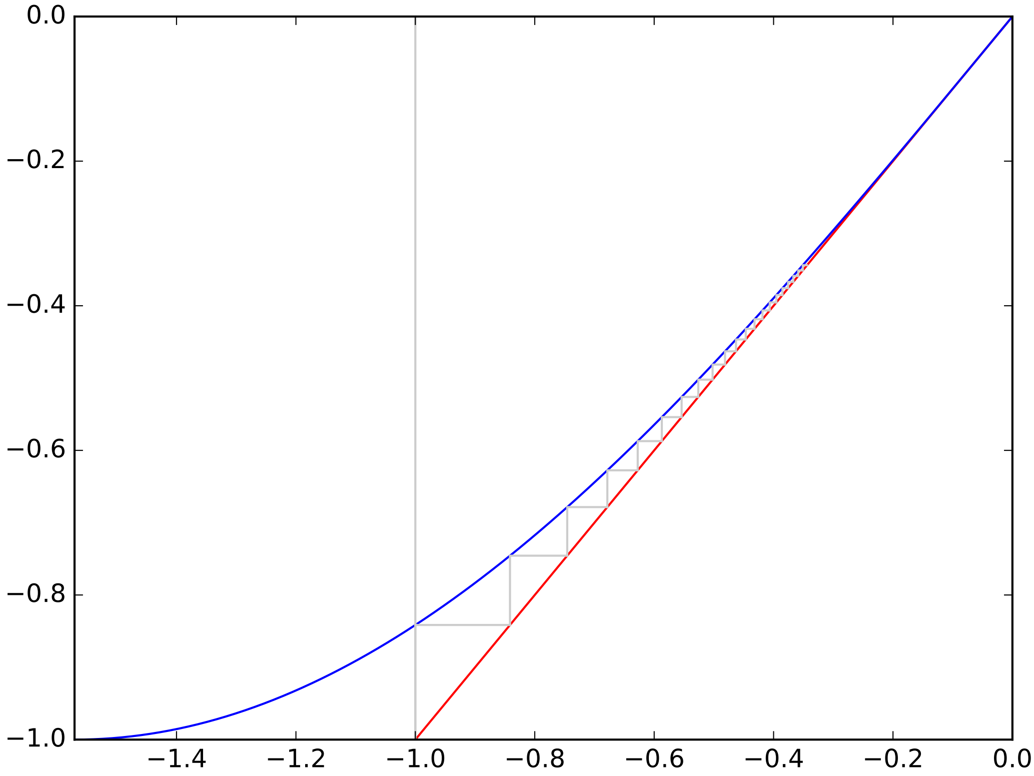
1. Ici $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On sait que, pour $x \geqslant 0$ on a $\sin(x) \leqslant x$. Montrons par récurrence que, pour tout entier n on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Initialisation :
On a $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ d'où $sin(u_0) \geqslant 0$ et $\sin(u_0) \leqslant u_0$. C'est-à-dire
$$0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$$
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Alors $u_{n+1} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'où $sin(u_{n+1}) \geqslant 0$ et $\sin(u_{n+1}) \leqslant u_{n+1}$. C'est-à-dire
$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
On a donc prouvé par récurrence que, si $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite L qui vérifie $L = \sin(L)$, ce qui n'est possible que pour $L = 0$. Ainsi si $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Figure 7.7 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



2. Ici $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. On sait que, pour $x \leqslant 0$ on a $\sin(x) \geqslant x$.
Montrons par récurrence que, pour tout entier n on a $0 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n$.
Initialisation :
On a $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ d'où $\sin(u_0) \leqslant 0$ et $\sin(u_0) \geqslant u_0$. C'est-à-dire
$$0 \geqslant u_1 \geqslant u_0$$
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n$. Alors $u_{n+1} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, d'où $sin(u_{n+1}) \leqslant 0$ et $\sin(u_{n+1}) \geqslant u_{n+1}$.
C'est-à-dire
$$0 \geqslant u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$
On a donc prouvé par récurrence que, si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0. Elle converge donc vers une limite L qui vérifie $L = \sin(L)$, ce qui n'est possible que pour $L = 0$. Ainsi si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

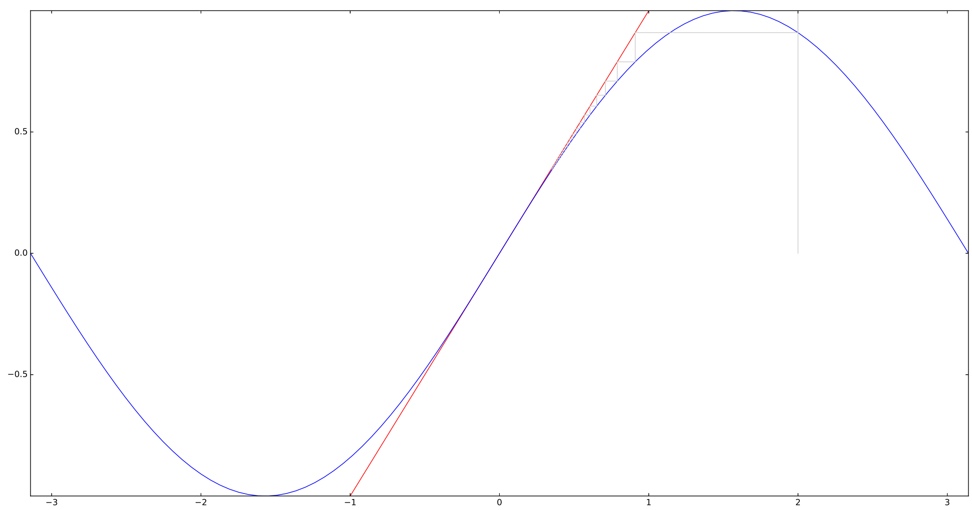
Figure 7.8 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$



3. On vient de montrer que, si $u_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Si $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque alors $u_1 \in [-1, 1] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et il suffit de reprendre l'argument précédent à partir du rang 1 pour prouver qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Figure 7.9 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas général (ici $u_0 = 2$)

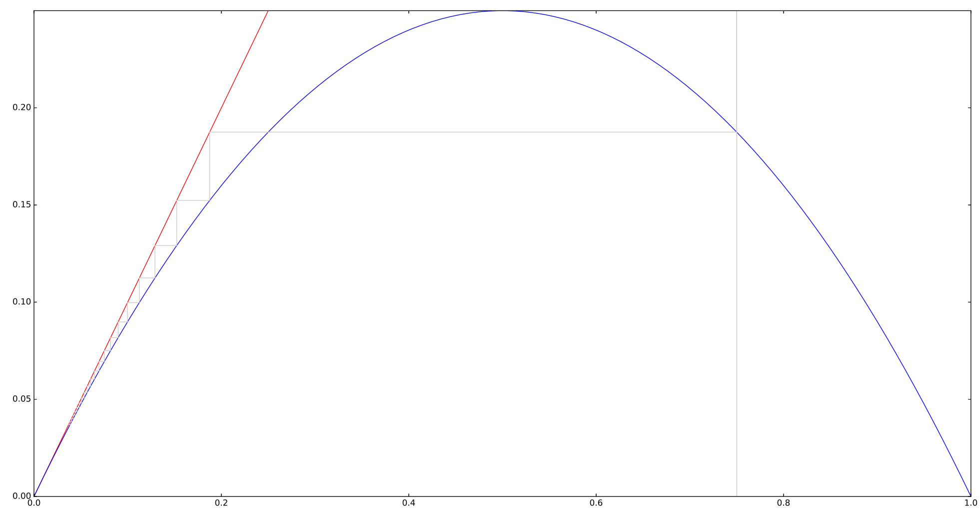


Réponse de l'exercice 7.25

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$ est croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, positive sur $[0,1]$ et négative sur $\mathbb{R}\backslash[0,1]$. Ceci nous incite à considérer les cas $a < 0$, $a \in [0,1]$ et $a > 1$.

— Si $a \in [0,1]$ alors $u_1 \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ (en effet $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \dfrac{1}{4}$). On montre alors par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \in [0, \dfrac{1}{4}]$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Puisqu'elle est décroissante et minorée elle converge vers une limite l. l vérifie $l = l - l^2$, d'où $l = 0$.
Ainsi, si $a \in [0,1]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Figure 7.10 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $a \in [0,1]$

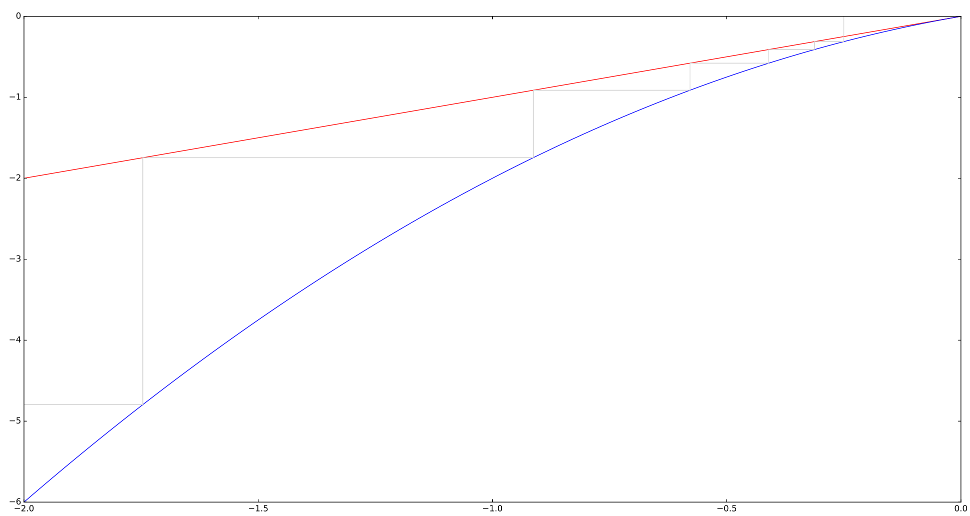


— Si $a < 0$ alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a encore $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Elle vérifie donc $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant a < 0$.
Supposons par l'absurde qu'elle soit minorée, alors elle converge vers l'unique point fixe de f qui est 0. Or on a $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant a < 0$, d'où, en passant à la limite dans l'inégalité

$$l \leqslant a < 0$$

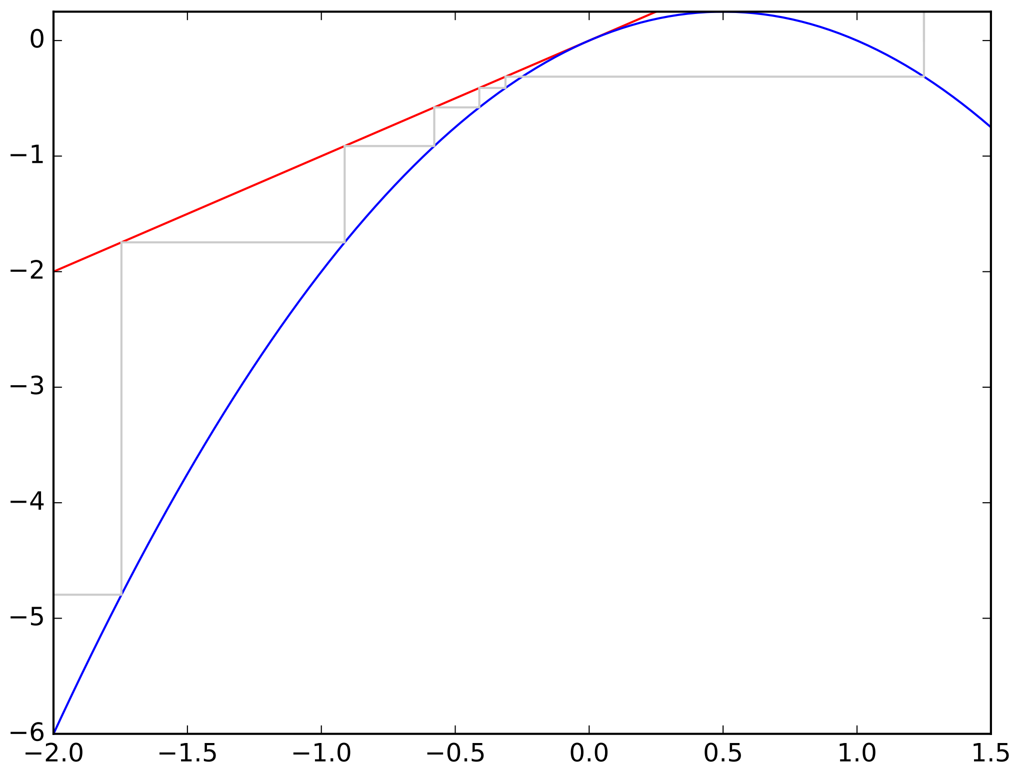
ce qui est absurde.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante non minorée, ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Figure 7.11 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $a < 0$



— Si $a > 1$ alors $u_1 = a - a^2 < 0$ et on se ramène à l'étude du cas $a < 0$

Figure 7.12 – Tracé en escalier de $(u_n)_{n\in N}$ dans le cas $a > 1$



Réponse de l'exercice 7.26

1. Soit f la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+\ln(x) \end{array}$$

On remarque que f est continue et vérifie $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}*$ Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_n) = n$. Montrons qu'un tel x_n est unique.
Pour cela remarquons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc injective Par l'absurde supposons qu'il existe $x'_n \neq x_n$ tel que $f(x'_n) = n = f(x_n)$. Alors, par injectivité de f on a $x_n = x'_n$ ce qui est absurde.
Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$x + \ln x = n$$

admet une unique solution x_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons par l'absurde que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Alors, par croissance de f, on a

$$f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$$

C'est-à-dire

$$n + 1 \leqslant n$$

Ce qui est absurde. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante.

3. On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Pour cela supposons par l'absurde qu'elle soit majorée par un réel M.
   Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > M + \ln(M)$. On a alors $x_N \leqslant M$ et $f(x_N) = N > M + \ln(M) = f(M)$ ce qui est absurde de par la croissance de la fonction f.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante et n'est pas majorée. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Réponse de l'exercice 7.27

1. $\left(\ln(n^2+2n+5)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   On sait que $n^2+2n+5 \sim n^2$. De plus $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty \neq 1$. Ainsi
   $$\ln(n^2+2n+5) \sim \ln(n^2) = 2\ln(n)$$
2. $\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, ainsi
   $$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n}$$
3. $\left(\ln\left(\frac{2n+5}{7n^2+3n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   On sait que $\frac{2n+5}{7n^2+3n} \sim \frac{2}{7n}$. De plus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{7n}$. Ainsi
   $$\ln\left(\frac{2n+5}{7n^2+3n}\right) \sim \ln\left(\frac{2}{7n}\right) = \ln(2) - \ln(7) - \ln(n) \sim -\ln(n)$$
4. $\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   $$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}}-1} \sim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$$
5. $\left(n^2\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   $$n^2\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \sim n^2\ln(n)$$
6. $\left(n\ln\left(1+e^{-n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   $$n\ln\left(1+e^{-n}\right) \sim ne^{-n}$$
7. $\left(4n - \sqrt{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $4n - \sqrt{n^2+1} = n\left(4 - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$ et $4 - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \sim 3$. D'où
   $$4n - \sqrt{n^2+1} \sim 3n$$

8. $\left(\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{n+3}} \sim \sqrt{n^2 n} \sim \sqrt{n}$$

9. $\left((n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(n-3)\sqrt{\frac{n^3+1}{n^2+3}} \sim n\sqrt{\frac{n^3}{n^2}} \sim n\sqrt{n}$$

10. $\left(\dfrac{\cos(n)+\ln n}{(n+3)^2-e^{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{\cos(n)+\ln n}{(n+3)^2-e^{\sqrt{n}}} \sim -\frac{\ln(n)}{e^{\sqrt{n}}}$$

11. $\left(\sqrt[n]{2+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt[n]{2+(-1)^n} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+(-1)^n)}$

D'où

$$e^{\frac{1}{n}\ln(2-1)} \leqslant \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leqslant e^{\frac{1}{n}\ln(2+1)}$$

Ainsi

$$1 \leqslant \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leqslant e^{\frac{1}{n}\ln(3)}$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = 1$$

Ainsi

$$\sqrt[n]{2+(-1)^n} \sim 1$$

12. $\left(n^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$n^2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^2\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right) \sim n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \sim n^2\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2}$$

13. $\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n)^3} \sim \frac{n}{n} = 1$$

14. $\left(\dfrac{\ln(n^2+n)}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{\ln(n^2+n)}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{\ln(n^2)}{n} \sim 2\frac{\ln(n)}{n}$$

15. $\left(\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}}{\sqrt[3]{n^3-3n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{\sqrt{n^3+n+1}}{\sqrt[3]{n^3-3n+1}} \sim \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^3}} \sim \sqrt{n}$$

Réponse de l'exercice 7.28

On a

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\tan\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} \sim \frac{\frac{1}{n^2}\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\frac{1}{n^3}}} \sim \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{\sqrt{2}}{n^3}} \sim \sqrt{2}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\tan\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} = \sqrt{2}$$

Réponse de l'exercice 7.29

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Alors on a

$$\ln(u_n) \sim n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim n\frac{x}{n} = x$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^x$

Réponse de l'exercice 7.30

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\alpha n - 1 \leqslant \lfloor \alpha n \rfloor \leqslant \alpha n$$

D'où

$$1 - \frac{1}{\alpha n} \leqslant \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{\alpha n} \leqslant 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{\alpha n} = 1$, c'est-à-dire $\lfloor \alpha n \rfloor \sim \alpha n$

Chapitre 8

Systèmes d'équations linéaires

Exercices

Exercice 8.1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1. Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions
2. Si un système a plus d'équations que d'inconnues alors il n'a pas de solutions
3. Si un système a tous ses second membres nuls alors il possède au moins une solution
4. Si un système ne possède pas de solution alors tous ses seconds membres sont non-nuls
5. Si un système a une unique solution alors il a autant d'équations que d'inconnues
6. Si un système a une solution unique alors son rang est égal au nombre d'inconnues

Exercice 8.2

Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{cccccrr} 3x & +4y & -5z & +6t & +u & = & 0 \\ 2x & -3y & +3z & -3t & & = & 0 \\ 4x & +11y & -13z & +16t & -u & = & 0 \\ 7x & -2y & +z & +t & -2u & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\quad \left\{\begin{array}{ccccrr} 2x & +5y & +2z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \\ x & +4y & +7z & = & 0 \\ x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{ccccrr} x & -2y & -2z & = & -1 \\ 2x & -2y & -2z & = & -2 \\ 2x & +y & +3z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(S_6)\quad \left\{\begin{array}{cccccrr} x & -3y & +4z & -2t & = & 5 \\ -x & +5y & -6z & +3t & = & -3 \\ x & -2y & +\frac{7}{2}z & -2t & = & 9 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\quad \left\{\begin{array}{cccccrr} 3x & & +2z & & = & 0 \\ & 3y & +z & +3t & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_7)\quad \left\{\begin{array}{ccccrr} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & +3z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\quad \left\{\begin{array}{ccccrr} x & & +3z & = & 1 \\ 3x & -y & +2z & = & 1 \\ 4x & & +2z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_8)\quad \left\{\begin{array}{ccccrr} & iy & +z & = & 1 \\ ix & +y & & = & 0 \\ x & & +iz & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_9)\quad \left\{\begin{array}{cccccccc} 12x_1 & +12x_2 & -24x_3 & +36x_4 & -48x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8.3

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de λ, si le système linéaire suivant admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} (1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8.4

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre m

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & +my & +z & = & 1 \\ mx & +y & +(m-1)z & = & m \\ x & +y & +z & = & m+1 \end{array}\right.$$

Exercice 8.5

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Résoudre le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & a \\ x & +jy & +j^2z & = & b \\ x & +j^2y & +jz & = & c \end{array}\right.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les solutions soient réelles.

Exercice 8.6

Résoudre le système suivant

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8.7

Résoudre le système linéaire d'inconnues (x, y, z, t) dans $\mathbb{R}^4$

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{cccccccl} 2x & - & 4y & + & 5z & + & 3t & = 8 \\ 4x & - & 8y & + & 17z & - & 11t & = 6 \\ 3x & - & 6y & + & 4z & + & 2t & = 6 \end{array}\right.$$

Exercice 8.8

Étudier, en fonction de a et b, l'existence de solutions du système suivant (on ne demande pas l'expression des éventuelles solutions

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} ax & +by & +z & = & 1 \\ x & +aby & +z & = & b \\ x & +by & +az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8.9

Trouver des constantes α, β et γ telles que l'égalité

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3)$$

ait lieu pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2

Réponses

Réponse de l'exercice 8.1

1. Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions : FAUX
   Par exemple le système suivant a plus d'inconnues que d'équations mais n'a pas de solutions
   $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$
2. Si un système a plus d'équations que d'inconnues alors il n'a pas de solutions : FAUX
   Par exemple le système suivant a plus d'équations que d'inconnues et admet une infinité de solutions
   $$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$$
3. Si un système a tous ses second membres nuls alors il possède au moins une solution : VRAI
   Si tous les second membre sont nuls alors le p-uplet nul $(0,\cdots,0)$ est toujours solution.
4. Si un système ne possède pas de solution alors tous ses seconds membres sont non-nuls : FAUX
   Le système suivant n'admet pas de solutions mais n'a pas tous ses seconds membres sont non-nuls.
   $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$
5. Si un système a une unique solution alors il a autant d'équations que d'inconnues : FAUX
   Le système suivant a une unique solution mais n'a pas autant d'équations que d'inconnues
   $$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$
6. Si un système a une solution unique alors son rang est égal au nombre d'inconnues : VRAI
   Il s'agit d'un résultat du cours

Ce qu'il faut retenir de cet exercice c'est que le nombre d'inconnues et le nombre d'équations ne donnent pas d'informations fiables sur le nombre de solutions du système. C'est le rang qui est l'information décisive.

Réponse de l'exercice 8.2

$$(S_1)\quad \begin{cases} 3x & +4y & -5z & +6t & +u & = & 0 \\ 2x & -3y & +3z & -3t & & = & 0 \\ 4x & +11y & -13z & +16t & -u & = & 0 \\ 7x & -2y & +z & +t & -2u & = & 0 \end{cases}$$

Commençons par amener un pivot plus simple sur la première ligne, on fait
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x & +7y & -8z & +9t & +u & = & 0 \\ 2x & -3y & +3z & -3t & & = & 0 \\ 4x & +11y & -13z & +16t & -u & = & 0 \\ 7x & -2y & +z & +t & -2u & = & 0 \end{cases}$$

On va maintenant éliminer les termes en x des lignes 2 à 4 :
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1$
Alors

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x & +7y & -8z & +9t & +u & = & 0 \\ & -17y & +19z & -21t & -2u & = & 0 \\ & -17y & +19z & -20t & -5u & = & 0 \\ & -51y & +57z & +-62t & -9u & = & 0 \end{cases}$$

On élimine maintenant les termes en y.
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$
Alors

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x & +7y & -8z & +9t & +u & = & 0 \\ & -17y & +19z & -21t & -2u & = & 0 \\ & & & t & -3u & = & 0 \\ & & & t & -3u & = & 0 \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à faire $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ et on a

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x & +7y & -8z & +9t & +u & = & 0 \\ & -17y & +19z & -21t & -2u & = & 0 \\ & & & t & -3u & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de S_1 est alors

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \left(-\frac{21u - 3z}{17}, -\frac{65u - 19z}{17}, z, 3u, u \right) \ , \ (z, u) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$(S_2)\quad \begin{cases} x & -2y & -2z & = & -1 \\ 2x & -2y & -2z & = & -2 \\ 2x & +y & +3z & = & -3 \end{cases}$$

On élimine les termes en x : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & -2z & = & -1 \\ & 2y & +2z & = & 0 \\ & 5y & +7z & = & -1 \end{array}\right.$$

On fait ensuite
$L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_2$
puis
$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & -2z & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ & & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_2) est alors

$$\mathcal{S}_2 = \left\{\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$(S_3) \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x & & +2z & & = & 0 \\ & 3y & +z & +3t & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

On commence par permuter les lignes 1 et 3 pour amener un pivot simple
$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & 3y & +z & +3t & = & 0 \\ 3x & & +2z & & = & 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

On élimine les termes en x
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$(S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & 3y & +z & +3t & = & 0 \\ & -3y & -z & -3t & = & 0 \\ & -3y & -z & -3t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ensuite on effectue les opérations
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$(S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & 3y & +z & +3t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est alors

$$\mathcal{S}_3 = \left\{\left(-\frac{2z}{3}, -\frac{z+3t}{3}, z, t\right)\ ,\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

(S_4) $\quad\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & +3z & = & 1 \\ 3x & -y & +2z & = & 1 \\ 4x & & +2z & = & 1 \end{array}\right.$

On effectue les opérations suivantes
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
Alors

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & & +3z & = & 1 \\ & -y & -7z & = & -2 \\ & & -10z & = & -3 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_4) est alors

$$\mathcal{S}_4 = \left\{\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)\right\}$$

(S_5) $\quad\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +5y & +2z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \\ x & +4y & +7z & = & 0 \\ x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}\right.$

On permute L_1 et L_2
$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$(S_5) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +5y & +2z & = & 0 \\ x & +4y & +7z & = & 0 \\ x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}\right.$$

On effectue les opérations suivantes
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$(S_5) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 0 \\ & y & +4z & = & 0 \\ & 2y & +8z & = & 0 \\ & y & +4z & = & 0 \end{array}\right.$$

On effectue les opérations suivantes
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$(S_5) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 0 \\ & y & +4z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_5) est alors

$$\mathcal{S}_5 = \{(9z, -4z, z)\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$$

$$(S_6)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -3y & +4z & -2t & = & 5\\ -x & +5y & -6z & +3t & = & -3\\ x & -2y & +\frac{7}{2}z & -2t & = & 9\end{array}\right.$$

On effectue les opérations suivantes
$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S_6) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -3y & +4z & -2t & = & 5\\ & 2y & -2z & +t & = & 2\\ & y & -\frac{1}{2}z & & = & 4\end{array}\right.$$

On effectue les opérations suivantes
$L_3 \leftarrow 2L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$(S_6) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -3y & +4z & -2t & = & 5\\ & 2y & -2z & +t & = & 2\\ & & z & -t & = & 6\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_6) est alors

$$\mathcal{S}_6 = \left\{\left(-\frac{t-4}{2}, \frac{t+14}{2}, t+6, t\right)\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$(S_7)\qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 3\\ x & +2y & +z & = & 2\\ 2x & +3y & +3z & = & 6\end{array}\right.$$

On effectue les opérations suivantes
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$(S_7) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 3\\ & y & -z & = & -1\\ & y & -z & = & 0\end{array}\right.$$

Puis
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$(S_7) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 3\\ & y & -z & = & -1\\ & & 0 & = & -1\end{array}\right.$$

La dernière équation est impossible, ainsi l'ensemble des solutions de (S_7) est alors

$$\mathcal{S}_7 = \emptyset$$

$$(S_8)\qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} & iy & +z & = & 1\\ ix & +y & & = & 0\\ x & & +iz & = & 1\end{array}\right.$$

On permute les lignes 1 et 3
$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & +iz & = & 1 \\ ix & +y & & = & 0 \\ & iy & +z & = & 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations suivantes
$L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$

$$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & +iz & = & 1 \\ & y & +z & = & -i \\ & iy & +z & = & 1 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - iL_2$

$$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & +iz & = & 1 \\ & y & +z & = & -i \\ & & (1-i)z & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_8) est alors

$$\mathcal{S}_8 = \{(1, -i, 0)\}$$

$$(S_9) \qquad \begin{cases} 12x_1 & +12x_2 & -24x_3 & +36x_4 & -48x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{12}L_1$

$$(S_9) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$

$$(S_9) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & & 3x_3 & -8x_4 & +13x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & -10x_4 & +11x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$(S_9) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & & & -11x_4 & +10x_5 & = & 0 \\ & & & -11x_4 & +10x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{11}L_3$

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & -\dfrac{10}{11}x_5 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -\dfrac{14}{11}x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & & +\dfrac{21}{11}x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & -\dfrac{10}{11}x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & & & +\dfrac{28}{11}x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & & +\dfrac{21}{11}x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & -\dfrac{10}{11}x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de S_9 est alors

$$\mathcal{S}_9 = \left\{ \left(-x_2 - \frac{28}{11}x_5, x_2, -\frac{21}{11}x_5, \frac{10}{11}x_5, x_5 \right) \ , \ (x_2, x_5) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Réponse de l'exercice 8.3

Pour répondre à la question il nous faut calculer le rang de (S). On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$L_1 \leftrightarrow L_4$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +z & +(1+\lambda)t & = & 1 \\ x & +(1+\lambda)y & +z & +t & = & 1 \\ x & +y & +(1+\lambda)z & +t & = & 1 \\ (1+\lambda)x & +y & +z & +t & = & 1 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - (1+\lambda)L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +z & +(1+\lambda)t & = & 1 \\ & \lambda y & & -\lambda t & = & 0 \\ & & \lambda z & -\lambda t & = & 0 \\ & -\lambda y & -\lambda z & +(1-(\lambda+1)^2)t & = & -\lambda \end{array} \right.$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +z & +(1+\lambda)t & = & 1 \\ & \lambda y & & -\lambda t & = & 0 \\ & & \lambda z & -\lambda t & = & 0 \\ & & & -\lambda(\lambda+4)t & = & -\lambda \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 0$ alors (S) est compatible et de rang 1. Il admet donc une infinité de solutions.
Si $\lambda = -4$ alors (S) est incompatible, il n'admet donc aucune solution.
Enfin si $\lambda \notin \{0, -4\}$, (S) est un système de Cramer et admet donc une unique solution.

Réponse de l'exercice 8.4

$L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{cccc} x & +my & +z & = & 1 \\ & (1-m^2)y & -z & = & 0 \\ & (1-m)y & & = & m \end{array}\right.$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{cccc} x & +my & +z & = & 1 \\ & (1-m)y & & = & m \\ & (1-m^2)y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 - (1+m)L_2$

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{cccc} x & +my & +z & = & 1 \\ & (1-m)y & & = & m \\ & & -z & = & -m^2-m \end{array}\right.$$

On voit alors que, si $m \neq 1$ alors le système est compatible et de rang 3 et admet donc une unique solution qui est

$$\left(-\frac{m^3 - m^2 - 2\cdot m + 1}{m-1}, -\frac{m}{m-1}, m^2 + m\right)$$

Si $m = 1$ alors (S) devient

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \\ & & -z & = & -2 \end{array}\right.$$

Ce système est incompatible et n'admet donc aucune solution.

Réponse de l'exercice 8.5

On va essayer de simplifier le système via des opérations élémentaires
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
$L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & & & = & \dfrac{a+b+c}{3} \\ x & +jy & +j^2z & = & b \\ x & +j^2y & +jz & = & c \end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & & = & \dfrac{a+b+c}{3} \\ & jy & +j^2z = & \dfrac{2b-a-c}{3} \\ & j^2y & +jz = & \dfrac{2c-a-b}{3} \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 - jL_2$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & & = & \dfrac{a+b+c}{3} \\ & jy & +j^2z = & \dfrac{2b-a-c}{3} \\ & & +(j-1)z = & \dfrac{2c-a-b}{3} - j\dfrac{2b-a-c}{3} \end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{j^2}{j-1}L_3$
$L_2 \leftarrow j^2L_2$
$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{j-1}L_3$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & & = & \dfrac{a+b+c}{3} \\ & y & = & \dfrac{a+bj^2+cj}{3} \\ & & z = & \dfrac{a+bj+cj^2}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (S) est

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+bj^2+cj}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}\right)\right\}$$

Pour trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les solutions soient réelles on va procéder par analyse-synthèse.

Supposons dans un premier temps que $A = \dfrac{a+b+c}{3}$, $B = \dfrac{a+bj^2+cj}{3}$ et $C = \dfrac{a+bj+cj^2}{3}$ sont réels.
Alors $A+B+C = a$ est réel. De plus $B - C = \dfrac{i\sqrt{3}}{(}c-b)$ est réel et $A - \dfrac{a}{3} = \dfrac{b+c}{3}$ est réel.
Ainsi $a \in \mathbb{R}$, $b+c \in \mathbb{R}$, $c-b \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(c) = -\mathrm{Im}(b)$ et $\mathrm{Re}(c) = \mathrm{Re}(b)$.
On obtient donc $a \in \mathbb{R}$, $c = \overline{b}$.
On a donc prouvé que, si les solutions sont réelles, alors $a \in \mathbb{R}$ et $c = \overline{b}$.
Réciproquement, supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $c = \overline{b}$ alors

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+2\,\mathrm{Re}(b)}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a+bj^2+cj}{3} = \frac{a - \frac{1}{2}(b+c) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(b-c)}{3} = \frac{a - \mathrm{Re}(b) + \sqrt{3}\,\mathrm{Im}(b)}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a+bj+cj^2}{3} = a - \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+bj^2+cj}{3} \in \mathbb{R}$$

On a donc obtenu la condition nécessaire et suffisante suivante :
Les solutions sont réelles si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $c = \overline{b}$

Réponse de l'exercice 8.6

L'astuce ici est de commencer par la fin en faisant : $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-2}$, etc jusqu'à $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient alors

$$(S) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_n & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On fait ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ etc jusqu'à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$. On obtient alors

$$(S) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors

$$\mathcal{S} = \{(1, 0, 0, \cdots, 0)\}$$

Réponse de l'exercice 8.7

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{3}{2}L_1$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} 2x & - & 4y & + & 5z & + & 3t & = 8 \\ & & & + & 7z & - & 17t & = -10 \\ & & & - & \frac{7}{2}z & - & \frac{5}{2}t & = -6 \end{array} \right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \dfrac{1}{2}L_2$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} 2x & - & 4y & + & 5z & + & 3t & = 8 \\ & & & + & 7z & - & 17t & = -10 \\ & & & & & - & 11t & = -11 \end{array} \right.$$

Le système $(\mathcal{S})$ est de rang 3. L'ensemble des 4-uplets solutions de $(\mathcal{S})$ est

$$\{(2y, y, 1, 1) \;\; y \in \mathbb{R}\}$$

Réponse de l'exercice 8.8

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +by & +az & = & 1 \\ x & +aby & +z & = & b \\ ax & +by & +z & = & 1 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & +by & +az & = & 1 \\ & (ab-b)y & +(1-a)z & = & b-1 \\ & (b-ab)y & +(1-a^2)z & = & 1-a \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & +by & +az & = & 1 \\ & b(a-1)y & +(1-a)z & = & b-1 \\ & & (2+a)(1-a)z & = & b-a \end{array}\right.$$

Si $a = 1$ et $b \neq 1$ alors la deuxième ligne est $0 = b - 1$, le système est incompatible, il n'a donc pas de solutions.

Si $a = 1$ et $b = 1$ alors le système est compatible et de rang 1, il admet donc une infinité de solutions.

Si $a = -2$ et $b \neq a$ alors la troisième ligne est $0 = b - a$, le système est incompatible, il n'a donc pas de solutions.

Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est compatible et de rang 2, il admet donc une infinité de solutions.

Enfin, si $a \notin \{-2, 1\}$ alors le système est compatible et de rang 3, il admet donc une unique solution.

Réponse de l'exercice 8.9

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Il nous faut ici trouver α, β et γ telles que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on ait

$$\int_0^1 ax^2 + bx + c \,\mathrm{d}x = \alpha(a + b + c) + \beta(4a + 2b + c) + \gamma(9a + 3b + c)$$

Or

$$\int_0^1 ax^2 + bx + c \,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

et

$$\alpha(a + b + c) + \beta(4a + 2b + c) + \gamma(9a + 3b + c) = (\alpha + 4\beta + 9\gamma)a + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)b + (\alpha + \beta + \gamma)c$$

Il nous faut ici trouver α, β et γ telles que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on ait

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = (\alpha + 4\beta + 9\gamma)a + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)b + (\alpha + \beta + \gamma)c$$

C'est-à-dire (α, β, γ) vérifie

$$(S) : \begin{cases} \alpha + 4\beta + 9\gamma = \frac{1}{3} \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

Il nous faut donc résoudre ce système, on utilise pour cela la méthode du pivot de Gauss

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \beta+2\gamma=-\dfrac{1}{2} \\ 3\beta+8\gamma=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \beta+2\gamma=-\dfrac{1}{2} \\ 2\gamma=\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Ainsi $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\dfrac{23}{12},-\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{12}\right)$.

Chapitre 9

Polynômes

Exercices

Exercice 9.1

Donner les coefficients dominants, constant et le degré des polynômes suivants

$$(X-1)^n-(X+1)^n \quad , \quad (1-X^4)^5+(X^4-1)^4 \quad , \quad (1-X^3)^5+(X^5-1)^3 \quad , \quad (X^2+1)^{3n+1}-(X^2-1)^{3n+1}$$

Exercice 9.2

Trouver la multiplicité de -1 dans $P=X^4+2X^3+2X^2+2X+1$ puis factoriser P sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 9.3

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 des polynômes :

1. $(n-4)X^n-nX^{n-2}+nX^2-(n-4)$ avec $n \geq 5$.
2. $X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1$ avec $n \geq 2$.

Exercice 9.4

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)=\lambda$. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X+1)=P(X)$.

Exercice 9.5

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant la relation $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

Indication : Étudier le degré de P

Exercice 9.6

Soit P une fonction polynomiale paire. Montrer que P n'a que des termes de degré pair.

Exercice 9.7

A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme X^4+aX^2+bX+c est-il divisible par X^2+X+1 ?

Exercice 9.8

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'une des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ soit le double de l'autre.

Exercice 9.9

Factoriser en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes

$$X^6 + 1, \quad X^9 + X^6 + X^3 + 1 \quad \text{et} \quad X^6 - 2\cos\phi X^3 + 1$$

Exercice 9.10

Soit $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$ Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que P ait une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Exercice 9.11

Résoudre $x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda = 0$, sachant qu'il y a deux solutions x_1 et x_2 vérifiant $x_1x_2 = 2$. En déduire λ.

Exercice 9.12

Soient x_1, x_2 et x_3 les trois racines complexes du polynôme $X^3 + pX + q$. Trouver le polynôme unitaire du troisième degré dont les racines sont x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3.

Exercice 9.13

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Exercice 9.14

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$.

Exercice 9.15

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant la relation $P(X) = XP'(X)$.

Exercice 9.16

1. Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos(4\theta) = P(\cos(\theta))$$
2. On pose $Q = P - X$. Calculer
$$Q(\cos(0)), \quad Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right), \quad Q\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$
3. Factoriser Q.
4. En déduire un expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Exercice 9.17

1. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 \neq x_1$. Soit $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer un polynôme P_1 de degré inférieur ou égal à 1 tel que $P_1(x_0) = a_0$ et $P_1(x_1) = a_1$.
2. Soit (x_0, x_1, x_2) trois réels distincts. Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer un polynôme P_2 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P_2(x_0) = a_0$, $P_2(x_1) = a_1$ et $P_2(x_2) = a_2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_0, \cdots, x_n)$ $n+1$ réels distincts et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que
$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P_n(x_k) = a_k$$
Montrer qu'alors, s'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad Q(x_k) = a_k$ alors $Q = P_n$

Réponses

Réponse de l'exercice 9.1

La manière la plus simple de déterminer le coefficient constant d'un polynôme est de l'évaluer en 0.

1. $(X-1)^n - (X+1)^n$
$$\begin{aligned}(X-1)^n - (X+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \left((-1)^{n-k} - 1\right) \\ &= 0X^n - 2nX^{n-1} + \cdots + (-1)^n - 1\end{aligned}$$
Ainsi le degré de $(X-1)^n - (X+1)^n$ est $n-1$, le coefficient dominant est $-2n$ et le coefficient constant est $(-1)^n - 1$.
2. $(1-X^4)^5 + (X^4-1)^4$
$$(1-X^4)^5 + (X^4-1)^4 = -X^{20} + 6X^{16} - 14X^{12} + 16X^8 - 9X^4 + 2$$
Ainsi le degré de $(1-X^4)^5 + (X^4-1)^4$ est 20, le coefficient dominant est -1 et le coefficient constant est 2.
3. $(1-X^3)^5 + (X^5-1)^3$
$$5X^{12} - 3X^{10} - 10X^9 + 10X^6 + 3 \cdot X^5 - 5 \cdot X^3$$
Ainsi le degré de $(1-X^3)^5 + (X^5-1)^3$ est 12, le coefficient dominant est 5 et le coefficient constant est 0.
4. $(X^2+1)^{3n+1} - (X^2-1)^{3n+1}$
$$\begin{aligned}(X^2+1)^{3n+1} - (X^2-1)^{3n+1} &= \sum_{k=0}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} X^{2k} - \sum_{k=0}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} X^{2k} (-1)^{3n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} X^{2k} \left(1 - (-1)^{3n+1-k}\right) \\ &= 0X^{6n+2} + 2(3n+1)X^{6n} + \cdots + 1 - (-1)^{3n+1}\end{aligned}$$
Ainsi le degré de $(X^2+1)^{3n+1} - (X^2-1)^{3n+1}$ est $6n$, le coefficient dominant est $6n+2$ et le coefficient constant est $1 - (-1)^{3n+1}$.

Réponse de l'exercice 9.2

On calcule $P(-1) = 0$. Puis

$$P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2$$

D'où $P'(-1) = 0$.

$$P''(X) = 12X^2 + 12X + 4$$

D'où $P''(-1) \neq 0$. La multiplicité de -1 est donc 2.

On peut donc factoriser P par $(X+1)^2$. Le quotient Q est de degré 2. On trouve

$$P = (X+1)^2(X^2+1) = (X+1)^2(X-i)(X+i)$$

Réponse de l'exercice 9.3

1. Soit $P = (n-4)X^n - nX^{n-2} + nX^2 - (n-4)$ avec $n \geq 5$. On a $P(1) = 0$.

$$P' = n(n-4)X^{n-1} - n(n-2)X^{n-3} + 2nX$$

D'où $P'(1) = n(n-4-(n-2)+2) = 0$.

$$P'' = n(n-1)(n-4)X^{n-2} - n(n-2)(n-3)X^{n-4} + 2n$$

D'où $P''(1) = n(n^2-5n+4-(n^2-5n+6)+2) = 0$.

$$P^{(3)} = n(n-1)(n-2)(n-4)X^{n-3} - n(n-2)(n-3)(n-4)X^{n-5}$$

$P^{(3)}(1) = n(n-2)(n-4)(n-1-(n-3)) = 2n(n-2(n-4) \neq 0$. Donc 1 est de multiplicité 3.

2. Soit $Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ avec $n \geq 2$. On a $Q(1) = 0$.

$$Q' = (2n+1)X^{2n} - (n+1)(2n+1)X^n + n(2n+1)X^{n-1}$$

D'où $Q'(1) = (2n+1)(1-(n+1)+n) = 0$.

$$Q'' = (2n+1)\left(2nX^{2n-1} - n(n+1)X^{n-1} + n(n-1)X^{n-2}\right)$$

D'où $Q''(1) = (2n+1)(2n - n(n+1) + n(n-1)) = 0$. Pour la dérivée troisième, il faut distinguer le cas $n = 2$. Si $n = 2$ alors

$$Q^{(3)} = 60X^2 - 30X$$

D'où $Q^{(3)}(1) \neq 0$.
Si $n \neq 2$ alors

$$Q'' = (2n+1)n\left((4n-2)X^{2n-2} - (n^2-1)X^{n-2} + (n-1)(n-2)X^{n-3}\right)$$

D'où $Q^{(3)}(1) = n(2n+1)(4n-2-n^2+1+n^2-3n+2) = n^2(2n+1) \neq 0$.
Dans tous les cas 1 est de multiplicité 3.

Réponse de l'exercice 9.4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = \lambda$. Alors le polynôme $P - \lambda$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. D'où $P = \lambda$.

Réciproquement il est aisé de vérifier que le polynôme constant égal à λ vérifie bien $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = \lambda$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$. Alors, en particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $P(n) = P(0)$. Ainsi P est un polynôme constant (qui vaut toujours $P(0)$).

Réciproquement il est aisé de vérifier que les polynômes constants vérifient bien $P(X+1) = P(X)$.

Réponse de l'exercice 9.5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$, en particulier on a $\deg(P(X^2)) = \deg\big((X^2+1)P(X)\big)$, i.e. $2d = d + 2$, d'où $d = 2$. On peut donc écrire $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Par suite on a

$$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

D'où

$$\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ a + c = b \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$$

c'est-à-dire $P = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement il est aisé de vérifier que, si $P = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Réponse de l'exercice 9.6

Écrivons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Soit alors $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_k X^k$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $P(-x) = Q(x)$.

Comme P est paire, on a alors $P = Q$, ainsi, pour tout entier $k \in [\![0, d]\!]$

$$a_k = (-1)^k a_k$$

Si k est pair on a donc $a_k = a_k$ et si k est impair on a $a_k = -a_k$ d'où $a_k = 0$.

Tous les termes de degré impair de P sont ainsi nuls. P n'a donc bien que des termes de degré pair.

Réponse de l'exercice 9.7

$X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ s'il existe un polynôme $dX^2 + eX + f$ tel que

$$X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(dX^2 + eX + f)$$

C'est-à-dire

$$X^4 + aX^2 + bX + c = dX^4 + (e+d)X^3 + (d+e+f)X^2 + (e+f)X + f$$

Il nous faut donc déterminer si le système suivant admet des solutions

$$\begin{cases} d & = 1 \\ e + d & = 0 \\ a - d - e - f & = 0 \\ b - e - f & = 0 \\ c - f & = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} d & = 1 \\ e & = -1 \\ a - f & = 0 \\ b + 1 - f & = 0 \\ c - f & = 0 \end{cases}$$

On voit que ce système a des solutions si et seulement si $a = c = b + 1$.
Ainsi $X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $a = c = b + 1$.

Réponse de l'exercice 9.8

On sait que tout polynôme de degré 2 admet deux racines complexes (comptées avec multiplicité). Notons a et b ces racines. On a alors $a + b = 7$ et $ab = \lambda$.

Supposons que l'un des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ soit le double de l'autre. Pour fixer les idées $b = 2a$. Alors

$$3a = 7 \qquad \text{et } 2a^2 = \lambda$$

D'où $a = \dfrac{7}{3}$ et $\lambda = \dfrac{98}{9}$.

Ainsi, si une des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ soit le double de l'autre. alors $\lambda = \dfrac{98}{9}$.

Réciproquement, si $\lambda = \dfrac{98}{9}$ alors il est aisé de vérifier que $X^2 - 7X + \lambda$ admet comme racine $\dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{14}{3}$, d'où l'une des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ est bien le double de l'autre.

Réponse de l'exercice 9.9

1. Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

   D'où, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^6 + 1 = (X+i)(X-i)(X+ij^2)(X-ij^2)(X+ij)(X-ij)$$

2. Posons $Y = X^3$, on a $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y+1)(Y^2+1)$. D'où

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= (X^3+1)(X^6+1) \\ &= (X^2 - X + 1)(X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2+1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} X^6 - 2\cos\phi X^3 + 1 &= (X^3 - e^{i\phi})(X^3 - e^{-i\phi}) \\ &= (X - e^{i\frac{\phi}{3}})(X - e^{i\frac{\phi}{3}}j)(X - e^{i\frac{\phi}{3}}j^2)(X - e^{-i\frac{\phi}{3}})(X - e^{-i\frac{\phi}{3}}j)(X - e^{-i\frac{\phi}{3}}j^2) \\ &= (X^2 - 2\cos(\tfrac{\phi}{3})X + 1)(X^2 - 2\cos(\tfrac{\phi+2\pi}{3})X + 1)(X^2 - 2\cos(\tfrac{\phi-2\pi}{3})X + 1) \end{aligned}$$

   Le cas où $\phi = 0$ ou π devrait être traité séparément mais n'est pas difficile.

Réponse de l'exercice 9.10

On suppose que P admet une racine triple α. Ainsi il existe $(b,c)\in\mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{aligned}X^5+aX^2+15X-6i &= (X-\alpha)^3(X^2+bX+c)\\ &= (X^3-3\alpha X^2+3\alpha^2X-\alpha^3)(X^2+bX+c)\\ &= X^5+(b-3\alpha)X^4+(c-3b\alpha+3\alpha^2)X^3+(3b\alpha^2-3c\alpha-\alpha^3)X^2+(3c\alpha^2-b\alpha^3)X-c\alpha^3\end{aligned}$$

On identifie les coefficients

$$\begin{cases} b-3\alpha &= 0\\ c-3b\alpha+3\alpha^2 &= 0\\ 3b\alpha^2-3c\alpha-\alpha^3 &= a\\ 3c\alpha^2-b\alpha^3 &= 15\\ -c\alpha^3 &= -6i\end{cases}$$

Il ne s'agit pas d'un système linéaire, on ne peut donc pas utiliser la méthode du pivot de Gauss. On va faire des substitutions successives

$$\begin{cases} b &= 3\alpha\\ c &= 6\alpha^2\\ 9\alpha^3-3c\alpha-\alpha^3 &= a\\ 3c\alpha^2-3\alpha^4 &= 15\\ -c\alpha^3 &= -6i\end{cases}$$

$$\begin{cases} b &= 3\alpha\\ c &= 6\alpha^2\\ -10\alpha^3 &= a\\ 15\alpha^4 &= 15\\ -6\alpha^5 &= -6i\end{cases}$$

on trouve que $\alpha=i$, $a=10i$, $b=3i$ et $c=-6$. Par suite on a

$$P=(X-i)^3(X^2+3iX-6)=(X-i)^3\left(X-\frac{-3i+\sqrt{15}}{2}\right)\left(X-\frac{-3i-\sqrt{15}}{2}\right)$$

Réponse de l'exercice 9.11

Soit $P=X^3-6X^2+11X+\lambda$. On sait que P admet trois racines complexes (comptées avec multiplicité), écrivons alors

$$P=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)=X^3-(x_1+x_2+x_3)X^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)X-(x_1x_2x_3)$$

Ainsi on a

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 6\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= 11\\ x_1x_2x_3 &= -\lambda\end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+x_3 &= 6\\ x_3(x_1+x_2) &= 9\\ 2x_3 &= -\lambda\end{cases}$$

Notons $a = x_1 + x_2$. On a alors $ax_3 = 9$ et $a + x_3 = 6$. Ainsi a et x_3 sont les deux racines du polynôme $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$. D'où $x_3 = 3$ et $x_1 + x_2 = 3$.

Par suite on a $x_1x_2 = 2$ et $x_1+x_2 = 3$. x_1 et x_2 sont donc les racines du polynôme $X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$ Ainsi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (ou le contraire mais cela n'a aucune importance) et $x_3 = 3$.

On obtient également $\lambda = -x_1x_2x_3 = -6$.

Réponse de l'exercice 9.12

On a (cf exercice précédent)

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = -q \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} (x_1x_2)(x_2x_3)(x_1x_3) = (x_1x_2x_3)^2 = q^2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p \\ (x_1x_2)(x_1x_3) + (x_1x_2)(x_2x_3) + (x_1x_3)(x_2x_3) = (x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = -q \times 0 = 0 \end{cases}$$

Le polynôme recherché est donc $X^3 - pX^2 - q^2$.

Réponse de l'exercice 9.13

Posons

$$P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

On a alors

$$P = X^{n-1}\left(nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X^1 - 4\right) = X^{n-1}Q$$

On a $Q(2) = 8n - 4 \times (4n+1) + 8(n+1) - 4 = 0$. On peut donc factoriser Q par $X - 2$.

$$Q = (X-2)(nX^2 - (2n+1)X + 2) = (X-2)R$$

On a $R(2) = 4n - 2(2n+1) + 2 = 0$. On peut donc factoriser R par $X - 2$.

$$R = (X-2)(nX-1)$$

Finalement

$$P = X^{n-1}(X-2)^2(nX-1)$$

2 est donc une racine de P de multiplicité 2

Réponse de l'exercice 9.14

1. Il est facile de montrer qu'un tel polynôme existe puisque le polynôme X convient. Montrons que c'est le seul. Soit donc $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n$. Alors, en notant $Q = P - X$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Q(n) = 0$$

   Q admet donc une infinité de racines, Q est donc le polynôme nul, c'est-à-dire $P = X$.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$. Alors, en particulier, pour tout entier n on a $P(n) = n$. D'après la question précédente on a donc $P = X$.
   D'où, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ce qui est absurde. Ainsi il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$.

Réponse de l'exercice 9.15

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d tel que $P(X) = XP'(X)$ et soit $a_d X^d$ son monôme dominant. Le monôme dominant de $XP'(X)$ est $da_d X^d$. Ainsi $a_d X^d = da_d X^d$, d'où $d = 1$.

On peut donc écrire $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par suite on a

$$aX + b = X \times a$$

D'où $b = 0$.

Ainsi $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement il est aisé de vérifier que, si $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $P(X) = XP'(X)$.

Réponse de l'exercice 9.16

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{4i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(\theta)^4 + 4i\cos(\theta)^3\sin(\theta) - 6\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 - 4i\cos(\theta)\sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^4\right) \\
&= \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^4 \\
&= \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2(1 - \cos(\theta)^2) + (1 - \cos(\theta)^2)^2 \\
&= \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2 + 6\cos(\theta)^4 + 1 - 2\cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^4 \\
&= 8\cos(\theta)^4 - 8\cos(\theta)^2 + 1
\end{aligned}$$

Posons $P = 8X^4 - 8X^2 + 1$, on a alors $\cos(4\theta) = P(\cos(\theta))$.

2. On a

$$Q(\cos(0)) = P(\cos(0)) - \cos(0) = \cos(4 \times 0) - \cos(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) &= P\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) &= P\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
&= \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
&= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) &= P\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\&= \cos\left(\frac{16\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\&= \cos\left(4\pi - \frac{4\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\&= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\&= 0\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}Q &= (X-1)\left(X - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(X - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(X - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)\\&= (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(X - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)\end{aligned}$$

D'un autre coté on a

$$\begin{aligned}Q &= 8X^4 - 8X^2 - X + 1\\&= (X-1)(8X^3 + 8X^2 - 1)\\&= (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)(8X^2 + 4X - 2)\end{aligned}$$

On va factoriser le polynôme $8X^2 + 4X - 2$ son discriminant réduit vaut $4 + 16 = 20$. Le polynôme admet donc deux racines qui sont

$$\frac{2+\sqrt{20}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{2-\sqrt{20}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

D'où

$$Q = (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

4. D'après les questions précédentes on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$$

De plus $0 \leqslant \dfrac{2\pi}{5} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

De même on a

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Réponse de l'exercice 9.17

1.
$$P_1 = a_0\frac{X-a_1}{a_0-a_1} + a_1\frac{X-a_0}{a_1-a_0}$$

2.
$$P_2 = a_0\frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + a_1\frac{(X-a_0)(X-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + a_2\frac{(X-a_0)(X-a_1)}{a_2-a_0)(a_2-a_1)}$$

3. Soit Q de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad Q(x_k) = a_k$. Alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad (P_n - Q)(x_k) = 0$$

$P_n - Q$ admet donc $n+1$ racines distinctes, or $\deg(P_n - Q) \leqslant \max(\deg(P_n), \deg(Q)) = n$. $P_n - Q$ admet donc plus de racines que son degré, c'est donc le polynôme nul. C'est-à-dire $Q = P_n$.

Chapitre 10

Géométrie du plan et de l'espace

Exercices

Exercice 10.1

Dans le plan $\mathcal{P}$ donner, pour chacune des droites suivantes :
- Un vecteur directeur
- Un vecteur normal
- Une représentation paramétrique
- Une équation cartésienne

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,0)$ et $B(-2,-3)$
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $3x+2y=5$
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $C(-1,1)$ et de vecteur directeur $-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par $D(0,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

Exercice 10.2

Déterminer, s'ils existent, les points d'intersection des droites de l'exercice précédent.

Exercice 10.3

Soit C l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.
1. Montrer que C est un cercle et donner son centre et son rayon.
2. Déterminer les tangentes à C passant par $A(-1,0)$

Exercice 10.4

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Donner
1. Une base du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points $A(3,1,0)$, $B(2,2,2)$ et $C(-1,5,0)$. En déduire une représentation paramétrique de ce plan
2. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A(0,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
3. Un équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ passant par $A(1,1,0)$ et admettant pour base $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Donner un vecteur normal de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 10.5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $D = \{(2-2t, 1+t, t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ et $D' = \{(-1+t, 2-3t, a+2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. D et D' sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour que D et D' soient sécantes.
3. Déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant D et D'.

Exercice 10.6

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$. Soit D_1 la droite d'équation cartésienne $x+2y-3=0$, D_2 la droite d'équation cartésienne $2x+3y-5=0$ et soit $A(-1,-1)$ et $B(1,4)$.

1. Déterminer une équation de la droite parallèle à D_1 passant par A.
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à D_2 passant par B.

Exercice 10.7

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et D_1 et D_2 les droites définies par les systèmes suivants

$$D_1\ :\ \begin{cases} x+y+\lambda=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \qquad D_2\ :\ \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x+y+2\lambda=-2 \end{cases}$$

Déterminer λ pour que les droites D_1 et D_2 soient sécantes.

Exercice 10.8

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan P contenant le point $A(1,1,1)$ et la droite $D : \begin{cases} x+y+1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$

Exercice 10.9

Soit $A(1,-1,-1)$, $B(3,2,1)$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. On note D la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Trouver une équation cartésienne du plan P contenant le point A et la droite D.

Exercice 10.10

On considère le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et les deux droites

$$D_1\ :\ \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad D_2\ :\ \begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Déterminer la droite Δ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et qui coupe D_1 et D_2.

Exercice 10.11

Soit C le cercle passant par les points $A(1,-2)$, $B(4,2)$ et $C(1,4)$.

1. Déterminer le centre et le rayon de C.
2. Donner une équation cartésienne de C.

Exercice 10.12

Déterminer les points d'intersection du cercle C de centre $A(2,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et de la droite Δ d'équation $y - x + 1 = 0$.

Exercice 10.13

On fait glisser un règle le long d'un coin de mur. Les extrémités de la règle restant sur les murs. Déterminer l'ensemble des positions décrites par le milieu de la règle.

Exercice 10.14

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 1$ et P' le plan d'équation $x = y$. Soit $A(1,2,3)$. Déterminer les distances $d(A,P)$, $d(A,P')$ et $d(A, P \cap P')$.

Exercice 10.15

Soit A et B deux points distincts, soit C le barycentre de $(A,2)$, $(B,3)$ et D le barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$.

1. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$
2. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$

Exercice 10.16

Soit ABC un triangle.

1. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.

Exercice 10.17

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace d'équation $ax + by + cz = d$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$

1. Rappeler la définition de la distance de M à $\mathcal{P}$
2. Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$
3. En déduire une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer qu'alors
$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
6. Déterminer le projeté orthogonal de $M(1,1,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$ et la distance de M à $\mathcal{P}$

Réponses

Réponse de l'exercice 10.1

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,0)$ et $B(-2,-3)$.
$\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est
$$\mathcal{D}_1 = \{(1-3t, -3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est
$$\mathcal{D}_1\ :\ x - y = 1$$
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $3x + 2y = 5$
Remarquons que $E(1,1) \in \mathcal{D}_2$. $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$. $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_2$ est
$$\mathcal{D}_1 = \{(1-2t, 1+3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $C(-1,1)$ et de vecteur directeur $-3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_3$ est
$$\mathcal{D}_3 = \{(-1-3t, 1+t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$ est
$$\mathcal{D}_3\ :\ x + 3y = 2$$
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par $D(0,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_4$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_4$ est
$$\mathcal{D}_4 = \{(t, 2-t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ est
$$\mathcal{D}_4\ :\ x + y = 2$$

Réponse de l'exercice 10.2

— Déterminons $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1-2t, 1+3t)$, $M \in \mathcal{D}_1$ si et seulement si
$$(1-2t) - (1+3t) = 1 \ \Leftrightarrow\ t = -\frac{1}{5}$$
Ainsi $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left\{\left(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\}$

— Déterminons $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1-3t, -3t)$, $M \in \mathcal{D}_3$ si et seulement si
$$(1-3t) + 3(-3t) = 2 \ \Leftrightarrow\ t = -\frac{1}{12}$$
Ainsi $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \left\{\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

— Déterminons $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_4$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1-3t, -3t)$, $M \in \mathcal{D}_4$ si et seulement si

$$(1-3t) + (-3t) = 2 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{1}{6}$$

Ainsi $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_4 = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$

— Déterminons $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1-2t, 1+3t)$, $M \in \mathcal{D}_3$ si et seulement si

$$(1-2t) + 3(1+3t) = 2 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{2}{7}$$

Ainsi $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \left\{ \left(\frac{11}{7}, \frac{1}{7} \right) \right\}$

— Déterminons $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_4$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1-2t, 1+3t)$, $M \in \mathcal{D}_4$ si et seulement si

$$(1-2t) + (1+3t) = 2 \;\Leftrightarrow\; t = 0$$

Ainsi $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_4 = \{(1,1)\}$

— Déterminons $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_4$
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(t, 2-t)$, $M \in \mathcal{D}_3$ si et seulement si

$$t + 3(2-t) = 2 \;\Leftrightarrow\; t = 21$$

Ainsi $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_4 = \{(2,0)\}$

Réponse de l'exercice 10.3

1. On a

$$\begin{aligned} M(x,y) \in C &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Ainsi M appartient à C si et seulement si M appartient au cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 2. C est donc le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 2.

2. A est à l'extérieur du disque de centre Ω et de rayon 2. Par Ω passent donc deux tangentes au cercle C qui touchent C en B et C. Les triangles ΩAB et ΩAC sont alors rectangles en respectivement B et C. ΩA est l'hypoténuse de ces deux triangles. Ainsi B et C sont sur le cercle centré au milieu de ΩA et de rayon $\frac{\Omega A}{2}$, c'est-à-dire le cercle de centre $I(0,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Les coordonnées de B et C vérifient alors les deux équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ y^2 - 2y + 1 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 2y(y-2) = 0 \end{cases}$$

D'où $(x,y) = (1,0)$ ou $(x,y) = (-1,2)$. D'où $B(1,0)$ et $C(-1,2)$. Les deux tangentes sont alors la droite $T_1 = (AB)$ d'équation $y = 0$ et la droite $T_2 = (AC)$ d'équation $x = -1$.

Réponse de l'exercice 10.4

1. A, B et C ne sont pas alignés car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Une base de $\mathcal{P}_1$ est $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. On en déduit une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_1$
$$\mathcal{P}_1 = \{(3 - t - 4s, 1 + t + 4s, 2t)\ ,\ (t,s) \in \mathbb{R}^2\}$$
2. $\mathcal{P}_2$ admet pour équation cartésienne
$$\mathcal{P}_2\ :\ -2x + y + z = 1$$
3. $\mathcal{P}_3$ contient les points $A(1,1,0)$, $B = A + \overrightarrow{u} = (2,2,0)$ et $C = A + \overrightarrow{v} = (4,1,1)$. Un équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$ est de la forme $ax + b + y + cz = d$. On a alors
$$\begin{cases} a + b = d \\ 2a + 2b = d \\ 4a + b + c = d \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -3a \end{cases}$$
Ainsi $x - y - 3z = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_3$.

Réponse de l'exercice 10.5

1. D admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et D' admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. D et D' sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = t\overrightarrow{v}$, i.e. tel que $-2 = t$, $1 = -3t$ et $1 = 2t$, ce qui est clairement impossible. Ainsi D et D' ne sont pas parallèles.
2. D et D' sont sécantes s'il existe $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que
$$(2 - 2t, 1 + t, t) = (-1 + s, 2 - 3s, a + 2s)$$
C'est-à-dire, si le système suivant admet une solution
$$(S)\ :\ \begin{cases} s + 2t = 3 \\ 3s + t = 1 \\ -2s + t = a \end{cases}$$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} s+2t=3 \\ -5t=-8 \\ 5t=a+6 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{5}L_2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} s+2t=3 \\ t=\dfrac{8}{5} \\ 0=a-2 \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si $a=2$ auquel cas D et D' sont sécantes en $M\left(-\dfrac{6}{5}, \dfrac{13}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

3. Le plan P contenant D et D' admet comme base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on va donc trouver un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ convient. P est donc le plan d'équation $x+y+z=3$.

Réponse de l'exercice 10.6

1. Notons D_3 la droite parallèle à D_1 passant par A. D_3 admet pour vecteur normal tout vecteur normal à D_1. Ainsi $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à D_3.
   On en déduit que D_3 admet pour équation cartésienne $x+2y=-3$.
2. Notons D_4 la droite perpendiculaire à D_2 passant par B. D_4 admet pour vecteur normal tout vecteur directeur à D_1. Ainsi $3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à D_4.
   On en déduit que D_4 admet pour équation cartésienne $3x-2y=-5$.

Réponse de l'exercice 10.7

D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une solution

$$(S) : \begin{cases} x+y+\lambda=0 \\ y+z+1=0 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+y+2\lambda=-2 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\lambda \\ y+z=-1 \\ y+z=\lambda \\ -2y=\lambda-2 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$L_4 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_4$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\lambda \\ y+z=-1 \\ 0=\lambda+1 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$L_4 \leftrightarrow L_2$
$L_3 \leftrightarrow L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=-\dfrac{5}{2} \\ 0=\lambda+1 \end{cases}$$

On voit que ce système est compatible si $\lambda=-1$ et que dans ce cas l'intersection de D_1 et D_2 est le point de coordonnées $\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$

Réponse de l'exercice 10.8

Les points $B(-1,0,-1)$ et $C(0,-1,0)$ appartiennent à D et donc à P. A, B et C ne sont pas alignés (car $A \notin D$) ainsi P est l'unique plan contenant A, B et C. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}($ est donc une base de P. On en déduit une représentation paramétrique de P

$$P=\{(1-2t-s,1-t-2s,1-2t-s)\ ,\ (t,s)\in\mathbb{R}^2\}$$

Pour trouver une équation cartésienne de P on va chercher un vecteur normal à P donc orthogonal à la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Soit $\overrightarrow{n}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a donc

$$\begin{cases} -2x-y-2z=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases}$$

Ainsi $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à P.

On en déduit une équation cartésienne de P

$$P\ :\ x-z=0$$

Réponse de l'exercice 10.9

Il nous faut trouver un vecteur normal à P. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u})$ est une base de P. Il nous faut donc trouver un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$. $n=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ convient. Ainsi P est le plan d'équation $x-z=0$.

Réponse de l'exercice 10.10

Soit $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de Δ. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\Delta=\{(x_M+t,y_M-t,z_M+t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$$

Δ coupe D_1, ainsi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y_M-t=0$ et $z_M+t=1$, d'où $y_M=1-z_M$.

De même Δ coupe D_2, ainsi il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $x_M + s = 1$ et $z_M + s = 0$, d'où $z_M = x_M - 1$.

Ainsi un point M appartient à Δ si et seulement si $y_M = 1 - z_M$ et $z_M = x_M - 1$. Δ est donc la droite d'équation

$$\Delta \ : \ \begin{cases} y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 10.11

1. Le cercle C est le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est donc le point de concourance des médiatrices du triangle ABC. La médiatrice du segment $[AC]$ est la droite d'équation $y = 1$ et la médiatrice du segment $[AB]$ est la droite d'équation $3x + 4y = \frac{15}{2}$. Leur intersection est le point $\Omega\left(\frac{7}{6}, 1\right)$. Le rayon du cercle est la longueur ΩA, c'est-à-dire $\frac{19}{6}$.
2. Un équation cartésienne de C est alors

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{361}{36}$$

Réponse de l'exercice 10.12

Il s'agit de trouver les points dont les coordonnées (x, y) vérifient les deux équations suivantes

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ x = 1 + y \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 2 \\ x = 1 + y \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de C et Δ sont $\left(2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ et $(2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

Réponse de l'exercice 10.13

Notons L la longueur de la règle. $M(x, 0)$ le point d'appui au sol de la règle et $N(0, y)$ le point d'appui de la règle sur le mur. On a alors $MN = L$, d'où $y^2 = L^2 - x^2$, comme $y \geqslant 0$ on a donc $y = \sqrt{L^2 - x^2}$. Soit I le milieu de MN, I a pour coordonnées $\left(\frac{x}{2}, \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{2}\right)$.

La distance OI^2 vaut alors $\frac{x^2 + L^2 - x^2}{4} = \frac{L^2}{4}$. I appartient donc au cercle de centre 0 et de rayon $\frac{L}{2}$.

Réponse de l'exercice 10.14

Il nous faut déterminer les projetés orthogonaux de A sur P, P' et $P \cap P'$.

Le projeté orthogonal de A sur P est l'unique point H_1 de P tel que

$$\forall M \in P \quad \langle \overrightarrow{H_1 M}, \overrightarrow{H_1 A} \rangle = 0$$

C'est également l'intersection de P et de la droite perpendiculaire à P passant par A. La dite perpendiculaire D_1 est dirigée par $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et admet donc comme représentation paramétrique

$$D_1 = \{(1 + t, 2 + t, 3 + t) \ , \ t \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que H_1 ait pour coordonnées $(1+t, 2+t, 3+t)$. Comme $H_1 \in P$ on a de plus $1+t+2+t+3+t=1$ d'où $t=-\dfrac{5}{3}$. Ainsi H_1 est le point de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

On sait que la distance $d(A,P)$ est égale à la longueur AH_1. Ainsi

$$d(A,P) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Le projeté orthogonal de A sur P est l'unique point H_2 de P' tel que

$$\forall M \in P' \quad \langle \overrightarrow{H_2M}, \overrightarrow{H_2A} \rangle = 0$$

C'est également l'intersection de P' et de la droite perpendiculaire à P' passant par A. La dite perpendiculaire D_2 est dirigée par $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et admet donc comme représentation paramétrique

$$D_1 = \{(1+t, 2-t, 3)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que H_2 ait pour coordonnées $(1+t, 2-t, 3)$. Comme $H_2 \in P'$ on a de plus $1+t = 2-t$ d'où $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi H_2 est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 3\right)$.

On sait que la distance $d(A,P')$ est égale à la longueur AH_2. Ainsi

$$d(A,P') = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Enfin le projeté orthogonal de A sur $P \cap P'$ est l'unique point H_3 de $P \cap P'$ tel que

$$\forall M \in P \cap P' \quad \langle \overrightarrow{H_3M}, \overrightarrow{H_3A} \rangle = 0$$

La droite $P \cap P'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et passe par le point de coordonnées$(0,0,1)$. On a ainsi une représentation paramétrique de $P \cap P'$

$$P \cap P' = \{(t, t, 1-2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Il nous faut alors déterminer t_0 tel que H_3 ait pour coordonnées $(t_0, t_0, 1-2t_0)$. La condition $\forall M \in P \cap P' \quad \langle \overrightarrow{H_3M}, \overrightarrow{H_3A} \rangle$ se réécrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (t-t_0) \times (1-t_0) + (t-t_0) \times (2-t_0) + (2t_0 - 2t) \times (3 - 1 + 2t_0) = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (t-t_0)(-1-6t_0) = 0$$

D'où $t_0 = -\dfrac{1}{6}$ et H_3 admet pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{3}\right)$.

On sait que la distance $d(A, P \cap P')$ est égale à la longueur AH_3. Ainsi

$$d(A, P \cap P') = \frac{\sqrt{318}}{6}$$

Réponse de l'exercice 10.15

1. C est le barycentre de $(A,2)$, $(B,3)$, ainsi, pour tout point M on a $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MC}$. Il nous faut donc trouver l'ensemble des points M tels que $\|MC\| = 10$. Il s'agit du cercle de centre C et de rayon 10.

2. Pour tout point M on a $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MD}$. On cherche donc l'ensemble des points tels que $\|5\overrightarrow{MC}\|=\|5\overrightarrow{MD}\|$. Il s'agit de la médiatrice du segment $[CD]$.

Réponse de l'exercice 10.16

1. Soit G le barycentre de $(A,1),(B,1),(C,2)$, on a alors $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$. On cherche donc les points M tels que $4\overrightarrow{MG}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Il s'agit donc de la droite passant par G de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.
2. Pour $M\in\mathcal{P}$ on a
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}-4\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{CG}$$
On cherche donc les points M tels que
$$4\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{CG}$$
, il s'agit donc uniquement du point C

Réponse de l'exercice 10.17

1. Il s'agit d'une question de cours. On a
$$d(M,\mathcal{P})=\inf_{B\in\mathcal{P}}\|\overrightarrow{BM}\|$$
2. Le vecteur $\overrightarrow{n}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$ est normal à $\mathcal{P}$
3. Le vecteur $\overrightarrow{n}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$ est normal à P et donc dirige la droite D perpendiculaire à P passant par M. Cette droite admet comme représentation paramétrique
$$D=\{(x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$$
4. Le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point H à l'intersection de P et de la droite perpendiculaire à P passant par M.
Le vecteur $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à P et donc dirige la droite D perpendiculaire à P passant par M. Cette droite admet comme représentation paramétrique
$$D=\{(x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$$
Il existe donc t tel que H ait pour coordonnées (x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc). Comme $H\in P$ on a de plus
$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)=d$$
D'où $t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2}$.
Ainsi H a pour coordonnées
$$\left(x_0-a\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2},y_0-b\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2},z_0-c\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

5. On sait que $d(M,\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}$, on a alors

$$\begin{aligned} d(M,P) &= \|\overrightarrow{MH}\| \\ &= \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 + (z_H - z_0)^2} \\ &= \sqrt{(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2} \\ &= |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

6. Il nous suffit d'appliquer les questions précédentes avec $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$ et $d = 0$. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H de coordonnées $(x_M + ta, y_M + tb, z_M + tc)$ où $t = -\dfrac{ax_M + by_M + cz_M - d}{a^2 + b^2 + c^2}$, c'est-à-dire

$$t = -\frac{1 - 1 + 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = -\frac{1}{3}$$

D'où H a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1 - 1 + 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Chapitre 11

Matrices

Exercices

Exercice 11.1

Soit a, b, c trois complexes tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = A^2 + I_3$$

Montrer que $AB = BA = 0_{3,3}$ et $B^2 = B$.

Exercice 11.2

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer U^2 et U^3.
2. Exprimer U^3 sous la forme $aU^2 + bU + cI_3$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire que U est inversible et déterminer U^{-1}.

Exercice 11.3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elle est nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$.

1. Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que si A est une matrice nilpotente et B est une matrice qui commute avec A alors leur produit est une matrice nilpotente.
3. Donner deux matrices nilpotentes dont le produit n'est pas nilpotente
4. Soit A et B deux matrices telles que AB est nilpotente. Montrer que BA est nilpotente

Exercice 11.4

Soit N une matrice nilpotente (cf exercice précédent) et p tel que $N^p = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Exprimer la matrice $(I_n + N)^m$ en fonction de $I_n, N, N^2, \cdots N^{p-1}$.

Calculer A^{10} où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.5

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice A notée (A) la somme des coefficients diagonaux.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

1. Montrer que $(A) = ({}^tA)$
2. Montrer que $(\lambda A + \mu B) = \lambda(A) + \mu(B)$
3. Montrer que $(AB) = (BA)$
4. Calculer $({}^tAA)$
5. Montrer que $A = 0_{n,n}$ si et seulement si $({}^tAA) = 0$

Exercice 11.6

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.
2. En déduire une expression de R_α^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. La matrice R_α est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

Exercice 11.7

Soient A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n et B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elle est nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$.

1. Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que si A est une matrice nilpotente et B est une matrice qui commute avec A alors leur produit est une matrice nilpotente.

3. Donner deux matrices nilpotentes dont le produit n'est pas nilpotente
4. Soit A et B deux matrices telles que AB est nilpotente. Montrer que BA est nilpotente

---

Exercice 11.9

Soit N une matrice nilpotente (cf exercice précédent) et p tel que $N^p = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Exprimer la matrice $(I_n + N)^m$ en fonction de $I_n, N, N^2, \cdots N^{p-1}$.

Calculer A^{10} où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.10

Soient $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $A = P^{-1}DP$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11.11

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2, M^3 et M^4.
2. Calculer le produit $(I_3 + M + M^2)(I_3 - M)$.
3. En déduire que $I_3 - M$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$(xI_3 + yM)^n = a_n I_3 + b_n M + c_n M^2$$
5. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \\ u_0 = 1,\ v_0 = 0,\ w_0 = -1 \end{cases}$$
Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 11.12

Pour chacune des matrices suivantes déterminer son rang et les solutions de l'équation $AX = 0_{4,1}$. Dans le cas où elles sont inversibles calculer leur inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 & 68 & 76 \\ 2 & 4 & 16 & 18 \\ 2 & 5 & 20 & 23 \\ 8 & 16 & 69 & 77 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.13

Discuter en fonction des paramètres $(m, a) \in \mathbb{C}^2$ du rang de matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & m \\ a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a-m & a-1 \\ a+1 & a-2-m \end{pmatrix}$$

Exercice 11.14

Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ $N^2 = 0_{2,2}$.

Exercice 11.15

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système de deux équations à deux inconnues matricielles X et Y

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

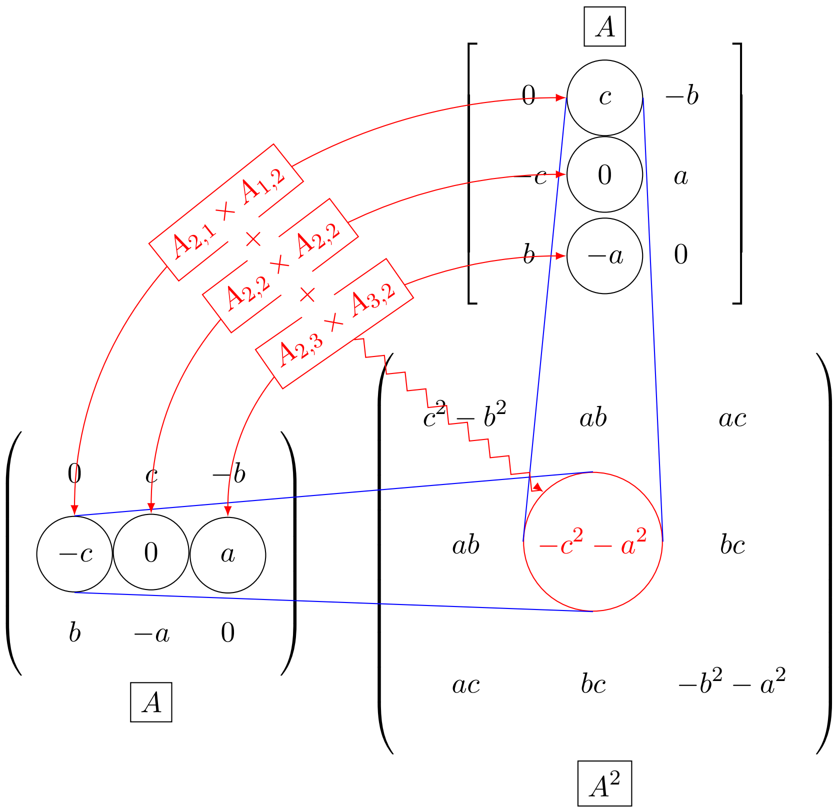
Exercice 11.16

Soit a et b deux réels non-nuls. Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Réponses

Réponse de l'exercice 11.1

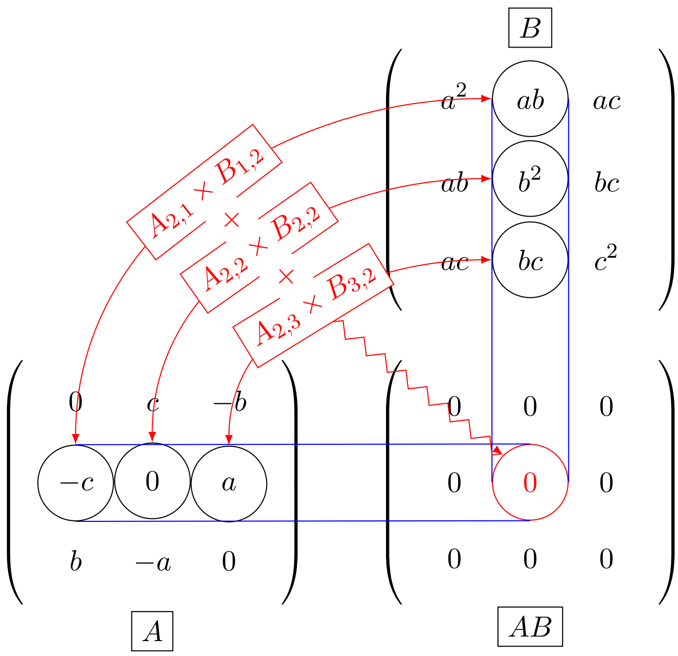
On commence par calculer A^2



On en tire B

$$B = \begin{pmatrix} -c^2-b^2+1 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2+1 & bc \\ ac & bc & -b^2-a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant BA et AB



On remarque que

$$BA = (A^2 + I_3)A = A^3 + A = A(A^2 + I_3) = AB$$

Et
$$B^2 = (A^2 + I_3)B = AAB + B = B$$

Réponse de l'exercice 11.2

1. On a
$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
2. On a $U^3 = 2U + 5I_3$
3. De la question précédente on déduit que $U(U^2 - 2I_3) = 5I_3$. D'où
$$U\left(\frac{U^2 - 2I_3}{5}\right) = I_3$$
Ainsi U est inversible et $U^{-1} = \dfrac{U^2 - 2I_3}{5}$.

Réponse de l'exercice 11.3

1. On a
$$A^2 = 0_{2,2} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0_{3,3} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C^3 = 0$$
2. Soit A une matrice nilpotente et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que A^p. Alors
$$(AB)^p = ABAB \cdots AB = A^p B^p = 0$$
De même $(BA)^p$. AB et BA sont donc bien nilpotentes.
3. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A et B sont nilpotentes($A^2 = B^2 = 0_{2,2}$) mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, en effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $AB^n = AB$.
4. Soit A et B deux matrices telles que AB est nilpotente. Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^p = 0$. On a alors
$$(BA)^{p+1} = BABA \cdots BA = B\left(ABAB \cdots AB)\right)A = B(AB)^p A = B0A = 0$$
Ainsi BA est bien nilpotente.

Réponse de l'exercice 11.4

I_n et N commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton. On sait que $N^p = 0$ d'où, pour tout $k \geqslant p$, $N^k = 0$. On a alors
$$(I_n + N)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N^k I_n^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N^k = \sum_{k=0}^{\min(m,p-1)} \binom{m}{k} N^k$$

Dans notre exemple on a $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0$$

D'où

$$A^{10} = (I_3 + N)^{10} = \binom{10}{0} N^0 + \binom{10}{1} N + \binom{10}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -80 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 11.5

1. On a

$$({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = (A)$$

2.

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + \mu B)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{i,i} + \mu B_{i,i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} B_{i,i} \\ &= \lambda (A) + \mu (B) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,i} A_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} \\ &= (BA) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} ({}^tAA) &= \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ({}^tA_{i,k} A_{k,i} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$

5. Il est évident que, si $A = 0_{n,n}$ alors $\left({}^tAA\right) = 0$.

   Réciproquement supposons que $\left({}^tAA\right) = 0$, on a alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. Il s'agit d'une somme de termes positifs, elle est null si et seulement si tous les termes sont nuls.

   Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$ implique que, pour tout couple $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{k,i} = 0$, c'est-à-dire $A = 0_{n,n}$

   On a donc bien montré que $A = 0_{n,n}$ si et seulement si $\left({}^tAA\right) = 0$.

Réponse de l'exercice 11.6

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$R_\alpha R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

2. D'après la question précédente on a $R_\alpha^2 = R_{2\alpha}$. Une récurrence simple montrer que $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$
3. On a $R_\alpha R_{-\alpha} = R_0 = I_2$. Ainsi R_α est inversible et $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$

Réponse de l'exercice 11.7

— Commençons par calculer A^2 et A^3 pour essayer de conjecturer une formule générale. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Vu la forme de A, A^2 et A^3 on va essayer de montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}$

Initialisation :

On va déjà vérifié la formule aux rangs 1, 2 et 3.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $A^n = 3^{n-1}A$, on a alors

$$A^{n+1} = A^nA = 3^{n-1}AA = 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1}3A = 3^nA$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc prouve que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}*$, $A^n = 3^{n-1}A$.

— On a $B = A - I_3$. A et i_3 commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer B^n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\begin{aligned} B^n &= (A - I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-1)^{n-k} I_3^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}(-1)^n A^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}A \\
&= (-1)^n I_3 + \left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}\right)A \\
&= (-1)^n I_3 + \left(\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k} - \binom{n}{0}(-1)^n 3^0\right)\right)A \\
&= (-1)^n I_3 + \frac{(3-1)^n-(-1)^n}{3}A \\
&= (-1)^n I_3 + \frac{2^n-(-1)^n}{3}A
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 11.8

1. On a
$$A^2 = 0_{2,2} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0_{3,3} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C^3 = 0$$
2. Soit A une matrice nilpotente et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que A^p. Alors
$$(AB)^p = ABAB \cdots AB = A^p B^p = 0$$
De même $(BA)^p$. AB et BA sont donc bien nilpotentes.
3. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A et B sont nilpotentes($A^2 = B^2 = 0_{2,2}$) mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, en effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $AB^n = AB$.
4. Soit A et B deux matrices telles que AB est nilpotente. Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^p = 0$. On a alors
$$(BA)^{p+1} = BABA \cdots BA = B\left(ABAB \cdots AB\right)A = B(AB)^p A = B0A = 0$$
Ainsi BA est bien nilpotente.

Réponse de l'exercice 11.9

I_n et N commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton. On sait que $N^p = 0$ d'où, pour tout $k \geqslant p$, $N^k = 0$. On a alors

$$(I_n + N)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N^k I_n^{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N^k = \sum_{k=0}^{\min(m,p-1)}\binom{m}{k}N^k$$

Dans notre exemple on a $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0$$

D'où
$$A^{10} = (I_3+N)^{10} = \binom{10}{0}N^0 + \binom{10}{1}N + \binom{10}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -80 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 11.10

1. On va utiliser la méthode de Gauss-Jordan
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
On voit dès maintenant que P est de rang 3 et donc est inversible. Continuons nos calculs pour trouver P^{-1}.
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_2$
$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Calculons $P{-}1DP$, on a
$$P{-}1D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$
et
$$P{-}1DP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = A$$
3. On a $A = P^{-1}DP$, d'où $A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}DI_3DP = P^{-1}D^2P$.
On va prouver par récurrence que, pour tout entier n, on a $A^n = P^{-1}D^nP$.
On vient de faire l'initialisation aux rangs 1 et 2. Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_3 = P^{-1}P = P^{-1}D^0P$
Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $A^n = P^{-1}D^nP$. Montrons qu'alors $A^{n+1} = P^{-1}D^{n+1}P$.
On a
$$A^{n+1} = AA^n = P^{-1}DPP^{-1}D^nP = P^{-1}DI_3D^nP = P^{-1}DD^nP = P^{-1}D^{n+1}P$$
Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$A = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+2^n & 2^n-3^n & 3^n-2^n \\ 2^n-4^n & 4^n+2^n & 4^n-2^n \\ 3^n-4^n & 4^n-3^n & 4^n+3^n \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 11.11

1. On a
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = 0_{3,3} \qquad M^4 = 0_{3,3}$$
2. On a
$$(I_3 + M + M^2)(I_3 - M) = I_3 - M + M - M^2 + M^2 - M^3 = I_3 - M^3 = I_3$$
3. Puisqu'il existe une matrice B telle que $(I_3 - M)B = I_3$ alors $I_3 - M$ est inversible et son inverse est $B = I_3 + M + M^2$.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$et $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ on a $(xI_3 + yM)^0 = I_3$, pour $n = 1$ on a $(xI_3 + yM)^1 = xI_3 + yM$
xI_3 et yM commutent. Pour $hn \geqslant 2$ on peut donc utiliser le binôme de Newton pour développer $(xI_3+yM)^n$. On a alors
$$\begin{aligned} (xI_3 + yM)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (yM)^k (xI_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (yM)^k (xI_3)^{n-k} \text{en effet, si } k \geqslant 3 \text{ on a } M^k = 0 \\ &= \binom{n}{0} x^n I_3 + \binom{n}{1} x^{n-1} yM + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 M^2 \\ &= x^n I_3 + nx^{n-1} yM + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 M^2 \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} U_n = (2I_3 + M)U_n$$

Par une récurrence simple (cf. exercice précédent) on a alors $U_n = (2I_3 + M)^n U_0$
Or

$$(2I_3 + M)^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}M + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}M^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - (n-1)\, n2^{n-3} \\ -n2^{n-1} \\ -2^n \end{pmatrix}$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_n = 2^n - (n-1)\, n2^{n-3} \\ v_n = -n2^{n-1} \\ w_n = -2^n \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 11.12

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Pour s'épargner de refaire deux fois de suite les même calcul on va directement appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On voit dès à présent que A est de rang 4 et est donc bien inversible.
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de A est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & - \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
L'équation $AX = 0_{4,1}$ est, comme A est inversible, équivalente à $X = A^{-1}0_{4,1}$ et admet donc comme unique solution $0_{4,1}$.

— Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

B n'est pas une matrice carrée, il est donc impossible que B soit inversible.
On va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour simultanément trouver le rang de B et résoudre l'équation $BX = 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On peut maintenant lire le rang de B, B est de rang 3.
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient alors l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \left(\{(x_4, 0, -x_4 - x_5, x_4, x_5)\ ,\ (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}\right)$$

— Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit que C est de rang 4 et est donc inversible
$L_4 \leftarrow \dfrac{1}{2} L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

C est donc inversible d'inverse $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -5 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

L'équation $CX = 0_{4,1}$ est, comme C est inversible, équivalente à $X = C^{-1} 0_{4,1}$ et admet donc comme unique solution $0_{4,1}$.

— Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 68 & 76 \\ 2 & 4 & 16 & 18 \\ 2 & 5 & 20 & 23 \\ 8 & 16 & 69 & 77 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 16 & 68 & 76 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 16 & 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 20 & 23 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 16 & 69 & 77 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{8} L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit alors que D est de rang 3 et n'est donc pas inversible.
Pour résoudre $DX = 0_{4,1}$ on applique l'algorithme du pivot de Gauss en reprenant les mêmes opérations, on aboutit alors à la formulation matricielle suivante

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow -L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{17}{2} L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient alors l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \{(x_4, -x_4, -x_4, x_4)\ ,\ x_4 \in \mathbb{R}\}$$

— Soit $E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

E n'est pas une matrice carrée, il est donc impossible que E soit inversible. On utilise la méthode du pivot de Gauss pour trouver le rang de E et résoudre $EX = 0_{4,1}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

E est ainsi de rang 3.
$L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 13L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solution

$$S = \{(0, x_4, -x_4 - x_5, x_4, x_5)\ ,\ (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Réponse de l'exercice 11.13

- La matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ est déjà sous forme triangulaire. Si $m \notin \{0,1\}$ alors A est de rang 3.
  - Si $m = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Ainsi A est de rang 2 si $m = 0$.
  - Si $m = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Ainsi A est de rang 2 si $m = 1$.
- Soit $B = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$. On calcule le rang de B via un pivot de Gauss.

  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1+3m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$$
  $L_2 \leftarrow L_2 - (1-m)L_1$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1+3m \\ 0 & -1+2m+3m^2(1+3m)(1-m) \end{pmatrix}$$
  On voit alors que B va être de rang 1 si $-1+2m+3m^2 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ et de rang 2 sinon.
- Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & a & m \\ a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  $L_3 \leftrightarrow L_1$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & m \\ a & 1 & m \end{pmatrix}$$
  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
  $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & m-1 \\ 0 & 1-a & m-a \end{pmatrix}$$
  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & m-1 \\ 0 & 0 & 2m-a-1 \end{pmatrix}$$
  Ainsi, si $a \neq 1$ et $m \neq \frac{a+1}{2}$ alors C est de rang 3. Si $a \neq 1$ et $m = \frac{a+1}{2}$ alors C est de rang 2. Enfin si

$a=1$ alors on obtient $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & m-1\\ 0 & 0 & 2(m-1)\end{pmatrix}$ qui est de rang 2 si $m\neq 1$ et de rang 1 si $m=1$.

- Soit $D=\begin{pmatrix}a-m & a-1\\ a+1 & a-2-m\end{pmatrix}$
  Plutôt que d'appliquer une méthode du pivot de Gauss (ce qui marcherait) on va changer de méthode en utilisant divers résultats du cours.
  D est une matrice 2×2, son rang est alors $0,1$ ou 2
  — D est de rang 0 si et seulement si $D=0$ ce qui est impossible
  — D est de rang 2 si et seulement si elle est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(D)\neq 0$.
  On a
  $$\det(D)=(a-m)(a-2-m)-(a+1)(a-1)=m^2-2am+2m-2a+1=(m+1)(m-2a+1)$$
  — D est de rang 1 dans les autre cas.
  Ainsi D est de rang 1 si $m=-1$ ou si $m\neq -1$ et $a=\dfrac{m+1}{2}$ et de rang 2 si $m\neq -1$ et $a\neq \dfrac{m+1}{2}$.

Réponse de l'exercice 11.14

Posons
$$N=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$
On a alors
$$N^2=\begin{pmatrix}b\times c+a^2 & b\times d+a\times b\\ c\times d+a\times c & d^2+b\times c\end{pmatrix}=0_{2,2}$$
On en tire le système suivant
$$\begin{cases}bc+a^2=0\\ bd+ab=0\\ cd+ac=0\\ d^2+bc=0\end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases}a^2=d^2=-bc\\ b(a+d)=0\\ c(a+d)=0\end{cases}$$
On a alors trois cas possibles :
— $a=d\neq 0$ et alors on obtient $b=c=0$ et $a^2=0$, ce qui est absurde.
— $a=d\neq 0$, on a alors $b\times c=0$ d'où les deux formes de matrices suivantes
$$N_1=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad b\in\mathbb{R}\quad \text{et } N_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\quad c\in\mathbb{R}$$
— $a=-d\neq 0$,on en tire $b\times c=-a^2\neq 0$ et donc $b\neq 0$. On obtient alors la forme suivante de matrice
$$N_3=\begin{pmatrix}a & b\\ \dfrac{-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$$
En conclusion les matrices N telles que $N^2=0_{2,2}$ (on dira que N est nilpotente) sont de l'une des trois formes suivantes
$$N_1=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad N_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\quad N_3=\begin{pmatrix}a & b\\ \dfrac{-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}\qquad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$$

Réponse de l'exercice 11.15

On va procéder par analyse-synthèse :

Soit (X, Y) une solution du système

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\left((X+Y) + (X-Y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De manière similaire on a

$$Y = \frac{1}{2}\left((X+Y) - (X-Y)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si (X, Y) est une solution du système alors

$$X == \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement il est aisé de vérifier que ce couple de matrices est bien solution du système étudié.

En conclusion, (X, Y) est une solution du système si et seulement si on a

$$X == \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 11.16

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. On va déterminer à quelles conditions sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ a-t-on $AM = MA$, c'est-à-dire $AM - MA = 0$.

On a

$$AM = \begin{pmatrix} b\gamma + a\alpha & b\delta + a\beta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta + \alpha\_ \\ a\gamma & b\gamma + a\delta \end{pmatrix}$$

D'où

$$AM - MA = \begin{pmatrix} b\gamma & b\delta - \alpha b \\ 0 & -b\gamma \end{pmatrix}$$

Ainsi on a $AM - MA = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} b\gamma = 0 \\ b\delta = b\alpha \\ b\gamma = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, comme $b \neq 0$, $\gamma = 0$ et $\alpha = \delta$.

Les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ sont donc les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Chapitre 12

Statistique descriptive univariée

Exercices

Exercice 12.1

Le tableau suivant résume les résultats obtenus par les élèves d'une classe de première lors d'un devoir.

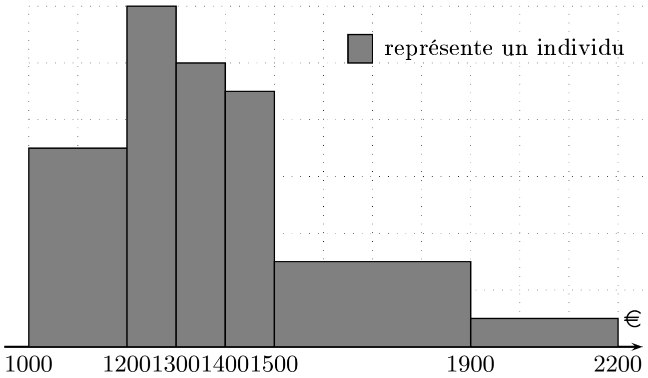
Notes	2	4	5	7	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectifs	1	2	3	2	3	4	5	3	3	2	1	1
Fréquences (à 0.1% près)												

1. Compléter la troisième ligne du tableau.
2. Quel est, à 0.1% près, le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 8 ?
3. Déterminer le mode, la moyenne, la médiane, l'étendue, le premier quartile, le troisième quartile et l'écart-type de cette série de notes.
4. Ce devoir a été effectué par les 400 élèves de première du lycée. La moyenne des 370 autres élèves est 9.7. Calculer la moyenne obtenue par l'ensemble des élèves.
5. Tracer le polygone des fréquences cumulées.

Exercice 12.2

Une étude portant sur les salaires mensuels des employés en CDI à temps complet d'une entreprise a permis d'établir l'histogramme ci-dessous.

1. Tracer le polygone des fréquences cumulées.
2. Déterminer une approximation du salaire moyen, du salaire médian, des premiers et troisièmes quartiles et de l'écart-type
3. Dans une entreprise concurrente du même secteur d'activité, le salaire moyen des employés en CDI à temps complet s'élève à 1800€ et le salaire médian à 1185€. Dans quelle entreprise vaut-il mieux se faire embaucher ?



Exercice 12.3

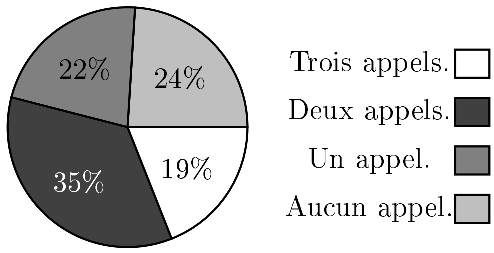
Dans chacune des situations suivantes, déterminer la moyenne, la médiane, les premiers et troisièmes quartiles et l'écart-type de la série statistique.

Situation 1

Un sondage réalisé auprès de 1000 possesseurs de téléphones portables a permis de réaliser le diagramme circulaire ci-dessous.

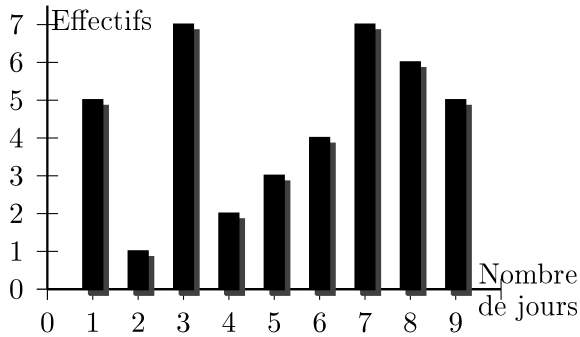
La question qui leur a été posée est la suivante :

« En moyenne, combien d'appels internationaux par mois passez-vous ? »



Situation 2

Le diagramme en bâtons ci-dessous présente le relevé annuel du nombre de jours de formation suivis par les employés dans une entreprise.



Situation 3

Le tableau ci-dessous regroupe les diamètres en cm de 48 pièces prélevées dans la production d'une machine.

1,19	1,26	1,23	1,20	1,22	1,24	1,20	1,24
1,22	1,20	1,21	1,19	1,21	1,22	1,19	1,20
1,21	1,21	1,22	1,21	1,23	1,22	1,21	1,24
1,25	1,23	1,22	1,19	1,20	1,26	1,24	1,25
1,23	1,26	1,25	1,25	1,21	1,22	1,25	1,24
1,23	1,22	1,24	1,24	1,25	1,23	1,25	1,22

Exercice 12.4

Le tableau ci-dessous regroupe les diamètres en cm de 48 pièces prélevées dans la production d'une machine.

1,19	1,27	1,18	1,20	1,22	1,18	1,20	1,18
1,22	1,20	1,21	1,19	1,21	1,26	1,19	1,20
1,21	1,21	1,22	1,21	1,23	1,26	1,21	1,27
1,27	1,28	1,98	1,19	1,20	1,26	1,27	1,25
1,29	1,26	1,25	1,25	1,27	1,26	1,25	1,24
1,23	1,22	1,27	1,24	1,25	1,18	1,24	1,27

1. Déterminer la moyenne, la médiane, l'écart interquartile et l'écart-type de la série de mesures.
2. Une mesure semble aberrante. Reprendre les calculs sans cette valeur. Que remarque-t-on ?
3. Préciser l'inconvénient du résumé d'une série statistique par le couple « moyenne - écart-type ».

Exercice 12.5

Un laboratoire fabrique des crèmes cicatrisantes.

Sur la notice, il est indiqué la présence de $0,9$ grammes de calendula (puissant cicatrisant) par tube.

Le laboratoire décide de contrôler la chaîne de fabrication. Pour cela, cent tubes sont prélevés au hasard sur la chaîne.

Les résultats des analyses sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Masse de calendula (en g)	$0,87$	$0,88$	$0,89$	$0,90$	$0,91$	$0,92$	$0,93$	$0,94$
Nombre de tubes	2	9	16	48	15	7	1	2

1. On note $\overline{x}$ la moyenne et σ_x l'écart-type de la série des masses de calendula relevées après analyse. Déterminer les valeurs respectives de $\overline{x}$ et σ_x ; on arrondira cette dernière à 10^{-4} près.
2. La production de la chaîne est jugée satisfaisante si $0,89 \leqslant \overline{x} \leqslant 0,91$, $s \leqslant 0,02$ et si la proportion de tubes hors de l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$ ne dépasse pas 4%.
La chaîne fonctionne-t-elle correctement ?

Réponses

Réponse de l'exercice 12.1

1.

Notes	2	4	5	7	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectifs	1	2	3	2	3	4	5	3	3	2	1	1
Fréquences (à 0.1% près)	3.3%	6.7%	10%	6.7%	10%	13.3%	16.7%	10%	10%	6.7%	3.3%	3.3%

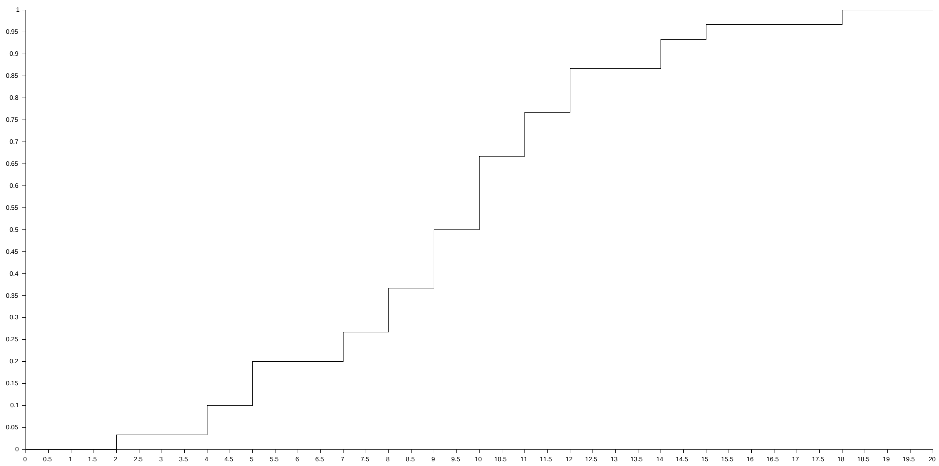
2. Il y a environ 36.7% des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 8.
3. Le mode est 10, la moyenne est $\dfrac{93}{10} = 9.3$. La médiane est tout nombre entre 9 et 10. Le premier quartile est 7. Le troisième quartile est 11. L'écart-type est $\dfrac{\sqrt{1221}}{10} \simeq 3.5$.
4. La moyenne des notes sur l'ensemble des élèves est

$$\frac{30 \times 9.3 + 370 \times 9.7}{400} = \frac{3868}{400} \simeq 9.67$$

5. Commençons par remplir un tableau des fréquences cumulées

Notes	2	4	5	7	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectifs	1	2	3	2	3	4	5	3	3	2	1	1
Fréquences cumulées (à 0.1% près)	3.3%	10%	20%	26.7%	36.7%	50%	66.7%	76.7%	86.7%	93.3%	96.7%	100%

Figure 12.1 – Polygone des fréquences cumulées

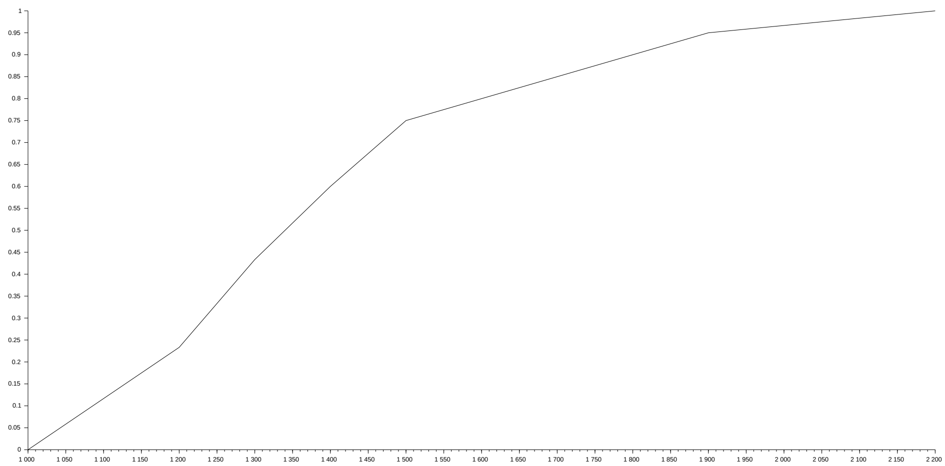


Réponse de l'exercice 12.2

1.

Classes	$[1000, 1200[$	$[1200, 1300[$	$[1300, 1400[$	$[1400, 1500[$	$1500, 1900[$	$[1900, 2200[$
Effectifs	28	52	20	18	24	6
Fréquences cumulées	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{20}$	1

Figure 12.2 – Polygone des fréquences cumulées



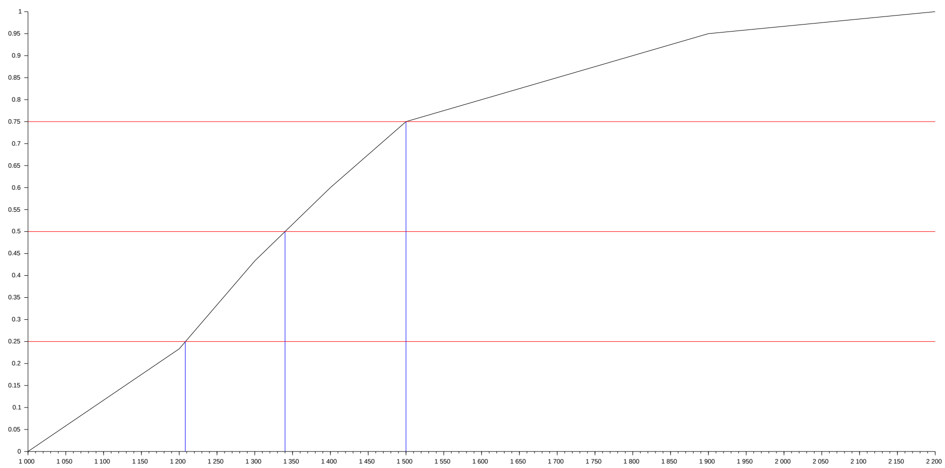
2. On calcule la moyenne et l'écart-type en utilisant les centres des classes.

$$\overline{x} = \frac{28 \times 1100 + 24 \times 1250 + 20 \times 1350 + 18 \times 1450 + 24 \times 1700 + 6 \times 2050}{120} \simeq 1391.67€$$

$$\mathbb{V}_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{588125}{9} \qquad \sigma_x = \sqrt{\mathbb{V}_x} \simeq 255.63€$$

On lit sur le polygone des fréquences cumulées le premier quartile 1208€, la médiane 1340€ et le troisième quartile 1500€.

Figure 12.3 – Polygone des fréquences cumulées



3. La seconde entreprise a, certes, un salaire moyen bien plus élevé mais son salaire médian est lui bien plus bas. Il est tout à fait possible que cette seconde entreprise paye moins ses ouvriers mais beaucoup ses cadres voire uniquement son dirigeant. À vous de décider selon le type de poste sur lequel vous postulez ...

Réponse de l'exercice 12.3

Situation 1 La moyenne est

$$\overline{x} = 0.24 \times 0 + 0.22 \times 1 + 0.33 \times 2 + 0.19 \times 3 = 1.49$$

La médiane est 2 appels, le premier quartile est 1 appel et les troisème quartile 2 appels.

La variance est

$$\mathbb{V}_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 0.24 \times 0^2 + 0.22 \times 1^2 + 0.33 \times 2^2 + 0.19 \times 3^2 - 1.49^2 = 1.1099$$

L'écart-type est

$$\sigma_x = \sqrt{\mathbb{V}_x} \simeq 1.05$$

Situation 2 La moyenne est

$$\overline{x} = \frac{5 \times 1 + 1 \times 2 + 7 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 7 \times 7 + 6 \times 8 + 5 \times 9}{5 + 1 + 7 + 2 + 3 + 4 + 7 + 6 + 5} = 5.425$$

La médiane est 6 jours de formation, le premier quartile est 4 jours de formation et le troisième quartile est 8 jours de formation.

La variance est

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 &= \frac{5 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + 2 \times 4^2 + 3 \times 5^2 + 4 \times 6^2 + 7 \times 7^2 + 6 \times 8^2 + 5 \times 9^2}{5 + 1 + 7 + 2 + 3 + 4 + 7 + 6 + 5} - 5.425^2 \\ &= \frac{11111}{1600} \simeq 6.94\end{aligned}$$

L'écart-type est $\sigma_x = \sqrt{\mathbb{V}_x} \simeq 2.64$

Situation 3

La moyenne est $\overline{x} = \dfrac{49}{40} = 1.225$.

La médiane est 1.22, le premier quartile est 1.21 et le troisième quartile 1.24.

La variance est $\dfrac{49}{120000}$ et l'écart type $\dfrac{7}{200\sqrt{3}} \simeq 0.0202$.

Réponse de l'exercice 12.4

1. La moyenne est 1.24cm, la médiane 1.23cm, les premiers et troisièmes quartiles 1.20cm et 1.26cm, l'écart interquartile est alors 0.06cm. L'écart-type est d'environ 0.1116cm.
2. On va enlever la mesure aberrante 1.98cm. On obtient alors que la moyenne est 1.23cm, la médiane 1.23cm, les premiers et troisièmes quartiles 1.20cm et 1.26cm, l'écart interquartile est alors 0.06cm. L'écart-type est d'environ 0.0318cm.
3. Sur cet exemple on voit bien que la présence d'une seule valeur aberrante ou exceptionnelle influe beaucoup sur la moyenne et surtout sur l'écart-type. Le couple « moyenne - écart-type »n'est pas alors pas recommandé lorsque la série comporte un très petit nombre de valeurs qui sont très éloignés des autres.

Réponse de l'exercice 12.5

1. On a

$$\overline{x} = \frac{2 \times 0.87 + 9 \times 0.88 + 16 \times 0.89 + 48 \times 0.90 + 15 \times 0.91 + 7 \times 0.92 + 1 \times 0.93 + 2 \times 0.94}{100} = 0.90$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathbb{V}_x} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{1.54 \times 10^{-4}} \simeq 0.0124$$

2. On a bien $0,89 \leqslant \overline{x} \leqslant 0,91$, $s \leqslant 0,02$. L'intervalle $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$ est environ l'intervalle $[0.8752, 0.9248]$. Cet intervalle contient 95 mesures sur 100. On a donc une proportion de tubes hors de l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$ de 5% ce qui dépasse le seuil de tolérance. On peut donc en conclure que la chaîne ne fonctionne pas correctement.

Chapitre 13

Statistique descriptive bivariée

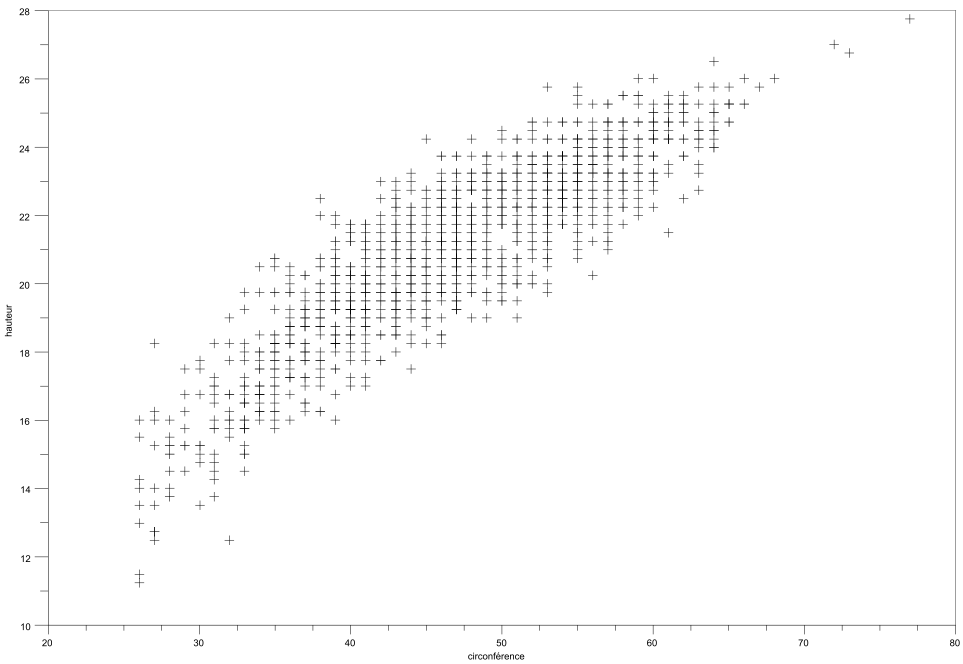
Exercices

Exercice 13.1

Lorsqu'on cherche à estimer la quantité de bois produite par une forêt, il est nécessaire de connaitre la hauteur des arbres afin de calculer le volume par une formule du type "tronc de cône". Cependant, mesurer la hauteur d'un arbre d'une vingtaine de mètres n'est pas chose facile : on utilise en général un dendromètre, lequel mesure un angle entre le sol et le sommet de l'arbre et nécessite donc une vision claire de la cime ainsi qu'un recul assez grand pour avoir une mesure précise de l'angle.

Lorsque ces conditions ne sont pas réunies, on peut chercher à estimer cette hauteur via un modèle de régression linéaire à partir de la simple mesure de la circonférence à 1 mètre 30 du sol. Cette modélisation nécessite une échantillon d'apprentissage, c'est à dire un ensemble d'arbres pour lesquels ont été réellement mesurées la circonférence et la hauteur. La figure suivante représente un nuage de points pour des mesures effectués sur environ 1400 eucalyptus.

Figure 13.1 – Nuage de points pour les eucalyptus



On a relevé $n = 1429$ couples (x_i, y_i). On a obtenu $(\overline{x}, \overline{y}) = (47.3, 21.2)$ et

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 102924 \qquad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 8857 \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 26466$$

1. Déterminer la droite des moindres carrés pour ce modèle et la représenter sur la figure
2. Calculer le coefficient de détermination r^2 et commenter la qualité de l'ajustement des données au modèle affine.

Exercice 13.2

La taille d'un athlète peut jouer un rôle important dans ses résultats en saut en hauteur. Les données utilisées ici présentent donc la taille et la performance de 20 champions du monde.

Observation	Nom	Taille	Performance
1	Jacobs (EU)	1.73	2.32
2	Noji (EU)	1.73	2.31
3	Conway (EU)	1.83	2.40
4	Matei (Roumanie)	1.84	2.40
5	Austin (EU)	1.84	2.40
6	Ottey (Jamaique)	1.78	2.33
7	Smith (GB)	1.84	2.37
8	Carter (EU)	1.85	2.37
9	McCants (EU)	1.85	2.37
10	Sereda (URSS)	1.86	2.37
11	Grant (GB)	1.85	2.36
12	Paklin (URSS)	1.91	2.41
13	Annys (Belgique)	1.87	2.36
14	Sotomayor (Cuba)	1.96	2.45
15	Sassimovitch (URSS)	1.88	2.36
16	Zhu Jianhua (Chine)	1.94	2.39
17	Brumel (URSS)	1.85	2.28
18	Sjoeberg (Suède)	2.00	2.42
19	Yatchenko (URSS)	1.94	2.35
20	Povarnitsine (URSS)	2.01	2.40

1. Déterminer l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés.
2. Déterminer le coefficient de détermination r^2.

Exercice 13.3

On appelle « fréquence seuil »d'un sportif amateur sa fréquence cardiaque obtenue après trois quarts d'heure d'un effort soutenu de course à pied. Celle-ci est mesurée à l'aide d'un cardio-fréquencemètre. On cherche à savoir si l'âge d'un sportif a une influence sur sa fréquence seuil. On dispose pour cela de 20 valeurs du couple (x_i, y_i), où x_i est l'âge et y_i la fréquence seuil du sportif. On a obtenu $(\overline{x}, \overline{y}) = (35.6, 170.2)$ et

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1991 \qquad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 189.2 \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = -195.4$$

Réponses

Réponse de l'exercice 13.1

1. On sait que la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

On a

$$\overline{x} = 47.3 \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{102924}{1429} \simeq 72.0$$

$$\overline{y} = 21.2 \qquad \sigma_y^2 = \frac{8857}{1429} \simeq 6.2$$

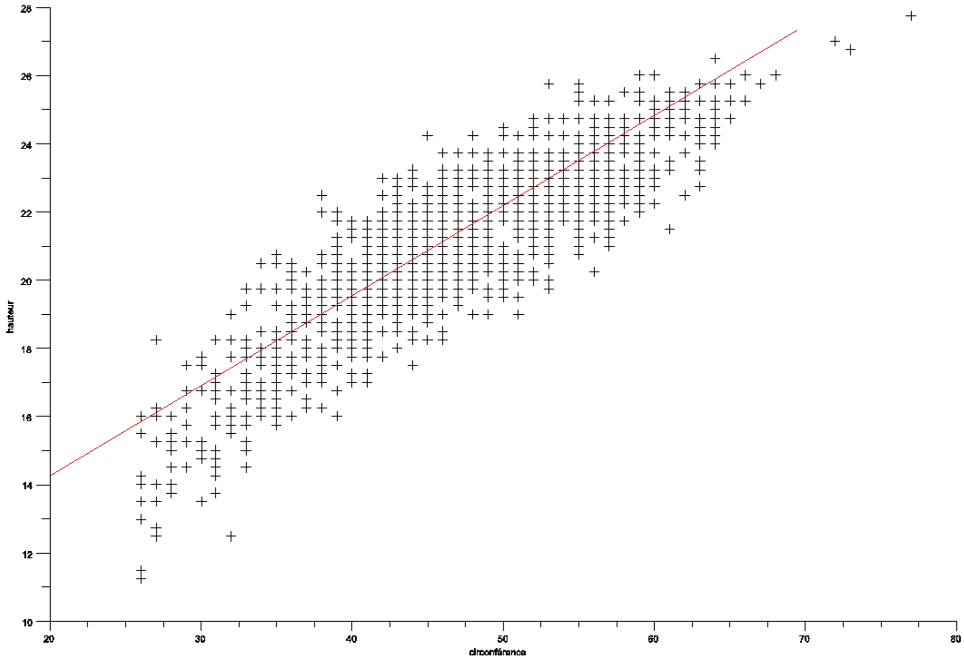
$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{26466}{1429} \simeq 18.5$$

Ainsi la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{26466}{102924}(x - 47.3) + 21.2$$

En valeur approché cela donne environ $y = 0.26x + 9$

Figure 13.2 – Nuage de points et droite de régression pour les eucalyptus



2. On sait que le coefficient de détermination vaut

$$r^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}\right)^2 = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

Ici cela donne

$$r^2 = \frac{26466^2}{102924 \times 8857} \simeq 0.77$$

Moralement cela signifie que la circonférence à 1 mètre 30 du sol explique environ 77% de la taille d'un eucalyptus, le reste vient d'autres facteurs. On peut donc considérer que notre modèle va permettre de faire des estimations convenables.

Réponse de l'exercice 13.2

1. On sait que la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

Il nous faut donc calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\sigma_{x,y}$ et σ_x^2. On a

$$\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 1.868 \qquad \sigma_x^2 = 0.00546$$

$$\overline{y} = 2.371 \qquad \sigma_{x,y} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = 0.001872$$

Ainsi la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{12}{35}(x - 1.868) + 2.371$$

En valeur approché cela donne environ $y = 0.34x + 1.73$

2. On sait que le coefficient de détermination vaut

$$r^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2}}\right)^2 = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

Ici cela donne

$$r^2 = \frac{0.001872^2}{0.00546 \times 0.001549} \simeq 0.41$$

Moralement cela signifie que la taille explique environ 41% de la performance d'un athlète, la taille n'est donc pas un très bon indicateur de la performance.

Réponse de l'exercice 13.3

1. On sait que la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

On a

$$\overline{x} = 35.6 \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1991}{20} = 99.55$$

$$\overline{y} = 170.2 \qquad \sigma_y^2 = \frac{189.2}{20} = 9.46$$

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{-195.4}{20} \simeq -9.77$$

Ainsi la droite de régression par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation

$$y = \frac{-9.77}{99.55}(x - 35.6) + 170.2$$

En valeur approché cela donne environ $y = -0.098x + 173.69$

2. On sait que le coefficient de détermination vaut

$$r^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \right)^2 = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

Ici cela donne

$$r^2 = \frac{(-9.77)^2}{9.46 \times 99.55} \simeq 0.10$$

Moralement cela signifie que l'âge explique environ 10% de la fréquence seuil. On peut donc considérer que l'âge est un mauvais indicateur de la fréquence seuil.

Chapitre 14

Limites et continuité des fonctions

Exercices

Exercice 14.1

Montrer que les fonctions suivantes ont des limites en $+\infty$ et $-\infty$ et déterminer lesdites limites.

$$x \mapsto \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x + 4} \qquad x \mapsto \frac{e^{3x} + x + 1}{e^x + e^{-x}} \qquad x \mapsto \frac{\ln(x^2 + e^x)}{2 + x}$$

Exercice 14.2

Calculer, si elle existe, la limite des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x}{|x|}$ en 0
2. $\lfloor x+2 \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ en 1
3. $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ en 0
4. $\dfrac{x^2}{x - \exp\left(\frac{1}{x}\right)}$ en 0
5. $2^{\frac{1}{x}}$ en 0
6. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en 0
7. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

Exercice 14.3

Étudier les limites des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} && \text{en} \quad 0 \\ g : x &\mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{4x^4 + x^2 + x - 6} && \text{en} \quad 1 \\ h : x &\mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} && \text{en} \quad +\infty \end{aligned}$$

Exercice 14.4

Déterminer les limites, si elles existent, en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+x-1}{2x^2-2}; \quad g : x \mapsto \frac{x}{x-1}; \quad a : x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$$

$$b : x \mapsto \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}; \quad c : x \mapsto \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

Indication : Si nécessaire, on pourra utiliser l'encadrement suivant

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, \qquad x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

Exercice 14.5

Préciser les limites, si elles existent, en 0 des fonctions suivantes :

$a : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$b : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

$c : x \mapsto \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$

$d : x \mapsto x^x$

$e : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$

$f : x \mapsto (\sin x)^{1/\ln x}$

$g : x \mapsto |\ln(x)|^x$

$r : x \mapsto \dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$ où $a, b \neq 0$

$s : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

Exercice 14.6

Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes :

$$a : x \mapsto \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{en } 1; \qquad b : x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } \frac{\pi}{4};$$

$$c : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x} \quad \text{en } \frac{\pi}{3};$$

Indication : méthode : poser $h = x - a$ et étudier la limite quand h tend vers 0 de l'application $\widetilde{f}(h) := f(a+h)$.

Exercice 14.7

Montrer que les limites suivantes existent et déterminer les

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$$

Exercice 14.8

Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln(x)} = 1$

Exercice 14.9

Montrer que $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$

Exercice 14.10

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante.

1. Montrer que :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\},\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda.$$
2. Montrer que
$$\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.$$

Exercice 14.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone où $I =]\alpha, \beta[$. Montrer qu'en tout point $a \in I$, f admet une limite à gauche et une limite à droite.

Exercice 14.12

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose que le produit fg admet pour limite 1 en 0. Montrer qu'alors f et g admettent toutes deux 1 comme limite en 0.

Exercice 14.13

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$$
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(rx) = rf(x)$$
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = \lambda r$$
4. On suppose de plus que f admet une limite finie en 0.
   (a) Montrer que f admet une limite finie en tout point x de $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda x$$

Exercice 14.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 14.15

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en 0 et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.16

Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes :

$$a : x \mapsto \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{en } 1; \qquad b : x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } \frac{\pi}{4};$$

$$c : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos x} \quad \text{en } \frac{\pi}{3};$$

Méthode : poser $h = x - a$ et étudier la limite quand h tend vers 0 de l'application $\widetilde{f}(h) := f(a+h)$.

Exercice 14.17

Montrer que

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$x^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$(x + \sin(x))(e^x + \ln(x) - 2) \underset{+\infty}{\sim} xe^x$$

Exercice 14.18

Déterminer un équivalent simple de :

$$a(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} \quad (\alpha > 0) \qquad \text{en } +\infty$$

$$b(x) = \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)} \qquad \text{en } +\infty$$

$$c(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x) \qquad \text{en } +\infty$$

$$d(x) = \sqrt{x^2+1} - x \qquad \text{en } +\infty$$

$$e(x) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \text{en } +\infty$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right) \qquad \text{en } +\infty$$

$$g(x) = \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \qquad \text{en } 0$$

$$h(x) = \frac{\sin^2(e^{3x}-1)}{x^3} \qquad \text{en } 0$$
$$i(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x - 1 \qquad \text{en } +\infty$$

Exercice 14.19

Montrer que les limites suivantes existent et déterminer les

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$$

Exercice 14.20

Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln(x)} = 1$

Exercice 14.21

Étudier les limites suivantes :

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad \text{en} \quad 0 \tag{14.1}$$
$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \quad \text{en} \quad 0 \tag{14.2}$$
$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} \quad \text{en} \quad \frac{\pi}{2} \tag{14.3}$$
$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \quad \text{en} \quad 0 \tag{14.4}$$
$$(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad \text{en} \quad 1. \tag{14.5}$$
$$\frac{\cos(x)+\ln x}{(x+3)^2-e^{x^2}}, \quad \text{en} \quad +\infty. \tag{14.6}$$
$$(2+\cos(x))^{\frac{1}{x}}, \quad \text{en} \quad +\infty. \tag{14.7}$$
$$x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \text{en} \quad +\infty. \tag{14.8}$$
$$\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{en} \quad 0 \tag{14.9}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{en} \quad 0 \tag{14.10}$$
$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}, \quad \text{en} \quad +\infty \tag{14.11}$$

Exercice 14.22

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ tels que g est bornée sur I et $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = 0$$

Exercice 14.23

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant chacune une limite en $+\infty$ dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Que dire de $\max(f, g)$?

Exercice 14.24

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + bx^2 + ce^x = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.

Exercice 14.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \underset{0}{=} \mathrm{o}(x^n)$.

Exercice 14.26

Déterminer un équivalent en 0 de $e^{\sin x}$, de $e^{\cos x}$ puis de $e^{\cos x} - e$.

Exercice 14.27

Soit

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{3x} - 1}{x} \end{array}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 14.28

Soit f une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que, pour tout réel a et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a $f(na) = nf(a)$
2. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = qf(1)$
3. En déduire que f est une fonction linéaire

Exercice 14.29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

1. Montrer que f est bornée. On pose $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$.
2. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que $|f(a)| = M$.

Exercice 14.30

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 14.31

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Exercice 14.32

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et soit $f \begin{array}{rcl} : &]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} \end{array}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$
2. Déterminer f^{-1}. f^{-1} est-elle continue ?

Exercice 14.33

Montrer que l'équation $x^5 + 5x - 2 = 0$ admet une racine et une seule dans $]0,1[$. Donner une valeur approchée de cette racine x_0 à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 14.34

1. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions continues telles que $f > g$. Existe-t-il $\alpha > 1$ tel que $f \geq \alpha g$?
2. Déterminer une fonction définie sur le segment $[0,1]$ n'admettant ni minimum ni maximum.

Exercice 14.35

Si f et g sont continues sur I, montrer que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ le sont aussi.

Exercice 14.36

1. Montrer que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } a < b \quad \exists q \in \mathbb{Q}, \qquad a < q < b.$$
2. En déduire que, pour tout réel x, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14.37

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 14.38

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est bornée et admet un maximum.

Exercice 14.39

Un randonneur a marché 10 km en deux heures. Montrer qu'il y a eu une période d'une heure pendant laquelle il a parcouru exactement 5 km

Exercice 14.40

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. On suppose que $|f|$ est constante sur I. Montrer que f est constante sur I.

Exercice 14.41

Montrer que l'équation $\cos x = x - 1$ admet une unique solution réelle.

Exercice 14.42

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$, on considère l'équation

$$(E_n) : x^n - nx + 1 = 0$$

Montrer que :

1. (E_n) admet deux racines α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 1$. On pourra poser $\beta_n = 1 + c_n$ et écrire la formule du binôme de Newton.

Exercice 14.43

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 14.44

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f \circ f - 2f + \mathrm{Id} = 0$. On rappelle que Id est la fonction identité de $\mathbb{R}$: $Id : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

1. Montrer que f est une bijection croissante.
2. Montrer que f est une translation (i.e une fonction de la forme $x \mapsto x + b$).

Réponses

Réponse de l'exercice 14.1

— Soit $f : \begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x + 4} \end{array}$.

Soit $x \in D_f \backslash \{0\}$, on a

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x + 4} = \frac{x^3}{x^3} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}$$

On sait que

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 1 + 0 + 0 = 1$$

Ainsi, f est le quotient de deux fonctions admettant des limites en $+\infty$ dont le dénominateur est non-nul et ne tend pas vers 0, f admet donc une limite en $+\infty$ et cette limite est $\dfrac{1}{1} = 1$.

De manière similaire on a

$$\lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}=1+0+0=1$$

Ainsi, f est le quotient de deux fonctions admettant des limites en $-\infty$ dont le dénominateur est non-nul et ne tend pas vers 0, f admet donc une limite en $-\infty$ et cette limite est $\frac{1}{1}=1$.

— Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{3x}+x+1}{e^x+e^{-x}} \end{array}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$g(x)=\frac{e^{3x}+x+1}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{3x}}{e^x}\frac{1+\frac{x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=e^{2x}\frac{1+\frac{x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$$

Par croissances comparées on sait que $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{3x}}=0$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{e^{2x}}=1$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=1$$

Ainsi, par produit de limites on a

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$$

Pour $x\in\mathbb{R}^*$ on a également

$$g(x)=\frac{e^{3x}+x+1}{e^x+e^{-x}}=\frac{x}{e^{-x}}\frac{1+\frac{e^{3x}}{x}+\frac{1}{x}}{1+e^{2x}}=xe^x\frac{1+\frac{e^{3x}}{x}+\frac{1}{x}}{1+e^{2x}}$$

On sait de plus que

$$\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{e^{3x}}{x}+\frac{1}{x}=1+0+0$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1+e^{2x}=1$$

et, par croissance comparée $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$

Ainsi, par produit et quotient de limites on obtient $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$.

— Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{2+x} \end{array}$

Pour $x\notin\{-2,0\}$ on a

$$h(x)=\frac{\ln(x^2+e^x)}{2+x}=\frac{\ln\left(e^x(1+x^2e^{-x})\right))}{2+x}=\frac{\ln(e^x)+\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)}{2+x}=\frac{x+\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)}{2+x}=\frac{1+\frac{\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

On sait par croissances comparées que $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$, ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}=1$$

D'où, par quotient de limites, on a

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

De manière similaire on a, pour $x \notin \{-2, 0\}$

$$h(x) = \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)\right)}{2+x} = \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)}{2+x} = \frac{\ln(|x|)}{x}\frac{2+\frac{\ln\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)}{\ln(|x|)}}{1+\frac{2}{x}}$$

On a

$$\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{\ln\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)}{\ln(|x|)} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}$$

Par croissance comparée on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(|x|)}{x} = 0$.
Ainsi, par produit et quotient de limites on a

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

Réponse de l'exercice 14.2

1. On a
$$\forall x>0,\quad \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall x<0,\quad \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$
Ainsi
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|} = -1$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|} \neq \lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}$ la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{|x|}$ n'admet donc pas de limite en 0.
2. On a
$$\forall x\in[0,1[,\quad \lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} = 2+\sqrt{x}$$
$$\forall x\in[1,2[,\quad \lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} = 3+\sqrt{x-1}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to1^-}\lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} = 3 \qquad \lim_{x\to1^+}\lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} = 3 \qquad \lfloor 1+2\rfloor+\sqrt{1-\lfloor 1\rfloor} = 3$$
On en déduit alors que la limite voulue existe et que
$$\lim_{x\to1}\lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} = 3$$
3. Commençons par remarquer que
$$\forall x\in]0,1[,\qquad \frac{x-1}{x} < 0$$
et que l'expression considérée n'est pas définie pour $x=0$. Il nous suffit donc de montrer que cette expression admet une limite à gauche.
Pour $x<0$ on a $x = -\sqrt{x^2}$, d'où
$$\forall x<0,\qquad x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\sqrt{x^2\frac{x-1}{x}} = -\sqrt{x(x-1)}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0$$

4. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. et $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \exp(x)}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a alors

$$\frac{x^2}{x - \exp\left(\frac{1}{x}\right)} = f\circ g(x)$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - x\exp(x)}$$

On a alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Par croissance comparée on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$, d'où

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Par composition de limite on a ainsi

$$\lim_{x\to 0^-} f\circ g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f\circ g(x) = 0$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - \exp\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

5. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a $2^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(2)\right)$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$$

Comme les deux limites sont différentes la fonction $x \mapsto 2^{\frac{1}{x}}$ n'admet donc pas de limite en 0.

6. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en 0

On peut simplement remarquer que l'expression proposée correspond au taux d'accroissements de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0. La dite fonction étant dérivable en 0 on a alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi procéder autrement, pour $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

Ce qui nous donne le même résultat.

7. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

Pour $x \in [-1,0[\cup]0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&= \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$$

Réponse de l'exercice 14.3

— Pour $x \neq 0$ on a $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$, d'où

$$\frac{x}{3} \leqslant \frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant x$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

— Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}$.

Notons $P = X^3-3X^2+5X-3$ et $Q = 4X^4+X^2+X-6$. On remarque dans un premier temps que $P(1) = 0$ et $Q(1) = 0$.

On peut donc factoriser P et Q par $X-1$.

$$P = (X-1)(X^2-2X+3) \qquad Q = (X-1)(4X^3+4X^2+5X+6)$$

Ainsi, pour $x \in D_g$ on a

$$g(x) = \frac{x^2-2x+3}{4x^3+4x^2+5x+6}$$

De plus on sait que

$$\lim_{x\to 1} x^2-2x+3 = 2 \qquad \lim_{x\to 1} 4x^3+4x^2+5x+6 = 19$$

D'où, par quotient de limites

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{2}{19}$$

— Soit $h : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$.
Pour $x>0$ on a

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}
\end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1$$

Ainsi

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\frac{1}{2}$$

Réponse de l'exercice 14.4

— $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{2x^2-2}$
Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ on a

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x^2}}$$

On sait que

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}2-\frac{2}{x^2}=2$$

Ainsi, par quotient de limites, on a

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

— $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$
Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ on a
$$g(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

— $a : x \mapsto \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$
Pour $x > 0$ on a
$$a(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = e^{\frac{\ln(\ln(x))}{x} - \frac{\ln(x)}{x}}$$
On sait que, par croissance comparée
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = 0$$
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc
$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = 1$$

— $b : x \mapsto \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$
Pour $x > 0$ on a
$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} \\ &= \frac{x^{x^2}}{x^{x^x}} \\ &= \frac{e^{x^2\ln(x)}}{e^{x^x\ln(x)}} \\ &= e^{(x^2-x^x)\ln(x)} \\ &= e^{x^2\left(1-e^{(x-2)\ln(x)}\right)\ln(x)} \end{aligned}$$
On a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x-2)\ln(x) = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 1 - e^{(x-2)\ln(x)} = -\infty$
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-e^{(x-2)\ln(x)}\right)\ln(x) = -\infty$, ce qui finalement nous donne
$$\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$$

— $c : x \mapsto \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ où $a \in \mathbb{R}$
Pour $x > \max(0,-a)$ on a
$$c(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$
De plus, pour $u \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$
$$u - u^2 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$$
(Il suffit de faire une étude de fonction pour le prouver, on verra des arguments plus simples dans les chapitres à venir)

Pour $x > \max(0, -2a)$ on a alors

$$x\left(\frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2}\right) \leqslant x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \leqslant x \times \frac{a}{x}$$

D'où

$$e^{a - \frac{a^2}{x}} \leqslant c(x) \leqslant e^a$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = e^a$$

Réponse de l'exercice 14.5

— pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

D'où, pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\setminus\{0\}$,

$$1 - x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

— Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

On reconnait un taux d'accroissement en 0. On sait que, si f est dérivable alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

Ici cela donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$$

— Soit $c : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$. Alors $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. On a alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = f'(0) = \frac{\cos(0)}{1 + \sin(0)} = 1$$

— Pour $x > 0$ on a $x^x = e^{x\ln(x)}$. Par croissances comparées on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$

— Pour $x \in]0, \pi[$ on a

$$\sin(x)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x)}{\ln(x)}} = e^{1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$. D'où

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^1$$

— Pour $x > 0$ on a $|\ln(x)|^x = e^{x\ln(|\ln(x)|)}$
Par croissance comparée on a $\lim_{x\to 0} x\ln(|\ln(x)|) = 0$ (On peut le voir en remarquant que $x\ln(|\ln(x)|) = x\ln(x) \times \dfrac{\ln(|\ln(x)|)}{\ln(x)}$ et en utilisant les limites $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0$)
Ainsi
$$\lim_{x\to 0} |\ln(x)|^x = 1$$

— Pour $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ on a
$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} = \sqrt[3]{1+x}\frac{1-\sqrt[6]{1+x}}{x}$$
La fonction $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{6}}$ est dérivable en 0 de dérivée $\dfrac{1}{6}$, ainsi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{6}$$
D'où
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} = -\frac{1}{6}$$

— Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ on a
$$\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\frac{\cos(bx)}{\sin(bx)} = \frac{\cos(bx)}{\cos(ax)}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{bx}{\sin(bx)}\frac{a}{b}$$
On sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(bx)}{\cos(ax)} = 1$, On a vu plus haut que $\lim x \to 0\dfrac{sin(x)}{x} = 1$, d'où
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin(bx)} = 1$$
Finalement on obtient
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$$

— Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ on a
$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$$
Comme $\lim_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ on a alors $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1} = 1$. Il nous reste à contrôler $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.
On a $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$
On sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
Finalement
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Réponse de l'exercice 14.6

— Soit $a : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$
Pour $x>1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x}+1)}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

Soit $\tilde{a} : h \mapsto a(1+h)$, on a alors

$$\tilde{a}(h) = \frac{h}{\sqrt{h^2+2h}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2+h}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+2}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2+h}}$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\tilde{a}(h) = \frac{0}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et donc

$$\lim_{x\to 1} a(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

— Soit $\tilde{b} : h \mapsto b\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$.
Pour $h\neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{b}(h) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{h}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)+\sin(h)\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\right.}{h}\\ &= \frac{\cos(h)+\sin(h)-\cos(h)+\sin(h)}{\sqrt{2}h}\\ &= \frac{\sqrt{2}\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$. Ainsi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} b(x) = \sqrt{2}$$

— Soit $\tilde{c} : h \mapsto c\left(h+\frac{\pi}{3}\right)$.
Pour $h\neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{c}(h) &= \frac{\sin\left(3\left(h+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{1-2\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{\sin(3h+\pi)}{1-2\cos(h)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\sin(h)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{-\sin(3h)}{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)}\end{aligned}$$

$$= -3\frac{\sin(3h)}{3h}\frac{h}{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)}$$

On sait que $\dfrac{\cos(h)-1}{h} = \dfrac{\cos(h)-1}{h^2} \times h$ et que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h^2} = -\dfrac{1}{2}$, d'où $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$.
On sait de plus que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$. Ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h)}{3h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)}{h} = \sqrt{3}$$

Finalement

$$\lim_{h\to 0} -3\frac{\sin(3h)}{3h}\frac{h}{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Et donc

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} c(x) = -\sqrt{3}$$

Réponse de l'exercice 14.7

— Pour $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

D'où

$$1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc

$$\lim_{x\to 0+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

— Pour $x > 1$ on a $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ et donc $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, pour $x > 1$ on a $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Il est évident qu'alors

$$\lim_{x\to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

— Pour $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty$$

Réponse de l'exercice 14.8

Soit $x > 0$ on a

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'où, par quotient et somme de limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$$

Pour $x > 0$ on a

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

D'où

$$\ln(x) \leqslant \ln(e^x - 1) \leqslant \ln\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi, on a

$$1 \leqslant \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x} \leqslant \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)}$$

De plus

$$\frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x} = 1$$

Réponse de l'exercice 14.9

— Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$. Pour montrer que f n'admet pas de limite en 0 on va exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers 0 mais telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas la même limite.

Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2\pi n} \qquad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent bien vers 0. De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = \sin(2\pi n) = 0 \qquad f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent donc pas la même limite. Ainsi f n'admet pas de limite en 0.

— Soit $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}} \end{array}$. Pour montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$ on va exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ mais telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas la même limite.
Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n \qquad v_n = n + \frac{1}{2}$$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent bien vers $+\infty$ De plus, pour $n > 0$ on a $g(u_n) = 1$ et

$$\begin{aligned} g(v_n) &= \frac{{v_n}^{v_n}}{\lfloor v_n\rfloor^{\lfloor v_n\rfloor}} \\ &= \frac{e^{v_n \ln(v_n)}}{n^n} \\ &= \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{n^n} \\ &= \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}}{n^n} \\ &= \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}}{n^n} \\ &= \frac{e^{\left(n\ln(n)+\frac{\ln(n)}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}}{n^n} \\ &= \sqrt{n} \times \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \times \sqrt{1+\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{2n}} = 1$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} g(v_n) = +\infty$$

La suite $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent donc pas la même limite. Ainsi g n'admet pas de limite en $+\infty$.

Réponse de l'exercice 14.10

1. Commençons par supposer que f n'est pas majorée. Alors pour tout $A > 0$, il existe η tel que $f(\eta) \geqslant A$. Mais alors, comme f est croissante, pour tout $x \geqslant \eta$, on a $f(x) \geqslant f(\eta) \geqslant A$. Ceci prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Supposons maintenant que f est majorée. Alors l'image de f, c'est-à-dire l'ensemble

$$E = \{f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}_+\}$$

est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure, $l = \mathrm{Sup}(A)$.

Par définition de cette borne supérieure on a alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ l - f(x_0) \leqslant \epsilon.$$

On sait de plus que f est croissante, d'où, pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ donc $l - f(x) \leqslant l - f(x_0) \leqslant \epsilon$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

2. Le sens réciproque a été prouvé dans la question précédente. Pour le sens direct, on a par exemple pour $\epsilon = 1$:

$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant A,\ f(x) \leqslant \lambda + 1$$

comme f est croissante, on a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) \leqslant \lambda + 1$ et $f(0) \leqslant f(x)$ donc f est bornée.

Réponse de l'exercice 14.11

On suppose par exemple f croissante. La preuve est similaire si f est décroissante. Soit $a \in I$. Alors si on pose

$$E = \{f(x),\ x \in I, x < a\}$$

l'ensemble E est non vide et majoré par $f(a)$ car f est croissante.

Notons l^- sa borne supérieure.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_0 \in I$ avec $x_0 < a$ tel que

$$l^- - \epsilon \leqslant f(x_0) \leqslant l^-$$

Par croissance de f, on a :

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad x \geqslant x_0 \ \Rightarrow\ l^- - \epsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant l^- \leqslant l^- + \epsilon.$$

Autrement dit, en prenant $\eta = a - x_0$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta,\ \forall x \in I \cap]-\infty, a[,\ |a - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x_0) - l^-| \leqslant \epsilon.$$

La preuve de la limite à droite se fait de la même façon en utilisant la borne inférieure.

Réponse de l'exercice 14.12

On sait que fg admet pour limite 1 en 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - 1| \leqslant \epsilon$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et η tel que

$$|x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - 1| \leqslant \epsilon$$

Pour tout $x \in [0, \eta]$ on a alors

$$1 - \varepsilon \leqslant f(x)g(x) \leqslant 1 + \varepsilon$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$

$$f(x)g(x) \leqslant f(x) \leqslant 1$$

Donc, si $x \in [0, \eta]$ alors

$$1 - \varepsilon \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(x) \leqslant 1 \leqslant 1 + \varepsilon$$

On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x| \leqslant \eta$ alors $|f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{x\to0} f(x) = 1$.

Puisque f tend vers 1 en 0 alors elle est non-nulle au voisinage de 0. Ainsi, au voisinage de 0 on a $g(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 1 en 0. D'où, par quotient de limites, $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Réponse de l'exercice 14.13

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, On va procéder par récurrence sur n.
   Initialisation :
   On a
   $$f(0+0) = f(0) + f(0)$$
   , ainsi $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$
   En particulier $f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x)$
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $f(nx) = nf(x)$
   Alors
   $$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$
   On a donc montré que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$$
   D'où
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$$
2. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$
   On a $f(q \times rx) = q \times f(rx)$, c'est-à-dire $f(px) = q \times f(rx)$.
   D'où
   $$f(rx) = \frac{f(px)}{q} = \frac{pf(x)}{q} = rf(x)$$
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = rf(1)$. Notons $\lambda = f(1)$, on a alors
   $$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = \lambda r$$
4. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) + f(x - x_0)$$
   Notons $\ell = \lim_{y\to 0} f(y)$, on a alors, par composition de limite,
   $$\lim_{x\to x_0} f(x - x_0) = \ell$$
   Ainsi f admet une limite en x_0 et
   $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \ell$$
   (b) Commençons par déterminer ℓ.
   On a $\ell = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\lambda}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda}{n} = 0$. Ainsi $\ell = 0$.

On en déduit que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers x_0. On peut par exemple prendre la suite des troncatures de x_0 à n chiffres après la virgule.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \frac{\lfloor 10^n x_0 \rfloor}{10^n}$$

On a alors, par composition de limite

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x_0)$$

Or, on a également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(r_n) = \lambda r_n$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lambda x_0$$

Et donc, par unicité de la limite,

$$f(x_0) = \lambda x_0$$

Réponse de l'exercice 14.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Soit $T > 0$ une période de f et $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe alors x_0 et x_1 tels que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Définissons alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = x_0 + nT \qquad v_n = x_1 + nT$$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l \qquad \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = l$$

Cependant on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = f(x_0 + nT) = f(x_0) \qquad f(v_n) = f(x_1 + nT) = f(x_1)$$

Les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc respectivement vers $f(x_0)$ et $f(x_1)$.
Par unicité de la limite on a alors $f(x_0) = l$ et $f(x_1) = l$, d'où $f(x_0) = f(x_1)$ ce qui est absurde.
On a ainsi prouvé que, si f est périodique et admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Réponse de l'exercice 14.15

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on va procéder par récurrence sur n.
   <u>Initialisation :</u>
   Pour $n = 0$ on a bien $f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right)$.
   <u>Hérédité :</u>
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

On a de plus
$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
Ainsi $f(x)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.
Ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$ et achève la récurrence.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\ell=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. On a alors
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}=0$$
D'où
$$\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\ell$$
Or
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x)$$
D'où
$$\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x)$$
Par unicité de la limite on a donc $f(x)=\ell$.
f est donc constante et vaut ℓ.

Réponse de l'exercice 14.16

— Soit $a : x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$
Pour $x>1$ on a
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}&=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\\&=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$
Soit $\tilde{a} : h\mapsto a(1+h)$, on a alors
$$\tilde{a}(h)=\frac{h}{\sqrt{h^2+2h}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2+h}}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+2}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2+h}}$$
Ainsi,
$$\lim_{h\to 0}\tilde{a}(h)=\frac{0}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Et donc
$$\lim_{x\to 1}a(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

— Soit $\tilde{b} : h\mapsto b\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$.
Pour $h\neq 0$ on a
$$\tilde{b}(h)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{h}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) + \sin(h)\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\right.}{h}$$
$$= \frac{\cos(h) + \sin(h) - \cos(h) + \sin(h)}{\sqrt{2}h}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin(h)}{h}$$

On sait que $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} b(x) = \sqrt{2}$$

— Soit $\tilde{c} : h \mapsto c\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$.
Pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(h) &= \frac{\sin\left(3\left(h+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{1 - 2\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{\sin(3h+\pi)}{1 - 2\cos(h)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(h)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{-\sin(3h)}{1 - \cos(h) + \sqrt{3}\sin(h)} \\
&= -3\frac{\sin(3h)}{3h}\frac{h}{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)}
\end{aligned}$$

On sait que $\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos(h)-1}{h^2} \times h$ et que $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h^2} = -\frac{1}{2}$, d'où $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$.
On sait de plus que $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$. Ainsi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(3h)}{3h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)}{h} = \sqrt{3}$$

Finalement

$$\lim_{h\to 0} -3\frac{\sin(3h)}{3h}\frac{h}{1-\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Et donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} c(x) = -\sqrt{3}$$

Réponse de l'exercice 14.17

— On sait que $\ln(y) \underset{1}{\sim} y - 1$. De plus $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$. Ainsi

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1$$

On sait de plus que $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. D'où

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

— On a

$$x^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} - 1$$

On sait que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(x) = 0$ et que $e^y - 1 \underset{0}{\sim} y$. Ainsi

$$e^{\frac{1}{x}\ln(x)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\ln(x)$$

— Cet équivalent est simple, on sait par croissances comparées que $x+\sin(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ et que $e^x+\ln(x)-2 \underset{+\infty}{\sim} e^x$. Ainsi

$$(x+\sin(x))(e^x+\ln(x)-2) \underset{+\infty}{\sim} xe^x$$

Réponse de l'exercice 14.18

— $a(x) = \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} \quad (\alpha > 0)$ en $+\infty$
Pour $x > 0$ on a

$$\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x^\alpha\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\alpha\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\ln(x)} = \alpha + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\ln(x)}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\ln(x)} = 0$. D'où

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} = \alpha$$

et donc

$$\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \alpha$$

— $b(x) = \dfrac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)}$ en $+\infty$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1) = +\infty \neq 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3 = +\infty \neq 1$, d'où

$$\frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2x^2)}{\ln(x)} = 2 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} 2$$

— $c(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ en $+\infty$
Pour $x > 0$ on a

$$x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x) = x\left(\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - x\ln(x) - \ln(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x)$$

On a

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x}$$

Ainsi $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} o(-\ln(x))$ et donc

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$$

Finalement

$$x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$$

— $d(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$
Pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{x^2+1}-x=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

On sait que $(1+y)^\alpha-1\underset{0}{\sim}\alpha y$, d'où $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^2}$ et donc

$$\sqrt{x^2+1}-x\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$$

— $e(x)=\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1$ et que $\ln(y)\underset{1}{\sim}y-1$, d'où

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{2x^2}$$

— $f(x)=\ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)$ en $+\infty$
Pour $x\in D_f$ on a

$$\ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)=\ln\left(\frac{2x^2-5x+7+4x-6}{2x^2-5x+7}\right)=\ln\left(1+\frac{4x-6}{2x^2-5x+7}\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-6}{2x^2-5x+7}=0$, d'où

$$\ln\left(1+\frac{4x-6}{2x^2-5x+7}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{4x-6}{2x^2-5x+7}\underset{+\infty}{\sim}\frac{4x}{2x^2}=\frac{2}{x}$$

Ainsi

$$\ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{x}$$

— $g(x)=\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ en 0

$$\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}\underset{0}{\sim}\frac{-x\times x}{x^2}=-1$$

— $h(x)=\frac{\sin^2(e^{3x}-1)}{x^3}$ en 0
On a $\lim\limits_{x\to0}e^{3x}-1=0$, d'où

$$\sin^2(e^{3x}-1)\underset{0}{\sim}\left(e^{3x}-1\right)^2\underset{0}{\sim}(3x)^2=9x^2$$

Et donc

$$\frac{\sin^2(e^{3x}-1)}{x^3}\underset{0}{\sim}\frac{9}{x}$$

— $\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x-1$ en $+\infty$
Pour $x\in D_i$ on a

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x-1=e^{x\ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}-1=e^{-x\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)}-1=e^{-x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-1$$

On a $-x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x\times(-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, d'où $\lim\limits_{x\to\infty} -x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$. Ainsi

$$e^{-x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Finalement

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Réponse de l'exercice 14.19

— Pour $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

D'où

$$1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc

$$\lim_{x\to 0+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

— Pour $x > 1$ on a $0 < \frac{1}{x} < 1$ et donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, pour $x > 1$ on a $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Il est évident qu'alors

$$\lim_{x\to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

— Pour $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty$$

Réponse de l'exercice 14.20

Soit $x > 0$ on a

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'où, par quotient et somme de limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$$

Pour $x > 0$ on a

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

D'où

$$\ln(x) \leqslant \ln(e^x - 1) \leqslant \ln\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi, on a

$$1 \leqslant \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \leqslant \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\ln(x)}$$

De plus

$$\frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\ln(x)}$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\ln(x)} = 1.$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} = 1$$

Réponse de l'exercice 14.21

— $\dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ en 0

Pour $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} &= \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \\
&= \frac{(1 + \sin x) - (1 - \sin x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \\
&= \frac{2 \sin x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

D'où, par produit de limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = 1$$

— $\dfrac{\tan x}{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}$ en 0

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 4} + x - 2 &= (\sqrt{x^2 + 4} + (x - 2)) \frac{\sqrt{x^2 + 4} - (x - 2)}{\sqrt{x^2 + 4} - (x - 2)} \\
&= \frac{x^2 + 4 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2 - x}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}+2-x}$$

Alors, pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} = \frac{\tan(x)}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+4}+2-x}{4}$$

On sait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}+2-x}{4} = 1$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} = 1$$

— $\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ en $\dfrac{\pi}{2}$
Notons $f : x \mapsto \dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$. Étudions la limite de $f\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) &= \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-1} \\ &= \frac{1-\cos(h)-\sin x}{\cos(h)-\sin(h)-1} \\ &= \frac{1-\cos(h)-\sin x}{h} \times \frac{h}{\cos(h)-\sin(h)-1} \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$. Ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)-\sin x}{h} = -1$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\cos(h)-\sin(h)-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0} f\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right) = 1$ et donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} = 1$$

— $\dfrac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})}$ en 0.
On a

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \frac{\frac{\tan(x)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan(x)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}-1}{\sqrt{3}-2\left(\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)}-1}{\sqrt{3}-2\left(\cos(x)\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin(x)\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)} - \frac{1-\tan(x)}{1-\tan(x)}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)} \\
&= \frac{\frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)} \\
&= \frac{1}{1-\tan(x)}\frac{2\tan(x)}{x}\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)}
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x\to 0} tan(x) = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$.
Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)}{x} = 1$$

Finalement

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} = 1\times 2\times\frac{1}{1} = 2$$

— $(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en 1
Pour $x\in\mathbb{R}$ posons $f(x) = (x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Pour déterminer la limite de f en 1 on va déterminer la limite de $f(1+h)$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= ((1+h)^2+(1+h)-2)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}h\right) \\
&= (1+2h+h^2+1+h-2)\times\frac{-1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)} \\
&= (-3-h)\times\frac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{\frac{\pi}{2}h} = 1$. Ainsi

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)} = \frac{2}{\pi}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{-6}{\pi}$$

D'où

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{6}{\pi}$$

— $\frac{\cos(x)+\ln x}{(x+3)^2-e^{x^2}}$ en $+\infty$
Il s'agit d'un simple problème de croissance comparée. On a

$$\frac{\cos(x)+\ln x}{(x+3)^2-e^{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{-e^{x^2}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{-e^{x^2}} = 0$. D'où

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)+\ln x}{(x+3)^2-e^{x^2}} = 0$$

— $(2+\cos(x))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$(2+\cos(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(2+\cos(x))}$$

De plus

$$0 \leqslant \ln(2+\cos(x)) \leqslant \ln(3)$$

D'où

$$1 \leqslant (2+\cos(x))^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{\frac{3}{x}}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{3}{x}} = 1$. D'où, d'après le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x\to 0}(2+\cos(x))^{\frac{1}{x}} = 1$$

— $x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$
Pour $x \in \mathbb{R}^*$ notons $g(x) = x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Pour étudier la limite de g en $+\infty$ on va étudier la limite de $g\left(\frac{1}{h}\right)$ quand h tend vers 0^+.

$$g\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\ln(\cos(h))}{h^2} \underset{0}{\sim} \frac{\cos(h)-1}{h^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

— $\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
Pour $x \neq 0$ on a

$$-\sin(x) \leqslant \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sin(x)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\sin(x) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

— $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ en 0
Pour $x \neq 0$ on a

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-x\ln(x)}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. D'où

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

— $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $+\infty$
Pour $x > 0$ on a

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$, d'où

$$\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

Et donc

$$x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

Puisque

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e^{x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e$$

Réponse de l'exercice 14.22

Il s'agit d'une simple application du théorème des gendarmes. g est bornée, il existe donc m et M deux réels tels que

$$\forall x\in I \qquad m\leqslant g(x)\leqslant M$$

D'où

$$\forall x\in I \qquad mf(x)\leqslant (f\times g)(x)\leqslant Mf(x)$$

Il est évident que $\lim\limits_{x\to a} mf(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to a} Mf(x)=0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=0$$

Réponse de l'exercice 14.23

Notons $\ell = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. On va montrer que

$$\lim_{x\to\infty}\max(f,g)(x)=\max(\ell,\ell')$$

Trois cas de figure sont possibles : ou bien $\ell=\ell'$, ou bien $\ell>\ell'$, ou bien $\ell'>\ell$.

— Dans le premier cas, on peut distinguer le cas $\ell=\pm\infty$ et $\ell\in\mathbb{R}$. Si $\ell=+\infty$ alors, pour tout $C>0$, par définition de la limite, il existe M et M' tels que

$$\forall x\geqslant M \qquad f(x)\geqslant C$$

$$\forall x\geqslant M' \qquad g(x)\geqslant C$$

Et donc

$$\forall x\geqslant \max(M,M') \qquad \max(f,g)(x)\geqslant C$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\infty}\max(f,g)(x)=+\infty$. On procède de manière similaire pour $-\infty$.
Si $\ell\in\mathbb{R}$ alors, pour tout $\varepsilon>0$, par définition de la limite, il existe M et M' tels que

$$\forall x\geqslant M \qquad |f(x)-\ell|\leqslant\varepsilon$$

$$\forall x \geqslant M' \qquad |g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Et donc

$$\forall x \geqslant \max(M, M') \qquad |\max(f,g)(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\infty} \max(f,g)(x) = \ell = \max(\ell, \ell')$.

— Si $\ell > \ell'$. Soit alors $(C, C') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ell > C > C' > \ell'$.
Comme $\ell > C$, il existe M tel que,

$$\forall x \geqslant M \qquad f(x) \geqslant C$$

De même, il existe M' tel que

$$\forall x \geqslant M \qquad g(x) \leqslant C'$$

Ainsi, pour $x \geqslant \max(M, M')$ on a

$$f(x) \geqslant C > C' \geqslant g(x)$$

D'où, pour $x \geqslant \max(M, M')$, $\max(f,g)(x) = f(x)$.
On en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} \max(f,g)(x) = \ell = \max(\ell, \ell')$$

— On procède de manière similaire au cas précédent pour $\ell < \ell'$.
Dans tous les cas, on a bien

$$\lim_{x\to\infty} \max(f,g)(x) = \max(\ell, \ell')$$

On aurait aussi pu simplement remarquer que $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$.

Réponse de l'exercice 14.24

On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + bx^2 + ce^x = 0$$

En divisant par e^x on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x)e^{-x} + bx^2e^{-x} + c = 0$$

On a $\lim\limits_{x\to\infty} a\cos(x)e^{-x} + bx^2e^{-x} + c = c$ et $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$. Par unicité de la limite on a donc $c = 0$.
Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + bx^2 = 0$$

On peut continuer notre argument à base de limites mais ici on peut se simplifier la tache. En prenant en particulier $x = 0$ on obtient $a = 0$, ce qui nous donne ensuite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad bx^2 = 0$$

Ceci implique, en prenant par exemple $x = 1$, que $b = 0$.
Finalement on a bien $a = b = c = 0$.

Réponse de l'exercice 14.25

Pour $x \neq 1$ on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ainsi, pour $x \neq 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Il nous faut alors montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} \times \frac{1}{x^n} = 0$$

Ce qui est évident car $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \times \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{x}{1-x}$

On a donc bien

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \underset{0}{=} \mathrm{o}(x^n)$$

Réponse de l'exercice 14.26

— On a $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = 1$, d'où $e^{\sin x} \underset{0}{\sim} 1$

— On a $\lim\limits_{x\to 0} e^{\cos x} = e^1$, d'où $e^{\cos x} \underset{0}{\sim} e^1$

— On a

$$e^{\cos x} - e = e \times \left(e^{\cos(x)-1} - 1\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) - 1 = 0$ et que $e^y - 1 \underset{0}{\sim} y$. Ainsi

$$e^{\cos(x)-1} - 1 \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Finalement

$$e^{\cos x} - e \underset{0}{\sim} -\frac{e \times x^2}{2}$$

Réponse de l'exercice 14.27

On a

$$\frac{e^{3x} - 1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{3x}{x} \underset{0}{\sim} 3$$

Ainsi f admet une limite finie en 0. f est donc prolongeable par continuité en 0.

Réponse de l'exercice 14.28

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Alors :

— On a $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$; donc $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f(na) = nf(a)$. (On le montre par une simple récurrence sur n)

— Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f(na) = nf(a)$:
Le résultat est acquis pour les entiers positifs. Si $n < 0$, alors $-n > 0$ et $f(-na) = -nf(a)$. Comme d'après le deuxième point $f(-na) = -f(na)$, on en déduit que $f(na) = nf(a)$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in N^*$, on a $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$. En effet $f(p) = f\left(q\dfrac{p}{q}\right)$. D'où $pf(1) = qf\left(\dfrac{p}{q}\right)$ et ainsi $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$.
Il existe donc un réel $k = f(1)$ tel que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = kr$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (r_n) de nombres rationnels qui converge vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = kr_n$. Donc par continuité de f, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = kx$.
   f est donc une fonction linéaire.

Réciproquement les fonctions linéaires $f : x \mapsto kx$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x+y) = k(x+y) = kx+ky = f(x)+f(y)$, ce qui prouve que l'ensemble des fonctions f telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est l'ensemble des fonctions linéaires.

Réponse de l'exercice 14.29

1. Sur le segment $[0, 1]$ f est une fonction continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Soit alors $A = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et $B = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et soit $x_{min} \in [0, 1]$ et $x_{max} \in [0, 1]$ tels que

$$f(x_{min}) = B \qquad f(x_{max}) = A$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n = \lfloor x \rfloor$. On a alors $n \leqslant x < n + 1$ d'où $x - n \in [0, 1]$. On sait de plus que f est 1-périodique
   Ainsi $f(x) = f(x - n + n) = f(x - n)$ par périodicité. Comme $x - n \in [0, 1]$ on a alors

$$A \leqslant f(x-n) \leqslant B$$

   D'où

$$A \leqslant f(x) \leqslant B$$

   On a donc montré que, pour tout réel x, $A \leqslant f(x) \leqslant B$. f est donc bornée.
2. On pose $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Avec les notations précédentes on peut remarquer que :
   — Si $B \leqslant 0$ alors $M = |A|$
   — Si $A \geqslant 0$ alors $M = |B|$
   — Si $A < 0$ et $B > 0$ alors $M = \max(B, -A)$
   Dans le premier cas on a $|f(x_{min})| = M$, dans le second cas on a $|f(x_{max})| = M$ et dans le troisième cas on a, soit $|f(x_{min})| = M$ si $-A \geqslant B$, soit $|f(x_{max})| = M$ si $B \geqslant -A$.
   Dans tous les cas on a bien $a \in [0, 1]$ tel que $|f(a)| = M$. L'énoncé nous demande $a \in [0, 1[$. Pour cela il suffit de remarquer que si on avait $a = 1$ alors, par périodicité de f on aurait $f(0) = f(1)$ et donc $|f(0)| = M$ aussi.

Réponse de l'exercice 14.30

Soit $m = f(0)$. Comme

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que :

$$\forall x \leqslant a,\ f(x) \geqslant m \text{ et } \forall x \geqslant b,\ f(x) \geqslant m.$$

On pose alors $I = [a, b]$. Clairement, $0 \in I$. Par le caractère borné des fonctions continues sur un segment, l'image de I par f est un segment, que l'on note $[i, s]$. En particulier, si on note x_0 un élément de I tel que $f(x_0) = i$, on a :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant i = f(x_0)$$

Mais comme $0 \in I$:

$$\forall x \notin I,\ f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_0).$$

Le réel i est donc un minimum global pour f.

Réponse de l'exercice 14.31

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$. On a alors

$$\forall x \in [a, b] \quad a \leqslant f(x) \leqslant b$$

Soit $\begin{array}{rccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

g est alors continue comme différence de deux fonctions continues. On a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

Réponse de l'exercice 14.32

1. f est une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$\forall x \in]a, b[\qquad f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{x-b)}^{2} < 0$$

   f est donc strictement décroissante.

   D'après le théorème de la bijection continue f est alors une bijection de $]a, b[$ dans $f(]a, b[)$ et $f(]a, b[)$ est un intervalle. Il reste à montrer que $f(]a, b[) = \mathbb{R}$.

   Soit $y \in \mathbb{R}$, on sait que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$. Ainsi, il existe $x_0 \in]a, b[$ et $x_1 \in]a, b[$ tels que

$$\forall x \in]a, x_0[\quad f(x) > y + 1$$
$$\forall x \in]x_1, b[\quad f(x) < y - 1$$

   En particulier $y \in]f(x_1), f(x_0)[$.

   On sait que $f(]a, b[)$ est un intervalle et que $f(x_1) \in f(]a, b[)$ et $f(x_1) \in f(]a, b[)$. Ainsi $]f(x_1), f(x_0)[\subset f(]a, b[)$ et donc $y \in f(]a, b[)$.

   D'où, pour tout réel y, $y \in f(]a, b[)$, c'est-à-dire $f(]a, b[) = \mathbb{R}$.

   f réalise une bijection continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Le théorème de la bijection continue nous dit aussi que f^{-1} est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $]a, b[$.
   Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = y \\ \Leftrightarrow & x - b + x - a = y(x-a)(x-b) \\ \Leftrightarrow & 2x - a - b = yx^2 - y(a+b)x + yab \\ \Leftrightarrow & yx^2 + (-2 - y(a+b))\,x + yab + a + b = 0 \end{aligned}$$

   Si $y = 0$ on a alors $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Si $y \neq 0$ il nous faut alors résoudre une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant est

$$(-2-y(a+b))^2 - 4y(yab+a+b) = 4+4y(a+b)+y^2(a+b)^2 - 4y^2ab - 4y(a+b) = 4+y^2(b-a)^2 > 0$$

Notre équation admet donc deux solution réelles qui sont

$$\frac{y(a+b)+2+\sqrt{4+y^2(b-a)^2}}{2y} = \frac{1}{y} + \frac{a+b}{2}\frac{|y|}{y} + \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$$

et

$$\frac{y(a+b)+2-\sqrt{4+y^2(b-a)^2}}{2y} = \frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} - \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$$

On ne s'intéresse qu'à la solution qui se trouve dans $]a,b[$ (on est sûr qu'il y en a une et une seule car on sait que f est bijective et donc que f^{-1} existe bien)
Si $y > 0$ alors

$$\frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} + \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}} > \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}} = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} = b$$

et donc $\frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} + \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$ ne peut pas convenir, ainsi, si $y > 0$ alors

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} - \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$$

De même, si $y < 0$ alors

$$\frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} + \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}} = \frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}} = a$$

et donc $\frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} + + \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$ ne peut pas convenir. D'où, si $y < 0$ alors

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y} + \frac{a+b}{2} - \frac{|y|}{y}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{4}{y}}$$

Et finalement

$$\begin{array}{rcll} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \to \quad]a,b[\\ & & y & \mapsto \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{2-\sqrt{4+y^2(b-a)^2}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse de l'exercice 14.33

La fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5+5x-2 \end{array}$ est continue et vérifie $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 4 > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Par ailleurs f est dérivable et $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$ donc f est strictement croissante, donc injective, ce qui prouve l'unicité de la racine.

On procède par dichotomie (et avec une calculatrice). On trouve que $0,39$ est une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près par défaut.

Réponse de l'exercice 14.34

1. f et g sont deux fonctions continues. On sait de plus que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$. Ainsi $\dfrac{f}{g}$ est bien définie et continue sur $[a,b]$.
   Comme $\dfrac{f}{g}$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Soit alors $m = \min\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et $x_0 \in [a,b]$ tel que $m = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$
   Comme on a $f > g$ alors $m = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} > 1$.
   Pour tout $x \in [a,b]$ on a donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant m$, d'où
   $$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant mg(x) \ \text{ où } m > 1$$
   Ce qui est le résultat voulu
2. D'après le cours, une telle fonction ne peut pas être continue. La fonction définie « par morceaux »suivante va convenir
   $$\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[\\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$
   On a alors $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 1$, et $\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$ mais
   $$\forall x \in [0,1] f(x) \neq 0 \quad \text{ et } \quad f(x) \neq 1$$
   f n'admet donc ni maximum, ni minimum.

Réponse de l'exercice 14.35

On écrit
$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\left(|f-g| + f + g\right).$$
puis on utilise les théorèmes généraux de continuité : la différence de deux fonctions continues est continue donc $f-g$ est continue. La composition de deux fonctions continues est continue donc $|f-g|$ est continue. Enfin, la somme et la multiplication par un réel de fonctions continues est continue donc $\dfrac{1}{2}\left(|f-g| + f + g\right)$ est continue.
La preuve pour le minimum est similaire, en utilisant la formule :
$$\min(f,g) = \frac{1}{2}\left(-|f-g| + f + g\right).$$

Réponse de l'exercice 14.36

1. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$m \times (b - a) > 1 \text{ et } n < b \times m \leqslant n + 1.$$

On en déduit l'inégalité $a \times m < n < b \times m$, puis, en divisant par $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on sait, d'après la question précédente, qu'il existe un rationnel entre x et $x + \frac{1}{n}$. Notons u_n ce rationnel.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on alors $x \leqslant u_n \leqslant x + \frac{1}{n}$. D'après le théorème des gendarmes on a alors $\lim\limits_{n\ to\infty} u_n = x$ comme voulu.

Réponse de l'exercice 14.37

Commençons par remarquer que, si f est une fonction constante alors f vérifie bien la condition demandée.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$

On a alors $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \cdots$. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f(1)$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ on a

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Or f est continue, donc

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f(0)$$

D'où, par unicité de la limite $f(1) = f(0)$.

Ce procédé peut en fait être généralisé : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a alors

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0}{4}\right) = \cdots$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(1)$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ on a

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$$

Or f est continue et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{n}\right) = f(0)$$

D'où $f(x_0) = f(0)$.

Ainsi, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $f(x_0) = f(0)$. La fonction f est donc bien constante.

Réponse de l'exercice 14.38

On sait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que,

$$\forall x \geqslant M \quad |f(x)| \leqslant 1$$

De même, comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ on a $c < 0$ tel que

$$\forall x \leqslant m \quad |f(x)| \leqslant 1$$

f est continue sur le segment $[c, C]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, notons $M = \max_{x\in[c,C]} f(x)$ et $m = \min_{x\in[c,C]} f(x)$. Il existe de plus $x_0 \in [c, C]$ tel que $f(x_0) = M$.

On a $0 \in [c, C]$ d'où $f(0) \leqslant M$ et donc $M \geqslant 1$.

Si $x \in]-\infty, c]$ on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. De même, si $x \in [C, +\infty[$ on a aussi $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Enfin, si $x \in [c, C]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\min(-1, m) \leqslant f(x) \leqslant \max(M, 1)$$

On sait que $M \geqslant 1$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \min(-1, m) \leqslant f(x) \leqslant M$$

M est un majorant de f. Il existe de plus x_0 tel que $f(x_0) = M$. M est donc le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Réponse de l'exercice 14.39

Notons f la fonction qui, à une durée x en minutes entre 0 et 120, associe la distance en kilomètres parcourue par le randonneur à l'instant x. On a alors $f(0) = 0$ et $f(120) = 10$.

A moins que notre randonneur ne se téléporte, on peut supposer que f est continue.

Soit $g \;:\; \begin{array}{ccc} [60,120] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(x-60) \end{array}$

À un instant x, $g(x)$ mesure alors la distance parcourue pendant l'heure précédente. g est également une fonction continue car $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x-60)$ sont continues.

On a $g(60) = f(60)$ et $g(120) = 10 - f(60)$.

Si $f(60) \leqslant 5$ alors $10 - f(60) \geqslant 5$ et inversement, si $f(60) \geqslant 5$ alors $10 - f(60) \leqslant 5$. Dans tous les cas 5 est entre $g(60)$ et $g(120)$.

D'après le théorèmes des valeurs intermédiaires, il existe alors $X_0 \in [60, 120]$ tel que $g(x_0) = 5$, i.e $f(x_0) = f(x_0 - 60) + 5$

Ainsi, entre l'instant $x_0 - 60$ et l'instant x_0, le randonneur a parcouru exactement 5km.

Réponse de l'exercice 14.40

On sait que $|f|$ est constante. Soit alors $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |f(x)| = C$$

Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe alors $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ tels que $f(x_0) = C$ et $f(x_1) = -C \neq C$ (ceci implique par ailleurs que $C \neq 0$)

f est continue sur I, 0 se trouve « entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ». D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe alors x_2 entre x_0 et x_1 tel que $f(x_2) = 0$

Alors $|f(x_2)| = 0$. Or $|f|$ est constante, d'où $|f(x_2)| = C \neq 0$.

On aboutit à une absurdité. Ainsi f est bien constante.

Réponse de l'exercice 14.41

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) - x + 1 \end{array}$. f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 2 > 0$ et $f(\pi) = 1 - \pi < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $f(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\cos(x_0) = x_0 - 1$.

f est de plus dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est en fait strictement croissante.

Supposons par l'absurde qu'il existe a et b deux réels avec $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Pour $y \in [a, b]$ on a alors, par croissance $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, f est donc constante sur $[a, b]$. Ainsi f' est nulle sur $]a, b[$, c'est-à-dire

$$\forall y \in]a, b[\quad \sin(y) = -1$$

Ce qui est clairement absurde, il n'existe pas d'intervalle sur lequel la fonction sinus est constante.

f est donc strictement croissante, elle est donc injective. 0 admet ainsi au plus un antécédent par f, c'est-à-dire l'équation $\cos x = x - 1$ admet au plus une solution.

On a ainsi montré que l'équation $\cos x = x - 1$ admet au plus une solution et admet au moins une solution. Elle admet donc une unique solution

Réponse de l'exercice 14.42

1. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1} - n$. On trace le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

   $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. Puisque f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ cette racine est unique.
   Par ailleurs f_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f_n([1, +\infty[) = [2 - n, +\infty[$. Il existe donc un unique $\beta_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(\beta_n) = 0$.
2. Pour tout $n > 2$, $(\alpha_n)^n - n\alpha_n + 1 = 0$. Donc $n\alpha_n = (\alpha_n)^n + 1$. Comme $(\alpha_n)^n < 1$, on a $n\alpha_n < 2$. On en déduit : $0 < \alpha_n < \frac{2}{n}$. Par encadrement on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.
3. On pose $\beta_n = 1 + c_n$.

$$\begin{aligned}
(\beta_n)^n - n\beta_n + 1 = 0 &\Leftrightarrow (1 + c_n)^n - n(1 + c_n) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 + nc_n + \frac{n(n-1)}{2} c_n^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} c_n^k - nc_n - n + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} c_n^2 = n - 2 - \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} c_n^k \\
&\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} c_n^2 < n \\
&\Rightarrow c_n^2 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}
\end{aligned}$$

On a donc $1 < \beta_n < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. D'où, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 1$.

Réponse de l'exercice 14.43

Comme f est surjective, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a_0) = 0$.

Par le caractère borné des fonctions continues sur un segment, on sait que $f([0, a_0]) = [i, s]$ est un intervalle fermé borné.

Comme f est surjective, il existe alors b_0 et c_0 tels que $f(b_0) = i - 1$ et $f(c_0) = s + 1$. Par définition de i et s, on a $b_0 > a_0$ et $c_0 > a_0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'un $a_1 > a_0$ tel que $f(a_1) = 0$. On itère alors l'opération, ce qui nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n, \; f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0.$$

La fonction f s'annule donc une infinité de fois.

Réponse de l'exercice 14.44

1. $$f \circ f - 2f + \mathrm{Id} = 0 \Leftrightarrow (2\mathrm{Id} - f) \circ f \mathrm{Id} \text{ et } f \circ (2\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Id}$$

   Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et sa bijection réciproque est $g = 2\mathrm{Id} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   f étant injective et continue. Montrons qu'elle est strictement monotone.
   Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone, il existe alors $x < y < z$ trois réels tels que « $f(x)$, $f(y)$ et $f(z)$ ne sont pas dans l'ordre croissant ou décroissant », c'est-à-dire tels que $f(y) - f(x)$ et $f(z) - f(y)$ sont de signes différents. Par injectivité de f on a forcément $f(x) \neq f(y)$ et $f(y) \neq f(z)$
   Pour fixer les idées supposons que $f(y) < f(x)$ et $f(z) < f(y)$. Soit alors $a = \max(f(x), f(z)) < f(y)$. On a alors
   $$f(x) \leqslant a < f(y) \qquad \text{et} \qquad f(y) > a \geqslant f(z)$$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe alors $x_0 \in [x, y[$ tel $f(x_0) = a$ et $x_1 \in]y, z]$ tel que $f(x_1) = a$. D'où
   $$x_0 \neq x_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = f(x_1)$$
   Ce qui est absurde par injectivité de f.
   f est donc strictement monotone. Montrons qu'elle est strictement croissante.
   Supposons par l'absurde f strictement décroissante. Alors
   $$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow -f(x) < -f(y) \Rightarrow 2x - f(x) < 2y - f(y)$$
   ce qui est absurde puisque f et g sont de même monotonie. Donc f et g sont strictement croissantes.
2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = nf - (n-1)\mathrm{Id}$.
   C'est aussi vrai pour $n = 0$ en posant $f^0 = \mathrm{Id}$. En composant la relation $f \circ f - 2f + \mathrm{Id} = 0$ deux fois par f^{-1} on obtient $\mathrm{Id} - 2f^{-1} + f^{-1} \circ f^{-1}$. La propriété est donc aussi vraie pour f^{-1}. On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \; f^n = nf - (n-1)\mathrm{Id}$$
   Posons $b = f - \mathrm{Id}$. La relation précédente s'écrit : $\forall n \in \mathbb{Z}, \; f^n = nb + \mathrm{Id}$.
   Or : $x < y \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \; f^n(x) < f^n(y) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \; 0 < y - x + n(b(y) - b(x))$. On a donc $b(y) = b(x)$. Donc b est une fonction constante. Donc $f = Id + b$ est une translation.

Chapitre 15

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercices

Exercice 15.1

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \leqslant y\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ xy = 0\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x = y\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x + y = 1\}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 - y^2 = 0\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 = 0\}$$

Exercice 15.2

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer $F \cap G$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15.3

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^4$

$$A = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \ , \ a = 2c\} \qquad B = \{(x, 2x - y, y, x + 2y) \ , \ (x,y) \in \mathbb{K}^2\}$$

$$C = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \ , \ a^2 + 2ab = 0\} \qquad D = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \ , \ a + b = c\}$$

Exercice 15.4

Déterminer l'ensemble des réels x tels que la famille $((1,x,2), (-1,8,x), (1,2,1))$ soit liée dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 15.5

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants : $u_1 = (1,2,0,1,1)$, $u_2 = (0,1,1,1,1)$, $u_3 = (1,4,1,2,1)$.

1. Prouver que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
2. Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vecteur de $\mathbb{R}^5$. À quelles conditions sur x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5, v est-il élément de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$?

$u_1 = (1,2,0,1,1)$, $u_2 = (0,1,1,1,1)$, $u_3 = (1,4,1,2,1)$

Exercice 15.6

Montrer que la famille (u, v, w) avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 1)$ et $w = (-1, 0, 2)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.7

Soit $u = (1, 2, -1)$ et $v = (-6, 0, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Vect}(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 15.8

Trouver une famille génératrice à deux éléments du plan vectoriel de $\mathbb{K}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - 2\,z + t = 0. \end{cases}$$

Exercice 15.9

1. Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $0_{\mathbb{R}^3}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant $0_{\mathbb{R}^3}$. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.10

On considère $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition usuelle et du produit externe usuel est un espace vectoriel
2. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$$A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \} \qquad B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone } \}$$

$$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\} \quad D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$$

Exercice 15.11

Soit $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit l'ensemble $F + G$ par

$$F + G = \{u + v \ , \ u \in F \ , \ v \in G\}$$

Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 15.13

Vrai ou faux (justifier ses réponses) : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ quand F est l'ensemble des vecteurs dont :

1. toutes les coordonnées sont égales ;

2. la deuxième coordonnée est nulle ;
3. la deuxième coordonnée vaut 1 ;
4. la somme des coordonnées est nulle ;
5. la somme des coordonnées vaut 1.

Exercice 15.14

Vrai ou faux (justifier ses réponses) :

1. $\mathbb{Z}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$.
3. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}$.
4. $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
5. $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
6. $\{0\}$ et $\mathbb{C}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
7. Les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$ et les $\alpha\mathbb{R} = \{\alpha x \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercice 15.15

Vrai ou faux (justifier ses réponses) : F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$ quand F est l'ensemble des fonctions :

1. dérivables sur $[-1,1]$;
2. bornées sur $[-1,1]$;
3. telles que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} f(x) \leq 1$;
4. telles que $f(1) = 0$;
5. paires ;
6. impaires ;
7. paires ou impaires ;
8. croissantes sur $[-1,1]$;
9. monotones sur $[-1,1]$.

Exercice 15.16

Soient E un espace vectoriel et U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

Exercice 15.17

Dans le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^3$ montrer $x = (2,3,-1)$ est combinaison linéaire de $y = (3,7,0)$ et $z = (5,0,-7)$.

Exercice 15.18

1. La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs $((3,1),(-1,2),(1,-1))$ est-elle génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$? Est-elle libre ?
2. On supprime un des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. La nouvelle famille est-elle génératrice de $\mathbb{K}^2$. Est-elle libre ?

Exercice 15.19

1. La famille $\mathcal{F} = ((0,1),(1,2),(3,-7)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{K}^2$?
2. La famille $\mathcal{G} = ((-5,2))$ est-elle libre ?
3. On ajoute à $\mathcal{G}$ un des vecteurs de $\mathcal{F}$. La nouvelle famille est-elle libre ?

Exercice 15.20

La famille de polynômes suivante est-elle libre ou liée : $(X^3+4X^2-2X+3, X^3+6X^2-X+4, 3X^3+8X^2-8X+7)$?

Exercice 15.21

1. On considère dans $\mathbb{K}^2$ les vecteurs $u = (3,-1)$ et $v = (1,2)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{K}^2$. Quelles sont les coordonnées de $x = (5,-2)$ dans cette nouvelle base ?
2. On considère dans R^3 les vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (3,2,1)$
   (a) La famille (u,v) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Soit $F = \text{Vect}(u,v)$. Quelle est la dimension de F ? (u,v) est-elle une base de F ?
   (c) Le vecteur $x = (1,4,7)$ appartient-il à F ? Si c'est le cas quelles sont ses coordonnées dans la base (u,v) ?
   (d) Le vecteur $y = (-1,6,9)$ appartient-il à F ? Si c'est le cas quelles sont ses coordonnées dans la base (u,v) ?
3. Soit $u = (2,5)$, $v = (-3,2)$ et $w = (3,1)$.
   (a) La famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
   (b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ à partir de u, v, et w.
   (c) Quelles sont les coordonnées de $x = (5,-2)$ dans cette nouvelle base ?

Exercice 15.22

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u = (1,1,-1)$ et $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$. Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

Exercice 15.23

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ 2x - y - 3z = 0\} \qquad E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases}\right\}$$

$$F = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ , \ \begin{cases} 8x_1 - 20x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}\right\}$$

$$G_\alpha = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ \begin{cases} 3x = y \\ \alpha t = 5t \end{cases}\right\} \qquad H_m = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ \begin{cases} 3x - y - 6t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \\ 4x + mz - 2t = 0 \end{cases}\right\}$$

Exercice 15.24

Donner le rang des familles suivantes :

1. dans $\mathbb{R}^3$: $U = ((1,1,1),(1,2,3),(3,2,1))$
2. dans $\mathbb{R}^4$: $V = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0))$.
3. dans $\mathbb{R}^4$: $W = ((1,1,1,1),(2,0,2,3),(5,4,0,2),(9,0,0,-1),(8,6,4,2))$

Exercice 15.25

Soit $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ ,\ a+b = c+d\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
2. Déterminer une base de F
3. Soit $G = \mathrm{Vect}((1,3,2,-1),(3,1,3,-2),(5,1,9,-3))$. Déterminer la dimension et une base de G
4. Déterminer $F \cap G$.
5. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$

Exercice 15.26

On considère $u = (4,8,-4)$, $v = (-2,1,3)$ et $w = (1,\alpha,1)$.

1. Déterminer α pour que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les coordonnées du vecteur $(3,2,1)$ dans cette base.

Exercice 15.27

On considère $a \in \mathbb{R}$ et $u_1 = (2,1,4,5)$, $u_2 = (3,4,1,1)$, $u_3 = (a,11,-1,-2)$.

1. Déterminer une base et la dimension de $G_a = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de G_a.

Exercice 15.28

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u = (3,-4,1,k,2)$, $v = (k-2,1,1,-1,1)$, $w = (4,-3,2,2,3)$. Déterminer, en fonction de k une base et la dimension de F.

Exercice 15.29

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

Exercice 15.30

Soit (a,b,c) une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(a+b+c, a+b, 2a+b-c)$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 15.31

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ ,\ \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-2y+3z-5t = 0 \end{cases}\right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}((1,-2,0,2),\ (0,0,1,3)).$$

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^4 = F + G.$$
2. Trouver une base (e_1,e_2,e_3,e_4) de $\mathbb{R}^4$ telle que $\{e_1,e_2\} \subset F$ et $\{e_3,e_4\} \subset G$.

3. Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.

Exercice 15.32

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs suivants :

$$e_0 = (2,3,0,1,2),\ e_1 = (3,0,1,2,3),\ e_2 = (0,1,2,3,0),\ e_3 = (1,2,3,0,1),\ e_4 = (-1,4,1,2,-1).$$

1. La famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ est-elle libre ? Trouver une base de $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^5$.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_0,e_1,e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3,e_4)$. Trouver des bases de F, G, $F+G$ et $F\cap G$.

Exercice 15.33

1. Soit $u = (-4,4,3)$, $v = (-3,2,1)$, $s = (-1,2,2)$ et $t = (-1,6,7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(s,t)$
2. Soit $u = (1,2,-1)$, $v = (3,-1,2)$, $s = (1,3,-1)$ et $t = (2,-2,3)$. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(u,v)\cap \mathrm{Vect}(s,t)$.

Exercice 15.34

Déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ engendré par $(1,0,0,1),(0,1,1,0),(2,2,2,2)$

Réponses

Réponse de l'exercice 15.1

— A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet A n'est pas stable par multiplication externe :
On a par exemple $(0,2)\in A$ mais $-1\cdot(0,2) = (0,-2)\notin A$

— B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet B n'est pas stable par addition :
On a par exemple $(0,1)\in B$ et $(1,0)\in B$ mais $(1,0)+(0,1) = (1,1)\notin B$

— C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Prouvons le :

  (i) $(0,0)\in C$ (en effet on a bien $0=0$)

  (ii) Soit $u=(x,y)\in C$, $v=(x',y')\in C$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a alors $u+\lambda\cdot v = (x+\lambda x', y+\lambda y')$. De plus $x=x'$ et $y=y'$, d'où $x+\lambda x' = y+\lambda y'$, c'est-à-dire $u+\lambda\cdot v\in C$

  C est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

— D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\notin D$

— E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet E n'est pas stable par addition :
On a par exemple $(1,1)\in E$ et $(1,-1)\in E$ mais $(1,1)+(1,-1) = (2,0)\notin E$

— Remarquons d'abord que $F = \{(0,0)\}$. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (on a vu en cours que $\{0_E\}$ est toujours un sous-espace vectoriel de E)

Réponse de l'exercice 15.2

1. On a $0_{\mathbb{R}^3}\in F$ (en effet $0+0-0=0$).
Soit $u=(x,y,z)\in F$, $v=(x',y,',z')\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $u+\lambda\cdot v = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ et on a

$$(x+\lambda x') + (y+\lambda y') - (z+\lambda z') = x+y+-z+\lambda(x'+y'-z') = 0$$

D'où $u + \lambda \cdot v \in F$.
F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On peut remarquer que

$$G = \{(a-b, a+ba-3b)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a\cdot(1,1,1)+b\cdot(-1,1,-3)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,1),(-1,1,-3))$$

G est l'espace vectoriel engendré par la famille $((1,1,1),(-1,1,-3))$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On a
$$F \cap G = \{(a-b, a+b, a-3b)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } (a-b)+(a+b)-(a-3b)\}$$
C'est-à-dire
$$F \cap G = \{(a-b, a+b, a-3b)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } b = -\frac{a}{3}\}$$
et donc
$$F \cap G = \left\{(\frac{4a}{3}, \frac{2a}{3}, 2a)\ ,\ a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)\right)$$
Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Réponse de l'exercice 15.3

— On peut prouver que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en vérifiant que A contient $0_{\mathbb{R}^3}$, est stable par addition et produit externe mais on va ici adopter une approche plus rapide.
On a
$$A = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4\ ,\ a = 2c\} = \{(2c,b,c,d)(b,c,d) \in \mathbb{K}^3\} = \{b\cdot(0,1,0,0)+c\cdot(2,0,1,0)+d\cdot(0,0,0,1)\ ,\ (b,c,d) \in$$
Ainsi $A = \mathrm{Vect}((0,1,0,0),(2,0,1,0),(0,0,0,1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.

— On a
$$B = \{(x, 2x-y, y, x+2y)\ ,\ (x,y) \in \mathbb{K}^2\} = \{x\cdot(1,2,0,1)+y\cdot(0,-1,1,2)\ ,\ (x,y) \in \mathbb{K}^2\} = \mathrm{Vect}((1,2,0,1),(0,-1,1,$$
B est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$

— C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$. En effet C n'est pas stable par addition : On a $(0,1,0,0) \in C$ et $(-2,1,0,0) \in C$ mais $(-2,2,0,0) \notin C$ puisque $(-2)^2 + 2 \times (-2) \times 2 \neq 0$.

— On a
$$D = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4\ ,\ a+b = c\} = \{(a,b,a+b,d)\ ,\ (a,b,d) \in \mathbb{K}^3\} = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1))$$
Ainsi D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$

Réponse de l'exercice 15.4

La famille $((1,x,2),(-1,8,x),(1,2,1))$ est liée s'il existe des réels (a,b,c) non tous nuls tels que $a \cdots (1,x,2) + b\cdot(-1,8,x) + c\cdot(1,2,1) = 0$. C'est-à-dire si le système suivant admet d'autres solutions que $(0,0,0)$

$$\mathcal{S} \qquad \begin{cases} a-b+c=0 \\ xa+8b+2c=0 \\ 2a+xb+c=0 \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire compatible (car homogène) de 3 équations à 3 inconnues. On sait qu'il admet alors une unique solution (forcément $(0,0,0)$) s'il est de rang 3 et une infinité de solution (donc au moins une solution qui n'est pas $(0,0,0)$) s'il est de rang strictement inférieur à 3. Il nous faut donc déterminer à quelle condition sur x, notre système est de rang strictement inférieur à 3.

Pour cela on va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss. On va autant que possible essayer d'éviter des pivots contenant x et on ne multipliera pas une ligne par une quantité dépendant de x qui pourrait donc être nulle.

$$\mathcal{S} \qquad \begin{cases} a-b+c=0 \\ xa+8b+2c=0 \\ 2a+xb+c=0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - xL_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ (8+x)b+(2-x)c=0 \\ (x+2)b-c=0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 6b+(3-x)c=0 \\ (x+2)b-c=0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{x+2}{6}L_2$

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 6b+(3-x)c=0 \\ \left(-1-\dfrac{(3-x)(x+2)}{6}\right)c=0 \end{cases}$$

On voit alors que $\mathcal{S}$ est de rang strictement inférieur à 3 si et seulement si $-1-\dfrac{(3-x)(x+2)}{6}=0$
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$-1-\frac{(3-x)(x+2)}{6}=\frac{x^2-x-12}{6}=\frac{(x-4)(x+3)}{6}$$

Ainsi $\mathcal{S}$ est de rang strictement inférieur à 3 si et seulement si $x \in \{-3,4\}$.
Ce qui signifie que la famille $((1,x,2),(-1,8,x),(1,2,1))$ est liée si et seulement si $x \in \{-3,4\}$.

Réponse de l'exercice 15.5

1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0$. Montrons qu'alors $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
   On a $(\lambda_1+\lambda_3, 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3, \lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0,0,0)$ D'où

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On a donc bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

2. Il nous faut trouver ici des équations qui caractérisent $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ Un argument de dimension (on verra cette notion dans les prochains cours) nous indique qu'il nous faut trouver deux équations linéaires indépendantes.
   On cherche donc $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ et $(f, g, h, i, j) \in \mathbb{R}^5$ tels que

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \text{ , } \begin{cases} ax_1 + bx_2 + c_3 + dx_4 + ex_5 = 0 \\ fx_1 + gx_2 + hx_3 + ix_4 + jx_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

   Il faut qu'en particulier les équations soient vérifiées par u_1, u_2 et u_3. On obtient donc

$$\begin{cases} a + 2b + d + e = 0 \\ b + c + d + e = 0 \\ a + 4b + c + 2d + e \end{cases} \qquad \begin{cases} f + 2g + i + j = 0 \\ g + h + i + j = 0 \\ f + 4g + h + 2i + j = 0 \end{cases}$$

   Notre problème revient alors à résoudre le système $\begin{cases} a + 2b + d + e = 0 \\ b + c + d + e = 0 \\ a + 4b + c + 2d + e = 0 \end{cases}$

   $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{cases} a + 2b + d + e = 0 \\ b + c + d + e = 0 \\ 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

   $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$
   $L_3 \leftarrow -L_3$

$$\begin{cases} a + 2b + d + e = 0 \\ b + c + d + e = 0 \\ c + d + 2e = 0 \end{cases}$$

   $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\begin{cases} a+2b+d+e=0 \\ b-e=0 \\ c+d+2e=0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\begin{cases} a+d+3e=0 \\ b-e=0 \\ c+d+2e=0 \end{cases}$$

On peut alors prendre $d=-1$ et $e=0$ ce qui donne $(1,0,1,-1,0)$ et donc l'équation $x_1+x_3-x_4=0$. On peut également prendre $d=0$ et $e=-1$ ce qui donne $(3,-1,2,0,-1)$ et donc l'équation $3x_1-x_2+2x_3-x_5=0$.
On obtient deux équation indépendantes (i.e. le rang du système qu'elle forment est égal au nombres d'équations).
On va pour le moment admettre que l'on a bien

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ , \ \begin{cases} x_1+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_5=0 \end{cases} \right\}$$

On verra des arguments permettant une preuve plus rigoureuse de cet exercice par la suite.

Réponse de l'exercice 15.6

Pour montrer que la famille (u,v,w) engendre $\mathbb{R}^3$ on va montrer qu'elle engendre $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ car alors on aurait $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \subset \mathrm{Vect}(u,v,w)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{Vect}(u,v,w)$

On a

$$(1,0,0) = \frac{1}{4}(u+v-w)$$
$$(0,1,0) = \frac{5}{8}u - \frac{3}{8}v - \frac{1}{8}w$$
$$(0,0,1) = \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}v + \frac{3}{8}w$$

Ainsi on a bien $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.

Réponse de l'exercice 15.7

Si $\mathrm{Vect}(u,v) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ ax+by+cz=0\}$ alors en particulier $a+2b-c=0$ et $-6a+2c=0$. D'où $c=3a$ et $a=b$. Par exemple $a=1, b=1$ et $c=3$ convient.

Soit $w \in \mathrm{Vect}(u,v)$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$, d'où $w = (\lambda - 6\mu, 2\lambda, -\lambda+2\mu)$. On a alors

$$(\lambda - 6\mu) + (2\lambda) + 3(-\lambda+2\mu) = 0$$

Ainsi on a

$$\mathrm{Vect}(u,v) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x+y+3z=0\}$$

Réponse de l'exercice 15.8

Il nous faut pour cela résoudre ce système. On a

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y-2\,z+t=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ -2y-3z=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{2}z+t=0 \\ -2y-3z=0. \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est alors

$$S=\left\{\left(\frac{1}{2}z-t,-\frac{3}{2}z,z,t\right),(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\right),(-1,0,0,1)\right)$$

La famille $\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\right),(-1,0,0,1)\right)$ est ainsi une famille génératrice du plan vectoriel de $\mathbb{K}^4$ d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y-2\,z+t=0. \end{array}\right.$$

Réponse de l'exercice 15.9

1. Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $0_{\mathbb{R}^3}$. Soit $u=(a,b,c)$ un vecteur directeur de D. On peut alors donner une représentation paramétrique de D

$$D=\{(at,bt,ct)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(a,b,c)$$

   D est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant $0_{\mathbb{R}^3}$. Soit $u=(a,b,c)$ et $v=(d,e,f)$ une base de P. On peut alors donner une représentation paramétrique de P

$$P=\{(at+ds,bt+es,ct+fs)\ ,\ (t,s)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(u,v)$$

   P est ainsi bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Réponse de l'exercice 15.10

1. Une fois n'est pas coutume nous allons vérifier les huit propriétés définissant un espace vectoriel. La quasi-totalité des propriétés à vérifier sont en réalité évidente par construction.
   Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. On définit la suite $u+v$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}(u+v)_n=u_n+v_n$$

   1/a) L'addition est associative :
   Il est assez évident, de par l'associativité de l'addition sur $\mathbb{R}$ que l'on a bien $(u+v)+w=u+(v+w)$

   1/b) L'addition est commutative.
   Là encore cela découle de manière assez claire des propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles on a bien $u+v=v+u$

1/c) Il existe un élément neutre additif.
On définit la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}\ quada_n = 0$$
Il est alors clair que, pour tout suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a bien $u + a = a + u = u$. a est donc le neutre additif de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on le notera $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ par la suite

1/d) Existence d'un opposé.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -u_n$$
Il est aisé de vérifier que $u + v = v + u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. v est donc l'opposé de u pour l'addition. On la notera $-u$ dorénavant.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $\lambda \cdot u$ par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\lambda \cdot u)_n = \lambda \times u_n$$

2/a) Le produit externe est distributif sur l'addition de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Il est assez clair, de par les propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$ que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles alors on a $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

2/b) Le produit externe est distributif sur l'addition de $\mathbb{R}$
Là encore c'est assez évident que, si λ et μ sont deux réels et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle alors $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

2/c) Le produit externe est distributif sur la multiplication de $\mathbb{R}$
Il est clair de par la définition que, si λ et μ sont deux réels et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle alors $(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

2/d) L'unité de $\mathbb{R}$ est respecté.
Par définition du produit on a bien, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, $1\ cdotu = u$

Ainsi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bien un espace vectoriel.

Prouver qu'un ensemble classique sur lequel on a l'habitude de travailler est une opération fastidieuse qui ne recèle en réalité aucune difficulté mathématique. Dans la plupart des problèmes cette étape donnée comme admise par l'énoncé.

2. — A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet la suite nulle est bornée. La somme de deux suites bornées est bornée : Si u et v sont deux suites bornées, il existe alors $R > 0$ et $R' > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant R \qquad |v_n| \leqslant R'$$
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N} |u_n + v_n| \leqslant R + R'$$
La suite $u + v$ est donc bien bornée. De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la suite $\lambda \cdot u$ est bornée (par $|\lambda|\mathbb{R}$)

— B n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet B n'est pas stable par addition : La suite u définie par $u_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est croissante. La suite v définie par $v_n = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ est décroissante mais la suite $u + v$ vérifie $(u + v)_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$ et n'est donc pas monotone.

— C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet la suite nulle est convergente. La somme de deux suites convergentes est convergente et le produit d'une suite convergente par un réel est encore une suite convergente

— $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique } \}$. On peut écrire

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \exists r \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = u_n + r\}$$

S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet la suite nulle est arithmétique (de raison 0). La somme de deux suites arithmétique de raison respectives r et r' est encore une suite arithmétique de raison $r + r'$ et le produit d'une suite arithmétique de raison r par un réel λ est une suite arithmétique de raison λr.

Réponse de l'exercice 15.11

On a

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \right\}$$

D'où

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi $A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est donc en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Réponse de l'exercice 15.12

— On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$ et donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$
— Soit $u \in F + G$, $v = F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$ tels que $v = v_1 + v_2$. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E on a $u_1 + \lambda \cdot v_1 \in F$ et $u_2 + \lambda \cdot v_2 \in G$
Ainsi $u + \lambda \cdot v = u_1 + u_2 + \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 = (u_1 + \lambda \cdot v_1) + (u_2 + \lambda \cdot v_2) \in F + G$.

$F + G$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

Réponse de l'exercice 15.13

1. On a $F_1 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} = \{(x, x, \cdots, x) \ , \ x \in \mathbb{R}) = \text{Vect}((1, 1, \cdots, 1))$.
   F_1 est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
2. On a $F_2 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ x_2 = 0\}$
   F_2 contient bien $(0, 0, \cdots, 0 = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   Soit $u = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in F_2$, $v = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ On a alors $u + \lambda \cdot v = (x_1 + \lambda x'_1, x_2 + \lambda x'_2, \cdots, x_n + \lambda x'_n)$ et $x_2 + \lambda x'_2 = 0 + \lambda \times 0 = 0$. Ainsi $u + \lambda \cdot v \in F_2$. F_2 est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
3. On a $F_3 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ x_2 = 1\}$. F_3 ne contient pas $0_{\mathbb{R}^n}$, il ne s'agit donc pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. On a $F_4 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$
   F_2 contient bien $(0, 0, \cdots, 0 = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Soit $u = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in F_2$, $v = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ On a alors $u + \lambda \cdot v = (x_1 + \lambda x'_1, x_2 + \lambda x'_2, \cdots, x_n + \lambda x'_n)$ et

$$x_1 + \lambda x'_1 + x_2 + \lambda x'_2 + \cdots x_n + \lambda x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \lambda(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n) = 0 + \lambda \times 0 = 0$$

Ainsi $u + \lambda \cdot v \in F_4$. F_4 est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

5. On a $F_5 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$.
   F_5 ne contient pas $0_{\mathbb{R}^n}$, il ne s'agit donc pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Réponse de l'exercice 15.14

1. $\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. En effet $\mathbb{Z}$ n'est pas stable par multiplication externe :
   On a $1 \in \mathbb{Z}$ mais $\dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$. En effet dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel on a $\mathbb{R} = \text{Vect}(1)$.
3. $\mathbb{R}$ n'est par contre pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}$. En effet on a $1 \in \mathbb{R}$ mais $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. En effet on a $1 \in \mathbb{U}$ mais $2 \cdot 1 = 2 \notin \mathbb{U}$.
5. $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. En effet on a $1 \in B$ mais $2 \cdot 1 = 2 \notin B$.
6. Soit F un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Supposons que $F \neq \{0\}$. Il existe alors $u \in \mathbb{C}$ avec $u \neq 0$. Soit alors $z \in \mathbb{C}$. Comme F est stable par multiplication externe on a alors $\dfrac{z}{u} \cdot u \in F$, c'est-à-dire $\dfrac{zu}{u} = z \in F$.
   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $z \in F$. C'est-à-dire $F = \mathbb{C}$.
   $\{0\}$ et $\mathbb{C}$ sont donc bien les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
7. Les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$ et les $\alpha\mathbb{R} = \{\alpha x \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
   Cette affirmation est vraie, elle se prouve exactement de la même manière que l'on a prouvé que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$ et les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2}$

Réponse de l'exercice 15.15

1. dérivables sur $[-1, 1]$; Vrai, il a été vu dans les années précédentes que la fonction nulle est dérivable, la somme de deux fonctions dérivables est dérivable et le produit d'une fonction dérivable par un réel est dérivable .
2. bornées sur $[-1, 1]$; Vrai, cela se prouve de la même manière que pour les suites bornées dans l'exercice 5.
3. telles que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} f(x) \leq 1$; Faux, Cet ensemble n'est pas stable par produit externe : la fonction $f : x \mapsto 1$ appartient à cet ensemble mais $2 \cdot f$ n'appartient pas à l'ensemble.
4. telles que $f(1) = 0$; Vrai, cet ensemble contient bien la fonction nulle, il est stable par addition et produit externe (cela découle des deux faits assez simples que sont $(f+g)(0) = f(0)+g(0)$ et $(\lambda \cdot f)(0) = \lambda \times f(0)$)
5. paires ; Vrai, la fonction nulle est paire, la somme de deux fonctions paires est paire (car $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x)$) et le produit d'une fonction paire par un réel est encore une fonction paire.
6. impaires ; Vrai, l'argument est le même que précédemment
7. paires ou impaires ; Faux, cet ensemble n'est pas stable par addition : la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, la fonction $x \mapsto x^2$ est paire mais la fonction $x \mapsto x^3 + x^2$ n'est ni paire ni impaire (on a en fait prouvé en début d'année que toute fonction réelle peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire)

8. croissantes sur $[-1,1]$; Faux, cet ensemble n'est pas stable par produit externe. En effet la fonction $f : x \mapsto x$ est croissante mais $-f$ n'est pas une fonction croissante.
9. monotones sur $[-1,1]$. Faux, cet ensemble n'est pas stable par addition : la fonction $f : x \mapsto x + \cos(x)$ est croissante, la fonction $g : x \mapsto -x$ est décroissante mais $f+g$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Réponse de l'exercice 15.16

Si $U \subset V$ alors $U \cup V = V$, si $V \subset U$ alors $U \cup V = U$. Dans les deux cas $U \cup V$ est évidemment un sous-espace vectoriel de E.

Réciproquement, supposons que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E. Supposons que U n'est pas inclus dans V, et montrons alors que $V \subset U$. Soit $u \in U \backslash V$. Soit $v \in V$. Alors $v \in U \cup V$ et $u \in U \cup V$. Donc $u+v \in U \cup V$. $u \notin V$. Or $u = (u+v) + (-v)$. Donc $u+v \notin V$ (sinon on aurait $u \in V$). Donc $u+v \in U$. Ainsi $v = (u+v) + (-u) \in U$. On a montré que $V \subset U$.

Réponse de l'exercice 15.17

Il s'agit de prouver qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = a \cdot u + b \cdot y$. Il nous faut donc trouver (a,b) solution de

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2 \\ 7a = 3 \\ -7b = -1 \end{cases}$$

Il est aisé de voir que $\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ est solution de ce système et que donc

$$x = \frac{3}{7} \cdot y + \frac{1}{7} \cdot z$$

Réponse de l'exercice 15.18

1. Pour montrer que $\mathcal{F}$ engendre $\mathbb{K}^2$ il suffit de montrer qu'elle engendre les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ car alors $\mathcal{F}$ engendre $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{K}^2$

   On a $(1,0) = \dfrac{1}{4} \cdots (3,1) + \dfrac{1}{4}(1,-1)$ et $(0,1) = (-1,2) + (1,-1)$. Ainsi $(1,0) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $(0,1) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ d'où $\mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

   On va montrer que la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre. Pour cela on va montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que

   $$\lambda_1(3,1) + \lambda_2(-1,2) + \lambda_3(1,-1) = (0,0)$$

   c'est-à-dire $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ solution du système

   $$\mathcal{S} \ : \ \begin{cases} 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   On applique l'algorithme du pivot de Gauss à $\mathcal{S}$.
   $L_1 \leftrightarrow L_2$
   $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

   $$\mathcal{S} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -7\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On voit que, par exemple $(-1,4,7)$ est une solution de ce système, c'est-à-dire

$$-1\cdot(3,1)+4\cdot(-1,2)+7\cdot(1,-1)=(0,0)$$

La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas libre.

2. On supprime in des vecteurs de $\mathcal{F}$, par exemple $(3,1)$. On va montrer que la nouvelle famille $((-1,2),(1,-1))$ est encore génératrice.
   On a $(1,0)=(-1,2)+2\cdot(1,-1)$ et $(0,1)=(-1,2)+(1,-1)$. Ainsi $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1))=\mathbb{K}^2$
   Montrons que cette nouvelle famille est libre. Pour cela montrons que l'unique couple (λ_1,λ_2) tel que $\lambda_1\cdot(-1,2)+\lambda_2\cdot(1,-1)=(0,0)$
   On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1\cdot(-1,2)+\lambda_2\cdot(1,-1)=(0,0) &\Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2=0\\ 0+\lambda_2=0\end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_2+2L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases} \qquad L_1\leftarrow L_1-L_2
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\lambda_1\cdot(-1,2)+\lambda_2\cdot(1,-1)=(0,0)\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$$

   La famille $((-1,2),(1,-1))$ est donc libre.

Réponse de l'exercice 15.19

1. La famille $\mathcal{F}=((0,1),(1,2),(3,-7)$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{K}^2$. En effet on a

$$13\cdot(0,1)-3\cdot(1,2)+(3,-7)=(0,0)\quad\text{et}\quad(13,-3,1)\neq(0,0,0)$$

2. La famille $\mathcal{G}=((-5,2))$ est libre. En effet une famille composée d'un seul vecteur est toujours libre.
3. On ajoute à $\mathcal{G}$ un des vecteurs de $\mathcal{F}$, par exemple $(0,1)$. Montrons que cette nouvelle famille est libre On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1\cdot(-5,2)+\lambda_2\cdot(0,1)=(0,0) &\Leftrightarrow \begin{cases}-5\lambda_1=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases} \qquad L_1\leftarrow -\frac{1}{5}L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_2-2L_1
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\lambda_1\cdot(-5,2)+\lambda_2\cdot(0,1)=(0,0)\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$$

   La famille $((-5,2),(0,1))$ est donc libre.

Réponse de l'exercice 15.20

On déterminer s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1(X^3+4X^2-2X+3)+\lambda_2(X^3+6X^2-X+4)+\lambda_3(3X^3+8X^2-8X+7)=0$$

On a

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(X^3+4X^2-2X+3)+\lambda_2(X^3+6X^2-X+4)+\lambda_3(3X^3+8X^2-8X+7)=0\\
&\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)X^3+(4\lambda_1+6\lambda_2+8\lambda_3)X^2+(-2\lambda_1-\lambda_2-8\lambda_3)X+(3\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\ 4\lambda_1+6\lambda_2+8\lambda_3=0\\ -2\lambda_1-\lambda_2-8\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\ 2\lambda_2-4\lambda_3=0\\ \lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_2-2\lambda_3=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+5\lambda_3=0\\ \lambda_2-2\lambda_3=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Le triplet $(-5, 2, 1)$ est, par exemple, solution de ce système, on a ainsi

$$-5(X^3+4X^2-2X+3)+2(X^3+6X^2-X+4)+(3X^3+8X^2-8X+7)=0$$

La famille $(X^3+4X^2-2X+3, X^3+6X^2-X+4, 3X^3+8X^2-8X+7)$ n'est donc pas libre, elle est liée.

Réponse de l'exercice 15.21

1. Soit $u=(3,-1)$ et $v=(1,2)$. Montrons d'abord que la famille (u,v) est génératrice de $\mathbb{K}^2$. On a

$$(1,0)=\frac{1}{7}(2u+v)=\frac{2}{7}u+\frac{1}{7}v$$

$$(0,1)=\frac{1}{7}(3v-u)=-\frac{1}{7}u+\frac{3}{7}v$$

Ainsi $(1,0)\in \mathrm{Vect}(u,v)$ et $(0,1)\in \mathrm{Vect}(u,v)$. D'où $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1))\subset \mathrm{Vect}(u,v)$. C'est-à-dire $\mathbb{K}^2\subset \mathrm{Vect}(u,v)$. Comme $u\in\mathbb{K}^2$ et $v\in\mathbb{K}^2$ on a de manière évidente $\mathrm{Vect}(u,v)\subset\mathbb{K}^2$ et finalement

$$\mathrm{Vect}(u,v)\mathbb{K}^2$$

La famille (u,v) est donc génératrice dans $\mathbb{K}^2$. On sait de plus que K^2 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. La famille (u,v) est alors une famille de cardinal 2 génératrice d'un espace vectoriel de dimension 2. C'est donc une base de $\mathbb{K}^2$.
On a

$$\begin{aligned}
Mat_{(u,v)}(x) &= Mat_{(u,v)}((5,-2)) \\
&= Mat_{(u,v)}(5\cdot(1,0)+(-2)\cdot(0,1)) \\
&= 5Mat_{(u,v)}(1,0)) + (-2)Mat_{(u,v)}((0,1)) \\
&= 5\begin{pmatrix}\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7}\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\times\frac{2}{7} + (-2)\times\left(-\frac{1}{7}\right) \\ 5\times\frac{1}{7} + (-2)\times\frac{3}{7}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{12}{7} = \\ -\frac{1}{7}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$Mat_{(u,v)}(x) = \begin{pmatrix}\frac{12}{7} \\ -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

2. (a) Soit $u=(1,2,3)$ et $v=(3,2,1)$. La famille (u,v) est une famille de cardinal 2. $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, toutes ses bases sont donc de cardinal 3. Il est ainsi impossible que la famille (u,v) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Soit $F=\mathrm{Vect}(u,v)$. Pour obtenir la dimension de F il nous faut calculer le rang de la famille (u,v). Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(u,v) = \begin{pmatrix}1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

On va calculer le rang de cette matrice par la méthode du pivot de Gauss
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 2, ainsi $\mathrm{Rang}(u,v)=2$, c'est-à-dire $\dim(F)=2$.
(u,v) est une famille génératrice de cardinal 2 de F qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. La famille (u,v) est donc une base de F .

(c) Le vecteur $x = (1,4,7)$ appartient à F s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et v, c'est-à-dire s'il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$.
Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
x = \lambda \cdot u + \mu \cdot v \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 1 \\ 2\lambda + 2\mu = 4 \\ 3\lambda + \mu = 7 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 1 \\ -4\mu = 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -8\mu = 4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 1 \\ \mu = -\frac{1}{2} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ \mu = -\frac{1}{2} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{8}L_3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \mu = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi x appartient bien à F et dans F, on a

$$Mat_{(u,v)}(x) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) Le vecteur $y = (-1,6,9)$ appartient à F s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et v, c'est-à-dire s'il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$.
Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
x = \lambda \cdot u + \mu \cdot v \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = -1 \\ 2\lambda + 2\mu = 6 \\ 3\lambda + \mu = 9 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = -1 \\ -4\mu = 8 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -8\mu = 12 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 1 \\ \mu = -2 \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ 0 = -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système est incompatible et n'a donc pas de solutions.
Ainsi y n'appartient pas à F.

3. (a) Soit $u = (2,5)$, $v = (-3,2)$ et $w = (3,1)$. La famille (u,v,w) est une famille de cardinal 3. $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, toutes ses bases sont donc de cardinal 2. Il est ainsi impossible que la famille (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^2$

(b) On sait que de toute famille génératrice on peut extraire une base. Montrons qu'ici la famille (v, w) est une base de $\mathbb{R}^2$.
On a $(1,0) = \frac{1}{9}(2w - v)$ et $(0,1) = \frac{1}{3}(v + w)$. La famille (v, w) est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, la famille (v, w) est une base de $\mathbb{R}^2$

(c) On a

$$Mat_{(v,w)}((5,-2)) = 5Mat_{(v,w)}((1,0)) - 2Mat_{(v,w)}((0,1)) = 5\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} + -2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 15.22

On sait que $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. La famille (u, v, w) étant de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice.

On va ici montrer qu'elle est génératrice (ce qui, de plus, nous aidera pour répondre à la question suivante)

On a $(1,0,0) = \frac{1}{2}(u + w)$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(u + v)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(v + w)$. La famille (u, v, w) engendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On a de plus

$$Mat_{(u,v,w)}((2,1,3)) = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 15.23

— On a

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ 2x - y - 3z = 0\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = \frac{y}{2} + \frac{3z}{2}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{y}{2} + \frac{3z}{2}, y, z\right) \ , \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + z\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) \ , \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)\right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)\right)$ est ainsi une famille génératrice de A. Montrons qu'elle est aussi libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \mu \cdot \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$

On a alors le système $\begin{cases} \frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ qui, de manière claire, a $(0,0)$ pour unique solution. La famille (u, v) est donc libre.

La famille (u, v) est donc une famille libre et génératrice de A. C'est ainsi une base de A et, puisque A admet une base de cardinal 2, $\dim(A) = 2$.

— On a

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{cases} \right\} \\
&== \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \right\} \quad L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases} \right\} \\
&= \{(-2z,z,z) \ , \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((-2,1,1))
\end{aligned}
$$

La famille $(-2,1,1)$ est une famille génératrice de E, c'est également une famille libre car elle constitué d'un seul vecteur et celui-ci est non-nul. C'est donc une base de E qui, par conséquent, est un espace vectoriel de dimension 1.

— On a

$$
F = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ , \ \begin{cases} 8x_1-20x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+x_4=0 \\ 5x_1+6x_2-4x_4=0 \end{cases} \right\}
$$

Résolvons le système

$$
\mathcal{S} : \qquad \begin{cases} 8x_1-20x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+x_4=0 \\ 5x_1+6x_2-4x_4=0 \end{cases}
$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_1$
$L_2 \leftarrow L_2-3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3-5L_1$

$$
\mathcal{S} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1-\frac{5}{2}x_4=0 \\ 6x_2+\frac{17}{2}x_4=0 \\ 6x_2+\frac{17}{2}x_4=0 \end{cases}
$$

$L_3 \leftarrow L_3-L_2$
$l_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$

$$
\mathcal{S} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1-\frac{5}{2}x_4=0 \\ x_2+\frac{17}{12}x_4=0 \\ 0=0 \end{cases}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
F &= \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ , \ \begin{cases} x_1=\frac{5}{2}x_4 \\ x_2=-\frac{17}{12}x_4 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \left(\frac{5}{2}x_4, -\frac{17}{12}x_4, x_3, x_4, x_5\right) \ , \ (x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^3 \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \text{Vect}\left(\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{12}, 0, 1, 0\right), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\right)$$

La famille $\left(\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{12}, 0, 1, 0\right), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\right)$ est ainsi une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est aussi libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{12}, 0, 1, 0\right) + \beta(0,0,1,0,0) + \gamma(0,0,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^5}$

On a alors le système $\begin{cases} \frac{5\alpha}{2} = 0 \\ -\frac{17\alpha}{12} = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ qui, de manière claire, a $(0,0,0)$ pour unique solution. La famille $\left(\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{12}, 0, 1, 0\right), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\right)$ est donc libre.

La famille $\left(\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{12}, 0, 1, 0\right), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\right)$ est ainsi une famille libre et génératrice de F. C'est donc une base de F et, puisque F admet une base de cardinal 3, $\dim(A) = 3$.

— On a

$$G_\alpha = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} 3x = y \\ \alpha t = 5t \end{cases}\right\}$$

On va distinguer deux cas :

- Si $\alpha = 5$ alors

$$\begin{aligned} G_5 &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} 3x = y \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,3x,z,t)\ ,\ (x,z,t) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \text{Vect}((1,3,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)) \end{aligned}$$

  La famille $((1,3,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ est une famille génératrice de G_5. Il est aisé de vérifier qu'elle est également libre. C'est donc une base de G_5 qui, par conséquent est de dimension 3.

- Si $\alpha \neq 5$, alors

$$\begin{aligned} G_5 &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} 3x = y \\ t = 0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,3x,z,0)\ ,\ (x,z,t) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \text{Vect}((1,3,0,0),(0,0,1,0)) \end{aligned}$$

  La famille $((1,3,0,0),(0,0,1,0))$ est une famille génératrice de G_α. Il est aisé de vérifier qu'elle est également libre. C'est donc une base de G_α qui, par conséquent est de dimension 2.

— On a

$$H_m = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} 3x - y - 6t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \\ 4x + mz - 2t = 0 \end{cases}\right\}$$

On va résoudre le système

$$\mathcal{S}_m : \qquad \begin{cases} 3x - y - 6t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \\ 4x + mz - 2t = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

$$\mathcal{S}_m \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 4z - 2t = 0 \\ -4y - 12z = 0 \\ -4y + (m-16)z + 6t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{4}L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$

$$\mathcal{S}_m \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 4z - 2t = 0 \\ y + 3z = 0 \\ (m-4)z + 6t = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_m$ a alors pour solution $\left\{ \left(\dfrac{m-7}{3}z, -3z, z, \dfrac{m-4}{6}z \right) \ , \ z \in \mathbb{R} \right\}$
C'est-à-dire

$$H_m = \left\{ \left(\frac{m-7}{3}z, -3z, z, \frac{m-4}{6}z \right) \ , \ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left(\frac{m-7}{3}, -3, 1, \frac{m-4}{3} \right) \right)$$

Quelle que soit la valeur de m, la famille $\left(\dfrac{m-7}{3}, -3, 1, \dfrac{m-4}{3} \right)$ est une famille libre et génératrice de H_m. Par conséquent H_m est un espace vectoriel de dimension 1.

Réponse de l'exercice 15.24

1. Soit $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}_3}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_\ni}(U)$ est de rang 3. La famille U est donc de rang 3.

2. Soit $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}_4}(V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_4}(V)$ est de rang 3. La famille V est donc de rang 3.

3. Soit $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}_4}(W) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$
$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -29 & -14 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{7}{5}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{82}{5} & -\dfrac{42}{5} \end{pmatrix}$$

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_4}(W)$ est de rang 4. La famille W est donc de rang 4.

Réponse de l'exercice 15.25

1.2. On va répondre aux questions 1. et 2. simultanément.
On a

$$\begin{aligned}F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ ,\ a+b=c+d\}\\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ ,\ a=c+d-b\}\\ &= \{(c+d-b,b,c,d)\ ,\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}\\ &= \{b\cdot(-1,1,0,0)+c\cdot(1,0,1,0)+d\cdot(1,0,0,1)\ ,\ (b,c,d)\in\mathbb{R}^4\}\\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))\end{aligned}$$

Ainsi F est l'espace vectoriel engendré par la famille $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$ et, à ce titre, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Montrons maintenant que la famille $(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)$ est une base de F. On pourrait vérifier qu'elle est libre mais on va ici montrer que cette famille est de rang 3.
Dans ce cas F sera de dimension 3 et $(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)$ sera une famille de cardinal 3 génératrice d'un espace vectoriel de dimension 3 donc une base de cet espace.
Dans la base canonique notée $\mathcal{B}$ on a

$$Mat_{\mathcal{B}}((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftrightarrow L_4$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

La famille $(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)$ est bien de rang 3. Ainsi F est de dimension 3 et $(-1,1,0,0),(1,0,1,0),$ est une famille de cardinal 3 génératrice d'un espace vectoriel de dimension 3 donc une base de cet espace.

3. On va déterminer la dimension de G en calculant le rang de la famille $((1,3,2,-1),(3,1,3,-2),(5,1,9,-3))$.
On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(((1,3,2,-1),(3,1,3,-2),(5,1,9,-3)) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 9\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & -14 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 8L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{5} L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille $((1,3,2,-1),(3,1,3,-2),(5,1,9,-3))$ est de rang 3. Ainsi G est de dimension 3 et $((1,3,2,-1),(3,1,3,-$ est une famille de cardinal 3 génératrice d'un espace vectoriel de dimension 3 donc une base de cet espace G.

4. On a $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ , \ a+b = c+d\}$ et

   $G = \mathrm{Vect}((1,3,2,-1),(3,1,3,-2),(5,1,9,-3)) = \{(\alpha+3\beta+5\gamma, 3\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+3\beta+9\gamma, -\alpha-2\beta-3\gamma) \ , \ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$

   D'où

   $$\begin{aligned} F \cap G = \{(\alpha+3\beta+5\gamma, 3\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+3\beta+9\gamma, -\alpha-2\beta-3\gamma) \ , \ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ , \\ (\alpha+3\beta+5\gamma)+(3\alpha+\beta+\gamma) = (2\alpha+3\beta+9\gamma)+(-\alpha-2\beta-3\gamma)\} \end{aligned}$$

   C'est-à-dire

   $$F \cap G = \{(\alpha+3\beta+5\gamma, 3\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+3\beta+9\gamma, -\alpha-2\beta-3\gamma) \ , \ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \alpha = -\beta\}$$

   D'où

   $$F \cap G = \{(-2\alpha+5\gamma, 2\alpha+\gamma, -\alpha+9\gamma, \alpha-3\gamma) \ , \ (\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \} = \mathrm{Vect}((-2,2,-1,1),(5,1,9,-3))$$

5. On a obtenu $F \cap G = \mathrm{Vect}((-2,2,-1,1),(5,1,9,-3))$. Il ne nous reste ici plus qu'à montrer que la famille $((-2,2,-1,1),(5,1,9,-3))$ est libre.
   Soit $\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot (-2,2,-1,1) + \mu \cdot (5,1,9,-3) = 0$, c'est-à-dire solution du système

   $$(S) \qquad \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 9\mu = 0 \\ \lambda - 3\mu = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 6\mu = 0 \\ 2\lambda = 0 \\ \lambda - 3\mu = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda = \mu = 0$. La famille $((-2,2,-1,1),(5,1,9,-3))$ est donc libre.
La famille $((-2,2,-1,1),(5,1,9,-3))$ est libre et génératrice dans $F \cap G$. c'est donc une base de $F \cap G$ qui est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

Réponse de l'exercice 15.26

1. Pour montrer que la famille (u,v,w) est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice.
   On sait que $F = \text{Vect}((u,v,w))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On sait de plus que $F = \mathbb{R}^3$ si et seulement si $\dim(F) = \mathbb{R}^3$.
   Il nous faut donc déterminer à quelle condition sur α la famille (u,v,w) est de rang 3. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a
   $$Mat_{\mathcal{B}}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & \alpha \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
   $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$
   $$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   $L_2 \leftrightarrow L_3$
   $$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$
   $$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 12 \end{pmatrix}$$
   On voit que la famille (u,v,w) est de rang 3 si et seulement si $\alpha \neq 12$.
   Ainsi (u,v,w) est une base si et seulement si $\alpha \neq 12$.
2. On suppose dans cette question que $\alpha \neq 12$. Il nous faut alors trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(3,2,1) = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$, c'est-à-dire tel que $(3,2,1) = (4a - 2b + c, 8a + b + \alpha c, -4a + 3b + c)$
   On va alors résoudre le système
   $$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ 8a + b + \alpha c = 2 \\ -4a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ 5b + (\alpha - 2)c = -4 \\ b + 2c = 4 \end{cases}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ b + 2c = 4 \\ 5b + (\alpha - 2)c = -4 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ b + 2c = 4 \\ (\alpha - 12)c = -24 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{12-\alpha} L_3$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ b + 2c = 4 \\ c = \dfrac{24}{12-\alpha} \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b = \dfrac{36 - 3\alpha - 24}{12-\alpha} = \dfrac{12 - 3\alpha}{12-\alpha} \\ b = \dfrac{48 - 4\alpha - 48}{12-\alpha} = -\dfrac{4\alpha}{12-\alpha} \\ c = \dfrac{24}{12-\alpha} \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a = \dfrac{12 - 3\alpha}{12-\alpha} - \dfrac{8\alpha}{12-\alpha} = \dfrac{12 - 11\alpha}{12-\alpha} \\ b = \dfrac{48 - \alpha - 48}{12-\alpha} \\ c = \dfrac{24}{12-\alpha} \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{4} L_1$

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{3 - \frac{11}{4}\alpha}{12-\alpha} \\ b = \dfrac{48 - \alpha - 48}{12-\alpha} \\ c = \dfrac{24}{12-\alpha} \end{cases}$$

D'où

$$Mat_{(u,v,w)}((3,2,1)) = \begin{pmatrix} \dfrac{3-\frac{11}{4}\alpha}{12-\alpha} \\ \dfrac{48-\alpha-48}{12-\alpha} \\ \dfrac{24}{12-\alpha} \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 15.27

Déterminons la dimension de G_a en calculant, en fonction de a, le rang de la famille (u_1, u_2, u_3). Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 4 & 11 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & a-22 \\ 0 & -15 & -45 \\ 0 & -19 & -57 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{15}L_3$
$L_4 \leftarrow -\dfrac{1}{19}L_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & a-22 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_l \leftrightarrow L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ainsi que $\text{Rang}(u_1, u_2, u_3) = 3$ si et seulement $a \neq 7$ et que $\text{Rang}(u_1, u_2, u_3) = 2$ si $a = 7$.

On peut en fait remarquer que, si $a = 7$, alors $u_3 = 3u_2 - u_1$.

Si $a \neq 7$ alors la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de cardinal 3 génératrice de G_a qui est de dimension 3. C'est donc une base de G_a.

Si $a = 7$ alors (u_1, u_2, u_3) n'est pas une base de G_a. Comme (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G_a on peut cependant en extraire une base de G_a. La relation $u_3 = 3u_2 - u_1$ donnée plus haut nous indique que $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. Comme on a de manière évidente $u_1 \in \text{Vect}(u_2, u_2)$ et $u_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, on voit que $G_a = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

La famille $(u_1; u_2)$ est alors de cardinal 2 et génératrice de G_a qui est de dimension 2. C'est donc une base de G_a.

Réponse de l'exercice 15.28

On va calculer, en fonction de k, le rang de la famille (u, v, w). Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 & k-2 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ k & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 3 & k-2 & 4 \\ k & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - kL_1$
$L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & k-5 & -2 \\ 0 & -1-k & 2-2k \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \dfrac{1}{5}L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - (k-5)L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + (1+k)L_2$
$L_5 \leftarrow L_5 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & & 3-k \\ 0 & 0 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & & 3-k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (u, v, w) est donc de rang 2 si $k = 3$ et de rang 3 si $k \neq 3$. Ainsi f est de dimension 2 si $k = 3$ et de dimension 3 si $k \neq 3$.

Si $k \neq 3$ la famille (u, v, w) est une famille de cardinal 3 génératrice de F qui est de dimension 3. C'est donc une base de F.

Si $k = 3$ la famille (u, v, w) est génératrice de F mais n'est pas une base. On peut toutefois en extraire une base de F.

Quand $k = 3$ on a $u = (3, -4, 1, 3, 2)$, $v = (1, 1, 1, -1, 1)$ et $w = (4, -3, 2, 2, 3)$. Il est aisé de voir que $w = u + v$. On a ainsi $w \in \text{Vect}(u, v)$ et donc $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$.

La famille (u, v) est alors une famille de cardinal 2 génératrice de F qui est de dimension 2. C'est donc une base de F.

Réponse de l'exercice 15.29

On a

$$\begin{aligned} E &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\} \\ &= \{aX^2 + bX + c \ , \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ , \ a + b + c = 0\} \\ &= \{aX^2 + bX + c \ , \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ , \ c = -a - b\} \\ &= \{aX^2 + bX - a - b \ , \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^2 - 1) + b(X - 1) \ , \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(X^2 - 1 \ X - 1) \end{aligned}$$

Ainsi E est l'espace vectoriel engendré par la famille $(X^2 - 1, X - 1)$ et, à ce titre, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $(X^2 - 1, X - 1)$ est une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(X^2 - 1) + \mu(X - 1) = 0$. C'est-à-dire

$$\lambda X^2 + \mu X + (-\lambda - \mu) = 0$$

On a vu dans le chapitre sur les polynômes qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Ici cela nous donne $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ -\lambda - \mu = 0 \end{cases}$. En particulier $\lambda = \mu = 0$.

La famille $(X^2 - 1, X - 1)$ est donc libre. C'est une famille libre et génératrice de E, c'est donc une base de E qui est ainsi un espace vectoriel de dimension 2.

Réponse de l'exercice 15.30

La famille $(a + b + c, a + b, 2a + b - c)$ est une famille de cardinal 3. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ on peut montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice.

Ici on va montrer qu'elle est génératrice en montrant qu'elle engendre la base (a, b, c). En effet, si la famille $(a + b + c, a + b, 2a + b - c)$ engendre la famille (a, b, c) alors elle engendre $\text{Vect}(a, b, c)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$.

On a $(a + b + c) + (2a + b - c) = 3a + 2b$ d'où

$$(a + b + c) - 2(a + b) + (2a + b - c) = a$$

$$-(a + b + c) + 3(a + b) - (2a + b - c) = b$$

$$(a + b + c) - (a + b) = c$$

Ainsi la famille $(a + b + c, a + b, 2a + b - c)$ engendre la base (a, b, c). c'est donc une famille de cardinal 3 génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Réponse de l'exercice 15.31

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On veut écrire ce vecteur comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On cherche donc $(a, b, c, d, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$(x, y, z, t) = (a, b, c, d) + \lambda.(1, -2, 0, 2) + \mu.(0, 0, 1, 3) \text{ avec } (a, b, c, d) \in F.$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - 2b + 3c - 5d = 0 \\ x = a + \lambda \\ y = b - 2\lambda \\ z = c + \mu \\ t = d + 2\lambda + 3\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2x - \frac{1}{2}y - 3z + t \\ \mu = \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y + z \\ a = 3x + \frac{1}{2}y + 3z - t \\ b = -4x - 6z + 2t \\ c = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{8}y \\ d = \frac{7}{4}x - \frac{1}{8}y + 3z - t \end{cases}$$

Il existe donc toujours $(a, b, c, d, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$(x, y, z, t) = (a, b, c, d) + \lambda.(1, -2, 0, 2) + \mu.(0, 0, 1, 3) \text{ avec } (a, b, c, d) \in F.$$

Ainsi $\mathbb{R}^4 = F + G$

2. On connait déjà une famille génératrice de G, on va donc prendre $e_3 = (1, -2, 0, 2)$ et $e_4 = (0, 0, 1, 3)$. Les vecteurs e_3 et e_4 n'étant pas colinéaires, cette famille est libre. C'est donc une base de G.
Cherchons désormais une base de F. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z + t \\ y = \frac{2}{3}z - 2t \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = z.(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{3}, 1, 0) + t.(1, -2, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}((-\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{3}, 1, 0), (1, -2, 0, 1)) \end{aligned}$$

Posons $e_1 = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1, 0)$ et $e_2 = (1, -2, 0, 1)$. On a montré que $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, c'est-à-dire que la famille (e_1, e_2) est génératrice de F. Il reste à montrer que cette famille est libre. Ceci découle du fait que les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi (e_1, e_2) est une base de F.
Comme $E = F + G$, tout vecteur u de E s'exprime comme somme d'un vecteur f de F et d'un vecteur g de G. Comme (e_1, e_2) est une base de F, le vecteur f s'exprime comme combinaison linéaire de e_1 et de e_2. De même le vecteur g s'exprime comme combinaison linéaire de e_3 et de e_4. On a alors exprimé x comme une combinaison linéaire de e_1, de e_2, de e_3 et de e_4. Ceci montre que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de E.
Montrons maintenant que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha.e_1 + \beta.e_2 + \gamma.e_3 + \delta.e_4 = 0_E$. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est alors solution du système suivant

$$(S) \qquad \begin{cases} -\frac{\alpha}{5} + \beta + \gamma = 0 \\ \frac{2\alpha}{3} - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow -5L_1$
$L_2 \leftarrow \dfrac{3}{2}L_2$
$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \alpha - 3\beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - 5\beta - 5\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ -3\beta - 3\gamma - \delta = 0 \\ -5\beta - 5\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ 5\gamma + 14\delta = 0 \\ 3\gamma + 8\delta = 0 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{3}{5}L_3$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ 5\gamma + 14\delta = 0 \\ -\dfrac{2}{5}\delta = 0 \end{cases}$$

Le système (S) est un système de 4 équations à 4 inconnues de rang 4, il admet donc une unique solution.
On ait déjà que $(0,0,0,0)$ est solution de (S), c'est donc la seule.
Ainsi $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,0,0,0)$, la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est donc libre.
Finalement la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre et génératrice dans $\mathbb{R}^4$,c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ telle que $\{e_1,e_2\} \subset F$ et $\{e_3,e_4\} \subset G$.

3. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on sait qu'il existe un unique 4-uplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ tel que

$$u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$$

C'est-à-dire un unique 4-uplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ solution de

$$(S') \quad \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{5} + \beta + \gamma = x \\ \dfrac{2\alpha}{3} - 2\beta - 2\gamma = y \\ \alpha + \delta = z \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = t \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow -5L_1$
$L_2 \leftarrow \dfrac{3}{2}L_2$
$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = z \\ \alpha - 3\beta - 3\gamma = \dfrac{3}{2}y \\ \alpha - 5\beta - 5\gamma = -5x \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = t \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = z \\ -3\beta - 3\gamma - \delta = \dfrac{3}{2}y - z \\ -5\beta - 5\gamma - \delta = -5x - z \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = t \end{cases}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = z \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = t \\ 5\gamma + 14\delta = -5x - z + 5t \\ 3\gamma + 8\delta = \dfrac{3}{2}y - z + 3t \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{3}{5}L_3$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \delta = z \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = t \\ 5\gamma + 14\delta = -5x - z + 5t \\ -\dfrac{2}{5}\delta = 3x + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{2}{5}z \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow -\dfrac{5}{2}L_4$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - 14L_4$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{15}{2}x + \dfrac{15}{4}y \\ \beta + 2\gamma = t + \dfrac{45}{2}x + \dfrac{45}{4}y - 3z \\ 5\gamma = 100x + \dfrac{105y}{2} - 15z + 5t \\ \delta = -\dfrac{15}{2}x - \dfrac{15}{4}y + z \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{15}{2}x + \frac{15}{4}y \\ \beta = -\frac{35}{2}x - \frac{39}{4}y + 3z - t \\ \gamma = 20x + \frac{21}{2}y - 3z + t \\ \delta = -\frac{15}{2}x - \frac{15}{4}y + z \end{cases}$$

D'où

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(u) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}x + \frac{15}{4}y \\ -\frac{35}{2}x - \frac{39}{4}y + 3z - t \\ 20x + \frac{21}{2}y - 3z + t \\ -\frac{15}{2}x - \frac{15}{4}y + z \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 15.32

1. Compte tenu des questions posées on se doute que la famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ ne va pas être libre (car si elle était libre, elle serait une base de $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$ et on aurait $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\}) = \mathbb{R}^5$).
Déterminons le rang de la famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$. Si ce rang est différent du cardinal de la famille alors $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ n'est pas une base de $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$ et donc n'est pas libre (car on sait qu'elle est génératrice dans $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$). L'avantage de passer par le calcul du rang c'est que l'on obtiendra la dimension de $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$ ce qui nous donnera le cardinal des bases de $\mathrm{Vect}(\{e_0,\dots,e_4\})$ et le nombre de vecteurs à ajouter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$.
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(e_0,e_1,e_2,e_3,e_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_5 \leftarrow L_5 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit dès à présent que la matrice ne va pas être de rang 5 puisqu'elle a une ligne nulle. Cela nous dit que la famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ n'est pas libre. On va toutefois continuer notre calcul pour obtenir le rang exact de la famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$
$L_4 \leftrightarrow L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est de rang 4. Ainsi la famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ est de rang 4 et $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_4\})$ est de dimension 4.
La famille $(e_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_4\})$, on peut donc en extraire une base de $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_4\})$.
On voit sur la matrice que le rang semble inchangé si l'on enlève le dernier vecteur e_4. Il est aisé de vérifier (en faisant exactement les mêmes opérations) que la famille (e_0, e_1, e_2, e_3) est une famille de rang 4.
Par acquis de conscience (et avec l'aimable assistance de la fonction copier/coller) refaisons les calculs
On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(e_0, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_5 \leftarrow L_5 - L_1$
$L_4 \leftrightarrow L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (e_0, e_1, e_2, e_3) est donc bien une famille de rang 4. Ainsi $\text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}(\{e_0, \ldots, e_4\})$ qui est aussi de dimension 4. On a donc $\text{Vect}(\{e_0, \ldots, e_4\}) = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$. De plus (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base de $\text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$ donc de $\text{Vect}(\{e_0, \ldots, e_4\})$.

Il nous faut maintenant compléter la famille (e_0, e_1, e_2, e_3) en une base de $\mathbb{R}^5$. $\mathbb{R}^5$ est un espace vectoriel de dimension 5, ses bases sont donc de cardinal 5. Ainsi il nous faut rajouter un élément f à la famille (e_0, e_1, e_2, e_3). Pour que (e_0, e_1, e_2, e_3, f) soit une base de $\mathbb{R}^5$ il faut qu'elle soit libre, ce qui implique en particulier que f ne doit pas appartenir à $\text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$.
On peut remarquer que $(e_0, e_1, e_2, e_3) \subset \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \ , \ x = s\}$ et donc $\text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3) \subset \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \ , \ x = s\}$ (on pourrait en fait montrer que ces deu ensembles sont égaux). Ainsi, si on prend f hors de $\{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \ , \ x = s\}$ on aura forcément $f \notin \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$.
Prenons par exemple $f = (0, 0, 0, 0, 1)$ et vérifions qu'alors, la famille (e_0, e_1, e_2, e_3, f) est libre.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 f = 0$$

D'où

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = -\lambda_4 f$$

De deux choses l'une :
- Ou bien $\lambda_4 \neq 0$ et alors $f = -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_4} e_0 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_4} e_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_4} e_2 - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_4} e_3$ d'où $f \in \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$, ce qui est absurde par construction de f.
- Ou bien $\lambda_4 = 0$ et alors $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, ce qui, par liberté de la famille (e_0, e_1, e_2, e_3) implique que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$

Ainsi $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0, 0)$, la famille (e_0, e_1, e_2, e_3, f) est une famille libre de cardinal 5 dans $\mathbb{R}^5$ qui est de dimension 5. C'est donc une base de $\mathbb{R}^5$.

2. On pose $F = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_4)$. Trouver des bases de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.
Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} F + G &= \{u + v \ , \ u \in F \, , v \in G\} \\ &= \{(\alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2) + (\delta e_3 + \varepsilon e_4) \ , \ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \, , \, (\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base de $F + G$.
Déterminons les dimensions de F et G.

On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(e_0, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_5 \leftarrow L_5 - L_1$
$L_1 \leftrightarrow L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (e_0, e_1, e_2) est de rang 3. Ainsi F est de dimension 3. La famille (e_0, e_1, e_2) est une famille de cardinal 3 génératrice de F qui est de dimension 3, c'est donc une base de F.
On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(e_3, e_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \dfrac{1}{6}L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (e_3, e_4) est de rang 2. Ainsi G est de dimension 2. La famille (e_3, e_4) est une famille de cardinal 2 génératrice de G qui est de dimension 2. C'est donc une base de G.

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G. Sa dimension est donc inférieure ou égale aux dimensions de F et G. Ainsi $F \cap G$ est un espace de dimension 0, 1 ou 2.

On sait que la famille $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est liée. Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5 \backslash \{0_{\mathbb{R}^5}\}$ tel que $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$. C'est-à-dire

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = -\lambda_3 e_4 - \lambda_4 e_4$$

Notons $x = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Si $x = 0$ alors, par liberté de la famille $(e_0, e_1, e_2$ on aurait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et, par liberté de la famille (e_3, e_4) on aurait également $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ce qui absurde car les coefficients λ_i ne sont pas tous nuls.

Ainsi $x \neq 0$. On a de plus $x \in \text{Vect}(e_0, e_1, e_2) = F$ et $x \in \text{Vect}(e_3, e_4) = G$. Ainsi $x \in F \cap G$.

$F \cap G$ n'est ainsi pas réduit à $\{0\}$ et ne peut donc pas être de dimension 0.

Si $F \cap G$ est de dimension 2 alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de G de même dimension que G. On aurait donc $F \cap G = G$, ce qui implique $G \subset F$.

En particulier on aurait $e_3 \in F = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$, ce qui est absurde car on a vu plus haut que la famille (e_0, e_1, e_2, e_3) est libre.

Finalement on en déduit que $\dim(F \cap G) = 1$ (on aurait pu aller bien plus vite en utilisant un théorème qui n'est malheureusement pas au programme).

Les bases de $F \cap G$ sont donc composées d'un seul vecteur. Il nous faut trouver alors un vecteur de $F \cap G$.

En reprenant les calculs de la première question on remarque que

$$e_0 - e_1 + e_2 - e_4 = 0$$

Ainsi $e_4 \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. On a donc $e_4 \in F \cap G$. La famille (e_4) est une famille libre (car composée d'un seul vecteur non-nul) de $F \cap G$ qui est de dimension 1. C'est donc une base de $F \cap G$.

Réponse de l'exercice 15.33

1. Pour montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$ il suffit de montrer que u et v appartiennent à $\text{Vect}(s, t)$ et que s et t appartiennent à $\text{Vect}(u, v)$.

   On a $u - v = (-1, 2, 2) = s$ et $4s - v = 4u - 5v = (-1, 6, 7) = t$. Ainsi, $s \in \overrightarrow{(}u, v)$ et $t \in \text{Vect}(u, v)$.

   Réciproquement on a $v = 4s - t$ et $u = v + s = 5s - t$. D'où $v \in \ vect(s, t)$ et $u \in \text{Vect}(s, t)$.

   Finalement on a bien $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$.

2. On sait que $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}(u, v)$ et de $\text{Vect}(s, t)$. À ce titre, sa dimension est 0 (si $\text{Vect}(u, v) \cap \overrightarrow{(} s, t) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$), 1 ou 2 (si $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$).

Calculons le rang de la famille (u, v, s, t), en effet, si $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$ alors $\text{Vect}(u, v, s, t) = \text{Vect}(u, v)$ et donc la famille (u, v, s, t) serait de rang 2.
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(u, v, s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{7}L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

La famille (u, v, s, t) est donc de rang 3, ce qui implique que $\text{Vect}(u, v) \neq \text{Vect}(s, t)$.
En regardant de plus près notre matrice on voit que $-2u + v - t + s = 0_{\mathbb{R}^3}$ (il suffit de remarquer que c'est la même matrice que pour résoudre le système $au + bv + ct + ds = 0$).
Ainsi $2u - v = s - t$. Notons $x = 2u - v = s - t = (-1, 5, -4)$, on a alors $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $x \in \text{Vect}(u, v)$ et $x \in \text{Vect}(s, t)$. D'où $x \in \text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$.
On en conclut que $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$ est de dimension 1. La famille (x) est une famille libre de $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$ et est donc une base de $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$.

Réponse de l'exercice 15.34

Notons $F = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 2, 2, 2))$.

Il est aisé de remarquer que $(2, 2, 2, 2) = 2\cdot(1, 0, 0, 1)+2\cdot(0, 1, 1, 0)$. La famille $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 2, 2, 2))$ n'est donc pas libre et on a $F = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 2, 2, 2)) = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot (1, 0, 0, 1) + \mu \cdot (0, 1, 1, 0) = 0$. On a alors $(\lambda, \mu, \mu, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ d'où $\lambda = \mu = 0$.

La famille $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$ est une famille libre et génératrice de F. C'est donc une base de F. F est ainsi de dimension 2

Chapitre 16

Dérivation

Exercices

Exercice 16.1

Déterminer l'ensemble de définition, justifier de la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$

$f_2 : x \mapsto (x^2-1)\arccos(x^2)$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2+1}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^4}$

$f_7 : x \mapsto x^x$

$f_8 : x \mapsto \ln(|x|)$

$f_9 : x \mapsto x^3\cos(x+1)$

$f_{10} : x \mapsto e^{\cos(x)}$

$f_{11} : x \mapsto x\ln(x)$

$f_{12} : x \mapsto \ln(e^x+1)$

$f_{13} : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

$f_{14} : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

$f_{15} : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

$f_{16} : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

$f_{17} : x \mapsto \ln(\cos(2x))$

$f_{18} : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

$f_{19} : x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

$f_{20} : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

$f_{21} : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(\sqrt{x})}{1-\sin(\sqrt{x})}}$

$f_{22} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$

$f_{23} : x \mapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$f_{24} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)$

$f_{25} : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+1)|}$

$f_{26} : x \mapsto e^{e^x}$

$f_{27} : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^2-x^2}}\right)$

$f_{28} : x \mapsto x^{(x^x)}$

$f_{29} : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

$f_{30} : x \mapsto \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$f_{31} : x \mapsto \ln(\ln(x))$

$f_{32} : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

$f_{33} : x \mapsto \ln\left(1+\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$f_{34} : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

$f_{35} : x \mapsto \cos(x)\left(1+\tan(x)\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

$f_{36} : x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$

$f_{37} : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Exercice 16.2

Soit $f : \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\sin(x)}+x \end{array}$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Exercice 16.3

Montrer les inégalités/égalités suivantes

$$\forall x \geqslant 0 \qquad x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\forall x > 0 \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan(x) > 1$$

$$\forall x > 1 \qquad \frac{x\ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$
$$\forall x > 0 \qquad \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$
$$\forall x > 0 \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 16.4

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$$

Exercice 16.5

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère les fonctions $f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes représentatives des fonctions f_λ sont parallèles.
2. Vérifier que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 16.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \end{array} \qquad g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+1)x^k \end{array}$$

Déterminer des expressions plus simples de f_n et g_n.

Exercice 16.7

Montrer que les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$g : x \mapsto x|x| \qquad\qquad h : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

sont continues et dérivables en 0. Déterminer leur dérivées. Sont-elles continues en 0 ?

Exercice 16.8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 16.9

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$$

Exercice 16.10

1. Soit a et b deux réels avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$. On suppose que f s'annule n fois sur $[a, b]$ où $n \geqslant 2$. Montrer qu'alors f' s'annule alors au moins $n-1$ fois sur $]a, b[$.
2. Soit P un polynôme de degré n dont toutes les racines, notées $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n$ sont réelles (les racines sont éventuellement multiples). Montrer qu'alors P' a toutes ses racines dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$

Exercice 16.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et périodique. Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 16.12

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

On pourra introduire $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x(f(x) - f'(x)) \end{array}$

Exercice 16.13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall \lambda \in [a, b], \quad \exists c_\lambda \in]a, b[\text{ tel que } f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda - a)(\lambda - b) f''(c_\lambda)$$

(On pourra poser $g(t) = f(t) - k(t-a)(t-b)$ avec $k = \dfrac{f(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)}$)

Exercice 16.14

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

On pourra introduire $g : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right) \end{array}$

Exercice 16.15

Montrer que si P est un polynôme, l'équation $P(x) = e^x$ a un nombre fini de solutions.

Exercice 16.16

On pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le but est de montrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. En déduire $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$
3. Conclure.

Exercice 16.17

Appliquer la formule des accroissements finis à $f : x \mapsto \arctan(x)$ entre 0 et h.

Montrer qu'il existe un unique θ_h tel que $f(h) = hf'(\theta_h h)$. Calculer θ_h et $\lim\limits_{h \to 0} \theta_h$.

Exercice 16.18

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 16.19

Soit f une application deux fois dérivable sur $[x_0, x_0 + 2h]$ où $h > 0$. Montrer qu'il existe $x_h \in]x_0, x_0 + 2h[$ tel que

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = h^2 f''(x_h)$$

Exercice 16.20

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exercice 16.21

Soit f une application dérivable sur $[a, b]$. Montrer que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Il s'agit du théorème de Darboux

Indication : utiliser $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$, prolongées par continuité sur $[a, b]$.

Exercice 16.22

Soit g une application impaire et cinq fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que :

$$g(1) = \frac{1}{3}(g'(1) + 2g'(0)) - \frac{1}{180} g^{(5)}(c)$$

Indication : Utiliser l'application $\varphi(x) = g(x) - \dfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda x^5$.

Exercice 16.23

En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

1. Si $0 < a < b$ alors $a \leqslant \dfrac{b - a}{\ln b - \ln a} \leqslant b$,

   En déduire que pour $0 < x < 1$ ou $x > 1$ on a : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.
2. Si $0 < a < b$ alors $\sqrt[3]{1 + b} - \sqrt[3]{1 + a} \leqslant \dfrac{b - a}{3}$
3. Si $0 < x < 1$ alors $\arcsin x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

4. Si $x > 0$ alors $\arctan x \geqslant \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 16.24

1. Démontrer la formule de Leibniz :
   Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et
   $$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$
   On pourra s'inspirer de la preuve de la formule du binôme de Newton
2. En appliquant la formule de Leibniz à $t \mapsto e^{at}$ et $t \mapsto e^{bt}$, démontrer la formule du binôme de Newton

Exercice 16.25

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée n-ième de

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$f_3 : x \mapsto \sin(4x)$

$f_4 : x \mapsto \cos^2 x$.

$f_5 : x \mapsto \sin^3 x$

$f_6 : x \mapsto \sin^5 x$.

Exercice 16.26

On pose :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
Montrer que la dérivée n^{ieme} de f est de la forme :
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$
où P_n est un polynôme de degré n vérifiant
$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - (2n+1)xP_n$$

Exercice 16.27

Trouver une relation de récurrence entre les dérivées successives de $f : x \mapsto e^{x^2}$

Exercice 16.28

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée n-ième de $g : x \mapsto x^n e^{-x}$.

Exercice 16.29

Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Réponses

Réponse de l'exercice 16.1

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - x^3 = x^2(1-x)$. Ainsi f_1 est définie sur $]-\infty, 1]$. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. f_1 est donc dérivable sur $\{x \in]-\infty, 1]\ ,\ x^2 - x^3 \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

Pour $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a

$$f_1'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$$

$f_2 : x \mapsto (x^2 - 1)\arccos(x^2)$

La fonction arccos est défini et dérivable sur $[-1, 1]$. Ainsi f_2 est définie et dérivable sur $[-1, 1]$ et on a, pour $x \in [-1, 1]$

$$f_2'(x) = 2x\arccos\left(x^2\right) - \frac{2x\left(x^2 - 1\right)}{\sqrt{1 - x^4}}$$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$

Le discriminant de l'expression polynomiale $x^2 + x + 2$ vaut $\Delta = -7$. Ainsi la fonction $x \mapsto x^2 + x + 2$ et continue et ne s'annule jamais, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle est donc de signe constant.

Par ailleurs, cette expression est positive pour $x = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 2 > 0$.

On a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

f_3 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_3'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2 + 1}$

Pour tout réel x, on a $x^2 + 1 \neq 0$. La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_4'(x) = \frac{1 - 2x\arctan(x)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$

f_5 est définie et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ et, pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ on a

$$f_5'(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x) + 2)^4}$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $2 + \cos(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_6'(x) = \frac{\sin(x)^2 + 2\cos(x) + 1}{\left(\cos(x) + 2\right)^3}$$

$f_7 : x \mapsto x^x$

f_7 est définie pour $x > 0$ par $f_7(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. f_7 est de plus dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x > 0 \qquad f_7'(x) = (1 + \ln(x))x^x$$

$f_8 : x \mapsto \ln(|x|)$

f_8 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour $x > 0$ on a $f_8(x) = \ln(x)$ et, pour $x < 0$, $f_8(x) = \ln(-x)$. f_8 est alors dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x > 0 \qquad f_8'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et } \forall x < 0 \qquad f_8'(x) = -\ln(-x)$$

$f_9 : x \mapsto x^3\cos(x+1)$

a est définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \cos(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a'(x) = 3x^2\cos(x+1) - x^3\sin(x+1)$$

$f_{10} : x \mapsto e^{\cos(x)}$

b est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. b est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$b'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$$

$f_{11} : x \mapsto x\ln(x)$

c est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. c est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$c'(x) = \ln(x) + 1$$

$f_{12} : x \mapsto \ln(e^x + 1)$

La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$d'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$f_{13} : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

e est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$$

$f_{14} : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\,e^{\sqrt{x^2+x+1}}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$f_{15} : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$. h est alors définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. h est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$f_{16} : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

La fonction $x \mapsto x^2-2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. i est alors définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. La fonction $x \mapsto x^2-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. i est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ comme quotient de fonctions dérivables et

En particulier, pour $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$, on a

$$i'(x) = -\frac{(2x^2-4)\sin(x) + 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2}$$

$f_{17} : x \mapsto \ln(\cos(2x))$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. On sait que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x)$ est strictement positif si et seulement si x est dans un intervalle de la forme $\left]\alpha\pi - \dfrac{\pi}{4}, \alpha\pi\dfrac{\pi}{4}\right[$ avec k un entier relatif. Ainsi j est définie sur $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} \left]\alpha\pi - \frac{\pi}{4}, \alpha\pi\frac{\pi}{4}\right[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. j est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme composée de fonction dérivables.

En particulier, pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, on a

$$j'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$f_{18} : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule sur $\pi\mathbb{Z}$. k est alors définie sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ comme quotient de fonctions dérivables.

En particulier, pour $x \in]0, \pi[$, on a

$$k'(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

$f_{19} : x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

La fonction $x \mapsto x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais ne prend des valeurs positives que sur $]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2-1}$ est définie sur $]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Cette fonction ne prend toutefois des valeurs strictement positives que sur $[1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

Alors la fonction l est définie sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$l'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

f_{20} : $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Elle est positive sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est définie sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction m est alors définie sur $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. En particulier, pour $x \in]1,+\infty[$, on a

$$m'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

f_{21} : $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(\sqrt{x})}{1-\sin(\sqrt{x})}}$

On sait que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $1+\sin(\sqrt{x}) \geqslant 0$ et $1-\sin(\sqrt{x}) \geqslant 0$, ainsi f_{22} est définie sur $\mathbb{R}_+\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Sur cet ensemble on a

$$f'_{22}(x) = \frac{\frac{\cos(\sqrt{x})(\sin(\sqrt{x})+1)}{2(1-\sin(\sqrt{x}))^2\sqrt{x}} + \frac{\cos(\sqrt{x})}{2(1-\sin(\sqrt{x}))\cdot\sqrt{x}}}{2\sqrt{\frac{\sin(\sqrt{x})+1}{1-\sin(\sqrt{x})}}} = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}(\sin\left(\sqrt{x}\right)-1)^2\sqrt{\frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sin(1-\sqrt{x})}}}$$

f_{22} : $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$

On a, pour tout réel x, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$, $\sqrt{1+x^2}-1 \geqslant 0$, $\sqrt{1+x^2}+1 \geqslant 2 > 0$, la seule difficulté viendra du cas $x=0$ pour lequel $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$.
f_{23} est alors définie et dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et sur cet ensemble on a

$$f'_{23}(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\left(2x^2+4\right)+4x^2+4}{\sqrt{x^2+1}\cdot(2x^3+2x)+x^5+3x^3+2x}$$

f_{23} : $x \mapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

f_{23} est définie et dérivable sur $\left\{x\in\mathbb{R}^*\ ,\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0\right\}$, cet ensemble n'a pas de forme particulièrement élégante mais on peut toutefois remarquer que f_{23} est en particulier définie et dérivable sur $\left]-\infty,-\dfrac{2}{\pi}\right[\cup\left]\dfrac{2}{\pi},+\infty\right[$.
Sur cet ensemble on a

$$f'_{23}(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

f_{24} : $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)$

f_{25} est définie sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ et est dérivable sur $]-1,1[\backslash\{0\}$, sur cet ensemble on a

$$f_{25}'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cdot\sqrt{1-x^4}+2-2x^4}{(x^5-x)\left(\sqrt{1-x^4}+1\right)}$$

$f_{25} :\ x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+1)|}$

f_{26} est définie et dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
Pour $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ on a $f_{26}(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+1)}$,d'où

$$f_{26}'(x)=\frac{\left(2x^2-x-2\right)e^{\frac{1}{x}}}{2x\sqrt{x^2+x}}$$

et, pour $x\in]-1,0[$ on a $f_{26}(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{-x(x+1)}$, d'où

$$f_{26}'(x)=-\frac{\left(2x^2-x-2\right)e^{\frac{1}{x}}}{2x\ \sqrt{-x^2-x}}$$

$f_{26} :\ x\mapsto e^{e^x}$

f_{27} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_{27}'(x)=e^{x+e^x}$$

$f_{27} :\ x\mapsto\exp\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-x^2}}\right)$

f_{28} est définie et dérivable sur $]-e,e[$ et sur cet ensemble on a

$$f_{28}'(x)=\frac{x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-x^2}}\right)}{(e^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f_{28} :\ x\mapsto x^{(x^x)}$

Pour $x>0$ on a $x^{(x^x)}=ex^x\ln(x)=e^{e^{x\ln(x)}\ln(x)}$. f_{29} est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur cet ensemble on a

$$f_{27}'(x)=x^{x^x}\left(x^x\ln(x)\cdot(\ln(x)+1)+x^{x-1}\right)$$

$f_{29} :\ x\mapsto x^{\frac{1}{x}}$

f_{30} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur cet ensemble on a

$$f_{30}'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)$$

$f_{30} :\ x\mapsto\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$ où $n\in\mathbb{N}^*$

f_{31} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur cet ensemble on a

$$f_{31}'(x)=\left(n\cdot\ln\left(\frac{x}{n}\right)+n\right)\left(\frac{x}{n}\right)^{n\cdot x}$$

f_{31} : $x \mapsto \ln(\ln(x))$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]1, +\infty[$. n est alors définie et dérivable sur $]1, +\infty$ comme composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$n'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

f_{32} : $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]e, +\infty[$. La fonction o est alors définie et dérivable sur $]e, +\infty$ comme composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in]e, +\infty[$, on a

$$o'(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

f_{33} : $x \mapsto \ln(1 + \exp(-\frac{1}{x}))$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Ainsi la fonction $x \mapsto 1 + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Elle prend des valeurs toujours strictement positives. Donc p est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$p'(x) = \frac{1}{x^2(= \left(1 + \exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

f_{34} : $x \mapsto \frac{e^x}{x}$

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule qu'en 0. Ainsi q est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$q'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

f_{35} : $x \mapsto \cos(x)\left(1 + \tan(x)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi + 2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{\pi + 2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi r est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}\right)$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables.
En particulier, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$r'(x) = 0$$

En effet, si on effectue des simplifications trigonométriques, on peut se rendre compte que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\pi\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\beta\pi\ ,\ \beta \in \mathbb{Z}\}\right)$, $r(x) = 1$

f_{36} : $x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^x = e^{x\ln(x)}$.Elle prend des valeurs strictement positives et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in R_+^x$ on peut réécrire $(x^x)^{2x+1} = \exp((2x+1)\ln(e^{x\ln(x)}) = \exp((2x^2 + x)\ln(x))$.

La fonction $x \mapsto \exp((2x^2 + x)\ln(x))$ est définie et dérivable sur R_+^* et prend des valeurs strictement positives. De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi s est définie et dérivable sur R_+^* comme composée de fonctions dérivables

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$s'(x) = \frac{(x^x)^{2x+1}\left((2x+1)\left(\ln(x)+1\right) + 2\cdot x \cdot \ln(x)\right)}{2\sqrt{(x^x)^{2x+1}}}$$

f_{37} : $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1,1]$, s'annule en -1 et 1 et est dérivable sur $]-1,1[$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme quotient de fonctions dérivables. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u est définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme composition des fonctions dérivables.

On a, pour $x \in]-1,1[$,

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Réponse de l'exercice 16.2

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction sinus est positive, f est donc bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

f continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de dérivée

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} + 1 \geqslant 1 > 0$$

f est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection continue f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

On sait que $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$, et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right] \subset f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

De plus on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{\pi}{2}$$

D'où $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right]$ et finalement $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right]$

f^{-1} est donc continue sur $\left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right]$. Elle est dérivable sur

$$\left\{y \in \left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ f \text{ est dérivable en } f^{-1}(y) \text{ et } f'(f^{-1}(y)) \neq 0\right\}$$

C'est-à-dire

$$\left\{y \in \left[0, 1+\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ f^{-1}(y) \in \left]0, 1+\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } f'(f^{-1}(y)) \neq 0\right\}$$

On a $f^{-1}(y) = 0$ si et seulement si $y = 0$ et on sait que f' ne s'annule jamais. Ainsi f^{-1} est dérivable sur $\left]0, 1+\frac{\pi}{2}\right]$

Réponse de l'exercice 16.3

— Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} \end{array}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant 0$.
Pour cela dérivons f. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

Le signe de f' n'est pas évident, il va falloir continuer. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f''(x) = -\sin(x) + x$$

On sait que, pour $x \geqslant 0$, on a $\sin(x) \leqslant x$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f''(x) \geqslant 0$.
f' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f'(x) \geqslant f'(0)$. Or $f'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 0$.
f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant f(0)$. Or $f(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$$

Soit maintenant $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} \end{array}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables. On va montrer que, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant 0$.
Pour cela dérivons g. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

Le signe de g' n'est pas évident, il va falloir continuer. g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g''(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6}$$

On vient de prouver que, pour tout réel positif x, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g''(x) \leqslant 0$.
g' est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g'(x) \leqslant g'(0)$. Or $g'(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g'(x) \leqslant 0$.
g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout réel positif x, $g(x) \leqslant g(0)$. Or $g(0) = 0$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant 0$. C'est-à-dire, pour tout réel positif x,

$$\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

— On peut remarquer que l'inégalité demandée est équivalente à

$$\forall x > 0 \qquad \arctan(x) > \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

C'est-à-dire

$$\forall x > 0 \qquad \arctan(x) - \frac{x}{x^2+1} > 0$$

Soit alors $f : x \mapsto \arctan(x) - \dfrac{x}{x^2+1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a ainsi

$$\forall x > 0 \qquad f(x) > f(0)$$

C'est-à-dire

$$\forall x > 0 \qquad \arctan(x) - \frac{x}{x^2+1} > 0$$

On a bien montré que

$$\forall x > 0 \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right) \arctan(x) > 1$$

— On va montrer ici que

$$\forall x > 1 \qquad \ln(x) < \frac{x^2-1}{2x}$$

Soit $\begin{array}{rccl} h & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{2x} - \ln(x) \end{array}$

h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a

$$\forall x > 1 \qquad h'(x) = \frac{2+2x^2}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1+x^2}{2x^2} - \frac{2x}{2x^2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2} > 0$$

h est donc strictement croissante sur $]1,+\infty[$. On a ainsi

$$\forall x > 1 \qquad h(x) > \lim_{x \to 1^+} h(x)$$

C'est-à-dire

$$\forall x > 1 \qquad \frac{x^2-1}{2x} - \ln(x) > 0$$

On a donc montré que

$$\forall x > 1 \qquad \frac{x\ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

— On pose $\begin{array}{cccc} f & : & x & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & \mathbb{R} & \mapsto & x \end{array} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \dfrac{1}{x} - \ln(x)$ On va montrer que $f'(x)$ est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$.

On trouve

$$f'(x) = \frac{(1-x)\left(1\sqrt{x^2+1}\right) + x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1\right)}$$

Il est clair que, pour $x \in]0,1]$ on a $f'(x) > 0$.

On suppose donc $x > 1$. Il faut vérifier que

$$x^2 > (x-1)\left(1\sqrt{x^2+1}\right)$$

C'est-à-dire

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 > \sqrt{1+x^2}$$

Les quantités considérées étant positives, cette inégalité équivaut à

$$(x^2-x+1)^2 > (x^2+1)(x-1)^2$$

qui équivaut à $x^2 > 0$
On a donc bien

$$\forall x>0 \qquad f'(x)>0$$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, pour $x>0$ on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) - \frac{1}{x}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a alors alors, par croissance de f,

$$\forall x>0 \qquad f(x) < \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

C'est-à-dire

$$\forall x>0 \qquad \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$

— Soit $f \; : \; \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall x>0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

f est donc constante sur $]0,+\infty[$, en particulier on a

$$\forall x>0 \qquad f(x) = f(1)$$

C'est-à-dire

$$\forall x>0 \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Réponse de l'exercice 16.4

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et soit $f \; : \; \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a(x^4-x)+b(x^3-x)+c(x^2-x) \end{array}$.

f est un polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ On a de plus $f(0)=0$ et $f(1)=0$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $x\in[0,1]$ tel que $f'(x)=0$.

C'est-à-dire, il existe $x\in[0,1]$ tel que

$$4ax^3 - a + 3b^2 - b + 2cx - c = 0$$

et donc

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$$

Réponse de l'exercice 16.5

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe représentative de f_λ en 0 admet comme coefficient directeur $f'_\lambda(0)$.
   On a $f'_\lambda(0) = 1$. Les tangentes en 0 aux courbes représentatives des fonctions f_λ ont donc toutes le même coefficient directeur et sont donc parallèles.
2. La tangente à la courbe représentative de f_λ en 1 est la droite passant par $f_\lambda(1) = \dfrac{\lambda+1}{2}$ et de coefficient directeur $f'_\lambda(1) = -\dfrac{\lambda}{2}$. Il s'agit donc de la droite D_λ d'équation
   $$y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{\lambda+1}{2}$$
   C'est-à-dire
   $$y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}$$
   On voit alors que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le point $M\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à D_λ. Les droites D_λ sont donc concourantes en $M\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Réponse de l'exercice 16.6

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t_k \begin{array}{ccc} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^k \end{array}$.

t_k est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$t'_k(x) = kx^{k-1} \qquad t''_k(x) = k(k-1)x^{k-2}$$

On remarque alors que, pour $x \in \mathbb{R}$

$$(k+1)x^k = t'_{k+1}(x) \qquad \text{et} \qquad (k+2)(k+1)x^k = t''_{k+2}(x)$$

Ainsi,

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} t'_{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} t_{k+1}\right)'$$

et

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} t''_{k+2} = \left(\sum_{k=0}^{n} t_{k+2}\right)''$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} t_{k+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = x\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} t_{k+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2} = x^2\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x}$$

Soit alors $F_n \begin{array}{cccc} : & \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x(1-x^{n+1})}{1-x} \end{array}$ et $G_n \begin{array}{cccc} : & \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2(1-x^{n+1})}{1-x} \end{array}$

F_n est dérivable sur $]1, +\infty$ en tant que quotient de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad F_n'(x) = \frac{nx^{n+2} + x^{n+2} - nx^{n+1} - 2x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

Et

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad F_n'(x) = f_n(x)$$

De même

$$\forall x \in]-\infty, 1[\qquad F_n'(x) = \frac{nx^{n+2} + x^{n+2} - nx^{n+1} - 2x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

Et

$$\forall x \in]-\infty, 1[\qquad F_n'(x) = f_n(x)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad f_n(x) = \frac{nx^{n+2} + x^{n+2} - nx^{n+1} - 2x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

G_n est dérivable deux fois sur $]1, +\infty$ en tant que quotient de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad G_n''(x) = \frac{n^2x^{n+3} + 3nx^{n+3} + 2x^{n+3} - 2n^2x^{n+2} - 8nx^{n+2} - 6x^{n+2} + n^2x^{n+1} + 5nx^{n+1} + 6x^{n+1} - 2}{(x-1)^3}$$

Et

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad G_n''(x) = g_n(x)$$

De même

$$\forall x \in]-\infty, 1[\qquad G_n''(x) = \frac{n^2x^{n+3} + 3nx^{n+3} + 2x^{n+3} - 2n^2x^{n+2} - 8nx^{n+2} - 6x^{n+2} + n^2x^{n+1} + 5nx^{n+1} + 6x^{n+1} - 2}{(x-1)^3}$$

Et

$$\forall x \in]-\infty, 1[\qquad G_n''(x) = g_n(x)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad g_n(x) = \frac{n^2x^{n+3} + 3nx^{n+3} + 2x^{n+3} - 2n^2x^{n+2} - 8nx^{n+2} - 6x^{n+2} + n^2x^{n+1} + 5nx^{n+1} + 6x^{n+1} - 2}{(x-1)^3}$$

Le calcul de $f_n(1)$ et $g_n(1)$ se ramène aux calculs de sommes usuelles vues dans le chapitre « Méthodes de calcul ».

Réponse de l'exercice 16.7

— Pour $x \neq 0$ on a $-x^2 \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

f est donc bien continue en 0. De plus on a

$$\forall x \neq 0 \qquad -x \leqslant \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} \leqslant x$$

Ainsi, encore d'après le théorème des gendarmes, les taux d'accroissements $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admettent une limite (plus précisément 0) quand x tend 0. f est donc dérivable en 0 de dérivée $f'(0)=0$.
Sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable. Comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ de dérivée

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\qquad f'(x)) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Il est assez clair que $x\mapsto 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0. f' n'est donc pas continue en 0.

— Pour $x\in\mathbb{R}$ on a $-x^2\leqslant x|x|\leqslant x^2$ Ainsi, d'après le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$$

g est donc bien continue en 0. De plus on a

$$\forall x\neq 0\qquad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = |x|$$

Ainsi, les taux d'accroissements $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admettent une limite (plus précisément 0) quand x tend 0. g est donc dérivable en 0 de dérivée $g'(0)=0$.
Sur $]0,+\infty[$ on a $g(x)=x^2$, g est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $g' : x\mapsto 2x$, de même sur $]-\infty,0[$, g est dérivable de dérivée $g' :\mapsto -2x$
On a

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0 = g'(0)$$

g' est donc bien continue sur $\mathbb{R}$. (On peut remarquer qu'en fait $g'(x)=2|x|$)

— La fonction $x\mapsto |x|+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais, ainsi h est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues. En particulier h est continue en 0.
On a

$$\forall x\neq 0\qquad \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1}{|x|+1}$$

Ainsi, les taux d'accroissements $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ admettent une limite (plus précisément 1) quand x tend 0. h est donc dérivable en 0 de dérivée $h'(0)=1$.
Sur $]0,+\infty[$ on a $h(x)=\dfrac{x}{1+x}$, h est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $h' : x\mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$, de même sur $]-\infty,0[$, g est dérivable de dérivée $g' :\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
On a

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} h'(x) = 1 = h'(0)$$

h' est donc bien continue sur $\mathbb{R}$. (On peut remarquer qu'en fait $h'(x)=\dfrac{1}{(1+|x|)^2}$)

Réponse de l'exercice 16.8

Soit $\begin{array}{rccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^x(f(x)-f'(x)) \end{array}$

On sait que f et f' sont continues et dérivables sur $[a,b]$, g est donc dérivable sur $[a,b]$ et on a

$$\forall x \in [a,b] \qquad g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x))$$

On a de plus $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ et donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c(f(c) - f''(c)) = 0$.

On a donc bien $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Réponse de l'exercice 16.9

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a(x^4 - x) + b(x^3 - x) + c(x^2 - x) \end{array}$.

f est un polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ On a de plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f'(x) = 0$.

C'est-à-dire, il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$4ax^3 - a + 3b^2 - b + 2cx - c = 0$$

et donc

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Réponse de l'exercice 16.10

1. Soit a et b deux réels avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[a,b]$. On suppose que f s'annule n fois sur $[a,b]$ où $n \geqslant 2$. Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les points d'annulation de f. On a alors $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$.
   Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. f est dérivable sur $[x_i, x_{i+1}]$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle, il existe donc $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$. On a ainsi $n-1$ réels y_i tel que $f(y_i) = 0$ avec $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$.
2. Soit P un polynôme de degré n dont toutes les racines, notées $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n$ sont réelles (les racines sont éventuellement multiples).
   Commençons par remarquer que, comme P' est de degré $n-1$ il admet au plus $n-1$ racines réelles.
   On va procéder comme précédemment. Toutefois, il est possible ici d'avoir $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Ceci n'arrive que quand λ_i est une racine de multiplicité $m > 1$ mais on sait qu'alors λ_i est également une racine de P' de multiplicité $m-1$.
   Ainsi, si $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots \lambda_{i+m}$, alors on a $\mu_i = \mu_{i+1} = \mu_{i+m-1} (= \lambda_i)$ des racines de P' telles que
   $$\lambda_i \leqslant \mu_i \leqslant \lambda_{i+1} \cdots \leqslant \mu_{i+m-1} \leqslant \lambda_{i+m}$$
   Dans le cas où $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ on peut alors le théorème de Rolle.
   Finalement on a $n-1$ réels $\mu_1, \cdots \mu_{n-1}$ racines de P' tels que
   $$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$
   On parle d'entrelacement des racines. En particulier toutes les racines de P' sont dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$.

Réponse de l'exercice 16.11

Soit T une période de f. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+T) = f(x)$$

En particulier $f(0) = f(T)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, T]$. D'après le théorème de Rolle, il existe alors $x_0 \in]0, T[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

On peut répéter ce processus sur tous les intervalles $[kT, (k+1)T]$ où $k \in \mathbb{Z}$ mais on va procéder ici de manière différente en montrant que f' est également périodique de période T.

Soit $g : x \mapsto f(x+T) - f(x)$. g est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = f'(x+T) - f'(x)$$

On remarque que, par périodicité de f, g est constante et vaut 0. Ainsi g' est également la fonction nulle. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+T) = f'(x)$$

f est donc périodique de période T. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad f'(x_0 + kT) = f'(x_0) = 0$$

f' s'annule donc bien une infinité de fois.

Réponse de l'exercice 16.12

Soit $g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x(f(x) - f'(x)) \end{array}$

On sait que f et f' sont continues et dérivables sur $[a, b]$, g est donc dérivable sur $[a, b]$ et on a

$$\forall x \in [a,b] \qquad g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x))$$

On a de plus $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ et donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c(f(c) - f''(c)) = 0$.

On a donc bien $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Réponse de l'exercice 16.13

Comme suggéré par l'énoncé, posons $g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - \dfrac{f(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)}(t-a)(t-b) \end{array}$

g est alors la somme de f et d'un polynôme et est donc, à ce titre,deux fois dérivable sur $[a, b]$.

On a $g(a) = 0$, $g(b) = 0$ et

$$g(\lambda) = f(\lambda) - \frac{f(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)}(\lambda - a)(\lambda - b) = 0$$

On peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[a, \lambda]$. Il existe donc $c_1 \in]a, \lambda[$ tel que $g'(c_1) = 0$. De même, d'après le théorème de Rolle appliqué à g sur $]\lambda, b[$, il existe $c_2 \in]\lambda, b[$ tel que $g'(c_2)$.

On a alors $a < c_1 < \lambda < c_2 < b$ et $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$. La fonction g est deux fois dérivable sur $[a, b]$ donc g' est dérivable sur $[c_1, c_2]$. On peut alors lui appliquer le théorème de Rolle. Il existe alors $c_\lambda \in]c_1, c_2[\subset [a, b]$ tel que $g''(c_\lambda) = 0$, c'est-à-dire

$$f''(c_\lambda) - 2\frac{f(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)} = 0$$

D'où

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda - a)(\lambda - b)f''(c_\lambda)$$

Réponse de l'exercice 16.14

— On peut remarquer que le cas où a et b sont deux réels est excessivement simple. En effet f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on a alors $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = l$ et $f(b) = \lim_{x \to b} f(x) = l$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a, b]$ et ainsi obtenir $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

— Traitons ensuite le cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$. C'est ici que la fonction g se révèle utile.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. g est alors dérivable sur $]0, 1[$.
On a de plus $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = l$ et $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{y \to -\infty} g(y) = l$.
On peut alors prolonger g par continuité sur $[0, 1]$ en posant $g(0) = g(1) = l$.
On peut alors appliquer le théorème de Rolle à g sur $[0, 1]$. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a
$$\forall x \in]0, 1[\qquad g'(x) = \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right) f'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$$
Ainsi, on obtient
$$-\frac{(c-1)^2 + c^2}{c^2(c-1)^2} f'\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}\right) = 0$$
D'où
$$f'\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}\right) = 0$$
Notons $\tilde{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$, on a alors trouvé $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\tilde{c}) = 0$.

— Traitons maintenant le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$.
Posons $h : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(a - 1 + \frac{1}{x}\right) \end{array}$.
La fonction $x \mapsto a - 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$. h est alors dérivable sur $]0, 1[$.
On a de plus $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = l$ et $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = l$.
On peut alors prolonger g par continuité sur $[0, 1]$ en posant $g(0) = g(1) = l$.
On peut alors appliquer le théorème de Rolle à g sur $[0, 1]$. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a
$$\forall x \in]0, 1[\qquad g'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right) f'\left(a - 1 + \frac{1}{x}\right)$$
Ainsi, on obtient
$$-\frac{1}{c^2} f'\left(a - 1 + \frac{1}{c}\right) = 0$$
D'où
$$f'\left(a - 1 + \frac{1}{c}\right) = 0$$
Notons $\tilde{c} = a - 1 + \frac{1}{c}$, on a alors trouvé $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\tilde{c}) = 0$.

— Le cas $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ se traite de manière similaire en considérant $h : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(b + 1 + \frac{1}{x-1}\right) \end{array}$

Réponse de l'exercice 16.15

On va montrer par récurrence que, pour tout polynôme P de degré n, l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Initialisation :

Un polynôme de degré 0 est un polynôme constant. La fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, une équation de la forme $e^x = C$ admet une solution si $C > 0$ ($\ln(C)$) et aucune si $C \leqslant 0$, ce qui fait bien au plus $0+1$ solutions

Hérédité :

On suppose que, pour tout polynôme Q de degré n, l'équation $Q(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions. Soit P un polynôme de degré $n+1$. Supposons par l'absurde que l'équation $e^x = P(x)$ admette au moins $n+2$ solutions, notées $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$.

Notons $f : x \mapsto P(x) - e^x$. On a alors

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+2}) = 0$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car tout polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, où $i \in [\![1, n+1]\!]$. Il existe alors $y_1 \in]x_1, x_2[, y_2 \in]x_2, x_3[, \cdots, y_{n+1} \in]x_{n+1}, x_{n+2}[$ tel que

$$f'(y_1) = f'(y_2) = \cdots = f'(y_{n+1})$$

$y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ sont alors $n+1$ solutions distinctes de l'équation $P'(x) = e^x$. Or P' est de degré n, d'après l'hypothèse de récurrence, l'équation $P'(x) = e^x$ admet au plus n solutions.

On aboutit à une contradiction. Ainsi l'équation $P(x) = e^x$ admet bien au plus $n+1$ solutions, ce qui prouve l'hypothèse au rang $n+1$ et achève la récurrence

---

Réponse de l'exercice 16.16

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. On peut alors lui appliquer le théorème des accroissements finis.
   Il existe donc $c_k \in [k, k+1]$ tel que $\dfrac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k} = \dfrac{1}{c_k}$.
   Comme $c_k \in [k, k+1]$ on a alors $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{c_k} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   C'est-à-dire $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$
2. Soit $n \geqslant 2$. On sait que, pour tout $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.
   Ainsi
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \qquad \text{on reconnait ici une somme téléescopique} \\ &\geqslant \ln(n+1) - \ln(1) \\ &\geqslant \ln(n+1) \end{aligned}$$
   De même on sait que, pour tout $k \geqslant 2$
   $$\frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)+1} \leqslant \ln((k-1)+1) - \ln(k-1) \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
   Ainsi
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) \qquad \text{on reconnait ici une somme téléescopique}$$
$$\geqslant 1 + \ln(n) - \ln(2-1) \qquad \geqslant 1 + \ln(n)$$

On a bien obtenu l'encadrement

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

3. De l'encadrement précédent on tire

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

C'est-à-dire

$$\forall n \geqslant 2 \qquad 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Réponse de l'exercice 16.17

Soit $h \in R^*$, la fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis. Pour fixer les idées on prendra $h > 0$.

Il existe donc $c_h \in]0, h[$ tel que

$$\frac{\arctan(h) - \arctan(0)}{h - 0} = f'(c_h)$$

Posons $\theta_h = \frac{c_h}{h}$. On a alors $\theta_h \in]0, 1[$ tel que $f(h) = hf'(\theta_h h)$.

C'est-à-dire

$$\frac{h}{1 + h^2\theta_h^2} = \arctan(h)$$

D'où

$$\theta_h^2 = \frac{1}{h\arctan(h)} - \frac{1}{h^2}$$

Puis, comme $\theta_h \geqslant 0$,

$$\theta_h = \sqrt{\frac{1}{h\arctan(h)} - \frac{1}{h^2}}$$

Ce qui prouve l'unicité de θ_h.

On a

$$\theta_h = \sqrt{\frac{h - \arctan(h)}{h^2\arctan(h)}}$$

Déterminer la limite de θ_h nécessite des connaissances d'équivalents (ou de développements limités) un peu poussées : Il faut en effet savoir que $\arctan(h) \underset{0}{\sim} h$ et $h - \arctan(h) \underset{0}{\sim} \frac{h^3}{3}$.

Sachant cela, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \theta_h = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Réponse de l'exercice 16.18

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $C \in [a, +\infty[$ tel que

$$\forall x \geqslant C \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f'(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

f est dérivable sur $[a, +\infty[$ donc sur $[C, +\infty[$. Soit $x > C$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à entre C et x. Il existe alors $c_x > C$ tel que $\dfrac{f(x) - f(C)}{x - C} = f'(c_x)$ D'où $\ell - \varepsilon \leqslant \dfrac{f(x) - f(C)}{x - C} \leqslant \ell + \varepsilon$

Ainsi, pour tout $x > C$ on a

$$\ell - \varepsilon + \frac{f(C)}{x - c} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \ell + \varepsilon + \frac{f(C)}{x - C}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(C)}{x - C} = 0$, ainsi, il existe $C' >$ tel que

$$\forall x > C' \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{f(C)}{x - C} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, en notant $C'' = \max(C, C')$, on a

$$\forall x > C'' \qquad \ell - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \ell + 2\varepsilon$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists C > 0 \quad x > C'' \Rightarrow \ell - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \ell + 2\varepsilon$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{x + \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Réponse de l'exercice 16.19

On introduit l'application φ définie sur $[x_0, x_0 + h]$ par $\varphi(t) = f(t + h)`f(t)$.

On constate que $f(x_0 + 2h)`2f(x_0 + h) + f(x_0) = \varphi(x_0 + h)`\varphi(x_0)$.

L'application φ est deux fois dérivable sur $[x_0, x_0 + h]$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements fini entre x_0 et $x_0 + h$. Il existe donc $c_h \in]x_0, x_0 + h[$ tel que

$$\varphi(x_0 + h)`\varphi(x_0) = h\varphi'(c_h)$$

Or $\varphi'(c_h) = f'(c_h + h)`f'(c_h)$. f est deux fois dérivable sur $[x_0, x_0 + 2h]$ donc f' est dérivable sur $[c_h, c_h + h]$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis entre c_h et $c_h + h$.

Il existe donc $x_h \in]c_h, c_h + h[\subset]x_0, x_0 + 2h[$ tel que $f'(c_h + h) - f'(c_h) = hf''(x_h)$.

D'où

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = h^2 f''(x_h)$$

Réponse de l'exercice 16.20

1. Soit $h : x \mapsto (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$. h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On a $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

2. Soit $x \in]a,b[$, de manière similaire à la question précédente, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$$

On a $a < c_x < x$, d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$.
De notre égalité précédente on tire, si $g(x) \neq 0$ et $g(c_x) \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

et donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$$

Ce résultat est connu sous le nom de règle de l'Hospital.

Réponse de l'exercice 16.21

Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) \text{ si } x = a \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \psi : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) \text{ si } x = b \end{cases} \end{array}$$

φ et ψ sont alors continues sur $[a,b]$. On observe que $\varphi(b) = \psi(a)$. φ étant continue, $\varphi([a,b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il contient en outre $\varphi(a) = f'(a)$ et $\varphi(b)$ donc contient l'intervalle $[f'(a), \varphi(b)]$.

De même, on a $[\varphi(b), f'(b)] \subset \psi([a,b])$

Soit $y \in [f'(a), f'(b)]$. De deux choses l'une :

— Soit $y \in \varphi([a,b])$;
— Soit $y \in \psi([a,b])$.

Dans le premier cas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = \varphi(c)$. Dans le second cas, toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = \psi(c)$.

On a alors

$$y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \qquad \text{ou bien } y = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

Quelle que soit la situation on a, d'après le théorème des accroissements finis, $d \in]a,b[$ tel que

$$y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(d) \qquad \text{ou bien } y = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(d)$$

On a ainsi trouvé $d \in]a,b[$ tel que $y = f'(d)$. f' prend donc bien toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Réponse de l'exercice 16.22

Soit $\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) - \dfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda x^5 \end{array}$.

g est impaire, ses dérivées d'ordre pair sont donc nulles en 0 (pour le voir dériver $f(x) - f(-x)$). On choisit λ de sorte que $\varphi(1) = 0$

φ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1] \qquad \varphi'(x) = \frac{2}{3}g'(x) - \frac{x}{3}g''(x) - \frac{2}{3}g'(0) + 5\lambda x^4$$

On peut lui appliquer le théorème de Rolle entre 0 et 1. Il existe donc $c_1 \in]0,1[$ tel que

$$0 = \varphi'(c_1)$$

On a de plus $\varphi'(0) = 0$. La fonction φ est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$\forall x \in [0,1] \qquad \varphi''(x) = \frac{2}{3}g''(x) - \frac{x}{3}g^{(3)} - \frac{1}{3}g''(x) + 20\lambda x^3$$

On peut alors appliquer le théorème de Rolle à φ' entre 0 et c_1. il existe donc c_2 tel que $\varphi''(c_2) = 0$.

φ'' est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$\forall x \in [0,1] \qquad \varphi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}g^{(4)}(x) + 60\lambda x^2$$

Ainsi $\varphi''(0) = 0$, on peut alors appliquer le théorème de Rolle à φ'' entre 0 et c_2. il existe donc c_3 tel que $\varphi(3)(c_3) = 0$.

C'est-à-dire

$$-\frac{c_3}{3}g^{(4)}(c_3) + 60\lambda c_3^2$$

D'où $g^{(4)}(c_4) = 180\lambda c_3$.

Finalement, on applique le théorème des accroissements finis à $g^{(4)}$ entre 0 et c_4. Il existe donc $c \in]0, c_4[\subset]0,1[$ tel que

$$g^{(4)}(c_4) - g^{(4)}(0) = c_4 g^{(5)}(c)$$

On sait de plus que $g^{(4)}(c_4) = 180\lambda c_3$, on a alors $g^{(5)}(c) = 180\lambda$ et donc $\lambda = \frac{1}{180}g^{(5)}(c)$.

L'égalité $\varphi(1) = 0$ devient alors

$$g(1) = \frac{1}{3}(g'(1) + 2g'(0)) - \frac{1}{180}g^{(5)}(c)$$

Réponse de l'exercice 16.23

1. Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$. On a alors $\ln(a) < \ln(b)$.
   La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[\ln(a), \ln(b)]$. Il existe ainsi $c \in [\ln(a), \ln(b)]$ tel que
   $$\frac{e\ln(b) - e^{\ln(a)}}{\ln(b) - \ln(a)} = e^c$$
   La fonction exponentielle étant croissante on a alors $e^{\ln(a)} \leqslant e^c \leqslant e^{\ln(b)}$. C'est-à-dire
   $$a \leqslant \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leqslant b$$
   Soit $x \in]0,1[$, l'inégalité précédente appliquée à $a = x$ et $b = 1$ donne
   $$0 < x \leqslant \frac{1-x}{-\ln x} \leqslant 1$$
   Toutes les quantités considérées sont positives, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a ainsi
   $$\frac{1}{x} \geqslant -\ln x 1 - x \geqslant 1$$

On a $x <$ d'où $1 - x > 0$ et donc

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

Pour $x > 1$ on applique la première inégalité à $a = 1$ et $b = x$, d'où

$$1 \leqslant \frac{x-1}{\ln x} \leqslant x$$

Puis, les quantités considérées étant toutes positives

$$1 \geqslant \frac{\ln x}{x-1} \geqslant \frac{1}{x}$$

Et enfin, comme $x - 1 > 0$,

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$$

On peut remarquer que, dans le cas $x = 1$,cette inégalité devient $0 \leqslant 0 \leqslant 0$ et est donc aussi vraie pour $x = 1$.

2. Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$ et soit $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt[3]{(1+x)} \end{array}$

   f est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.
   Pour $x \in]0, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}^2}$$

   Si $x \in [a, b]$ alors, par croissance de la fonction racine cubique on a

$$\sqrt[3]{1+a} \leqslant \sqrt[3]{1+x} \leqslant \sqrt[3]{1+b}$$

   Puis, comme toutes les quantités considérées sont positives et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt[3]{1+a}^2 \leqslant \sqrt[3]{1+x}^2 \leqslant \sqrt[3]{1+b}^2$$

   Et donc

$$f'(a) \geqslant f'(x) \geqslant f'(b)$$

   L'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre a et b nous donne alors

$$f'(b)(b-a) \leqslant \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant f'(a)(b-a)$$

   Il suffit de remarquer que, comme $a > 0$, alors $f'(a) \leqslant \frac{1}{3}$, pour obtenir

$$\sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant \frac{b-a}{3}$$

3. La fonction $g : x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Pour $c \in]-1, 1[$ on a

$$g'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

   Soit $x \in]0, 1[$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à g entre 0 et x. Il existe alors $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0} = g'(c)$$

   Comme $c \in]0, x[$ alors $0 \leqslant c^2 \leqslant x^2$, d'où $1 \geqslant 1 - c^2 \geqslant 1 - x^2$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ On obtient ainsi l'inégalité voulue

$$\arcsin(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. La fonction $h : x \mapsto \arctan(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $c \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

Soit $x > 0$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à h entre 0 et x. Il existe alors $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = h'(c)$$

Comme $c \in]0, x[$ alors $0 \leqslant c^2 \leqslant x^2$, d'où $1 \leqslant 1 + c^2 \leqslant 1 - x^2$ et donc $\frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{1+x^2}$ On obtient ainsi l'inégalité voulue

$$\arctan x \geqslant \frac{x}{1+x^2}$$

Réponse de l'exercice 16.24

1. On va montrer par récurrence le résultat suivant :
$\mathcal{H}_n$: Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Initialisation :
Il nous faut prouver $\mathcal{H}_1$: Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

Il s'agit d'un résultat bien connu du cours sur la dérivation.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et g sont en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ et ainsi $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$(f \times g)' = f'g + fg'$$

f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$, f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc en particulier de classe $\mathcal{C}^n$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $f'g$ et fg' sont alors de classe $\mathcal{C}^n$. Ainsi $(fg)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et donc fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a de plus

$$(f'g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)}$$
$$(fg')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times (g')^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)'\right)^{(n)} \\
&= \left(f'g + g'f\right)^{(n)} \\
&= (f'g)^{(n)} + fg')^{(n)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} \times g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \qquad \text{on prend } j = k+1$$

on prend $k = j$ et on sort les termes extremaux

$$= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f g^{(n+1)}$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)}$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$$

On a donc prouvé $\mathcal{H}_{n+1}$: si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$$

Par récurrence on a ainsi montré que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

2. Soit $f : t \mapsto e^{at}$ et $g : t \mapsto e^{bt}$.
   f et g sont alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a, pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$f(k)(t) = a^k f(t) \qquad g^{(k)}(t) = b^k g(t)$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et on a

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k f \times b^{n-k} g$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} \right) fg$$

   D'un autre coté on a $fg : t \mapsto e^{(a+b)t}$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(fg)^{(n)} = (a+b)^n (fg)(t)$$

Ainsi, on a,en égalisant les deux expressions obtenues, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n(fg)(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}\right)(fg)(t)$$

En particulier, pour $t = 0$ on obtient la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Réponse de l'exercice 16.25

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

Soit $a : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $b : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.
Alors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on a $f_1(x) = a(x)b(x)$
De plus, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ on a

$$a^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \qquad b^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

Ainsi, d'après la formule de Leibniz, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$,

$$\begin{aligned}
f_1^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \frac{(-1)^(n-k)(n-k)!}{(x+1)^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^n k!(n-k)! \frac{1}{(x-1)^{k+1}} \frac{(x+1)^k}{(x+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \frac{1}{x-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+1)^k}{(x-1)^k} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \frac{1}{x-1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \frac{1}{x-1} \frac{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}} \\
&= (-1)^n n! \frac{(x-1)^{n+1} - (x+1)^{n+1}}{(x-1)^{n+1}(x+1)^{n+1} x - 1 - (x+1)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \frac{(x-1)^{n+1} - (x+1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Soit $a : x \mapsto \sin(x)$ et $b : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Alors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a $f_1(x) = a(x)b(x)$ De plus, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ on a

$$b^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

$$\begin{cases} a^{(4k)}(x) = \sin(x) \\ a^{(4k+1)}(x) = \cos(x) \\ a^{(4k+2)}(x) = -\sin(x) \\ a^{(4k+3)}(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

Ainsi, d'après la formule de Leibniz, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{impair}}}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} \sin(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k}} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k}} \\ &= \sin(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k}} + \cos(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k}} \end{aligned}$$

Le résultat (comme souvent quand on calcule des dérivées n-ième) ne se simplifie pas plus.

$f_3 : x \mapsto \sin(4x)$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} f_3^{(4k)}(x) = 4^{4k} \sin(4x) \\ f_3^{(4k+1)}(x) = 4^{4k+1} \cos(4x) \\ f_3^{(4k+2)}(x) = -4^{4k+2} \sin(4x) \\ f_3^{(4k+3)}(x) = -4^{4k+3} \cos(4x) \end{cases}$$

$f_4 : x \mapsto \cos^2 x$.

On sait que, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, d'où

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Et donc pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} f_4^{(4k)}(x) = 2^{4k-1} \cos(2x) \text{ sauf dans le cas particulier } k = 0 \\ f_4^{(4k+1)}(x) = -2^{4k} \sin(2x) \\ f_4^{(4k+2)}(x) = -2^{4k+1} \cos(2x) \\ f_4^{(4k+3)}(x) = 2^{4k+2} \sin(2x) \end{cases}$$

$f_5 : x \mapsto \sin^3 x$

On se souvient évidemment de comment linéariser les puissances de sin et cos. Ici on a, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3$$

$$= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$
$$= -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}$$

Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} f_5^{(4k)}(x) = \dfrac{-3^{4k}\sin(3x) + 3\sin(x)}{4} \\ f_5^{(4k+1)}(x) = \dfrac{-3^{4k+1}\cos(3x) + 3\cos(x)}{4} \\ f_5^{(4k+2)}(x) = \dfrac{3^{4k+2}\sin(3x) - 3\sin(x)}{4} \\ f_5^{(4k+3)}(x) = \dfrac{3^{4k+3}\cos(3x) - 3\cos(x)}{4} \end{cases}$$

$f_6 :$ $x \mapsto \sin^5 x$.

On a, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^5(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$$
$$= \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{5ix}}{32i}$$
$$= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}$$

Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} f_6^{(4k)}(x) = \dfrac{5^{4k}\sin(5x) - 5 \times 3^{4k}\sin(3x) + 10\sin(x)}{16} \\ f_6^{(4k+1)}(x) = \dfrac{5^{4k+1}\cos(5x) - 5 \times 3^{4k+1}\cos(3x) + 10\cos(x)}{16} \\ f_6^{(4k+2)}(x) = \dfrac{-5^{4k+2}\sin(5x) + 5 \times 3^{4k+2}\sin(3x) - 10\sin(x)}{16} \\ f_6^{(4k+3)}(x) = \dfrac{-5^{4k+3}\cos(5x) + 5 \times 3^{4k+3}\cos(3x) - 10\cos(x)}{16} \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 16.26

$x \mapsto 1 + x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1, +\infty[$ et prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1, +\infty[$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On va procéder par récurrence. Notons $\mathcal{H}_n$ l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

où P_n est un polynôme de degré n vérifiant

$$P_n = (1+x^2)P_{n-1}' - (2n-1)xP_{n-1}$$

<u>Initialisation :</u>

Posons $P_0 = 1$, on a bien, pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = \dfrac{P_0(x)}{(1+x^2)^{0+\frac{1}{2}}} = P_0(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= P_0'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + P_0(x)\left(-\frac{1}{2}\right)2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= P_0'(x)(1+x^2)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}-1} + P_0(x)\left(-\frac{1}{2}\right)2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{(1+x^2)P_0'(x) - (2\times 1-1)xP_0(x)}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Notons $P_1(x) = (1+x^2)P_0'(x) - (2\times 1 - 1)xP_0(x)$, P_1 vérifie la formule de récurrence voulue et on a bien

$$f^{(1)} = \frac{P_1(x)}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}}$$

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Montrons qu'alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie
On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = P_n(x)(1+x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

D'où, en dérivant cette relation, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'(x)(1+x^2)^{-n-\frac{1}{2}} + P_n(x)\left(-n-\frac{1}{2}\right)2x(1+x^2)^{-n-1-\frac{1}{2}} \\ &= P_n'(x)(1+x^2)(1+x^2)^{-n-1-\frac{1}{2}} + P_n(x)(-2n-1)x(1+x^2)^{-n-1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2) - (2n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Notons $P_{n+1}(x) == (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)$. P_{n+1} vérifie la formule de récurrence voulue et on a bien

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}$$

Ce qui prouve $\mathcal{H}_{n+1}$ et achève la récurrence.

Réponse de l'exercice 16.27

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} \end{array}$. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x)$$

$$f''(x) = 2xf'(x) + 2f(x)$$

$$f^{(3)}(x) = 2xf''(x) + 4f'(x)$$

Guidé par les premières dérivées on va prouver par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n+2)} : x \mapsto 2xf^{(n+1)}(x) + (2n+2)f^{(n)}(x)$

On note donc

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+2)} : x \mapsto 2xf^{(n+1)}(x) + (2n+2)f^{(n)}(x)$$

On a déjà prouvé $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+2)} : x \mapsto 2xf^{(n+1)}(x) + (2n+2)f^{(n)}(x)$$

$f^{(n+2)}$ est dérivable car f est de classe $\rfloor^{\infty}$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+3)} : x \mapsto 2xf^{(n+2)}(x) + 2f^{(n+1)}(x) + (2n+2)f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n+2)}(x) + (2(n+1)+2)f^{(n+1)}(x)$$

On a donc prouvé $\mathcal{H}_{n+1}$.

Ainsi, par récurrence, on a montré que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+2)} : x \mapsto 2xf^{(n+1)}(x) + (2n+2)f^{(n)}(x)$$

Réponse de l'exercice 16.28

Soit $n \in \mathbb{N}$,et soit $g \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n e^{-x} \end{array}$

On sait que $f : x \mapsto x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

De même $h \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$$

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, d'après la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x} \\ &= e^{-x}(n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-k} \\ &= e^{-x}(n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k! \times (-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Le calcul ne se simplifie pas plus.

Réponse de l'exercice 16.29

Soit $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$ et soit $g : x \mapsto (x-a)^n$ et $h : x \mapsto (x-b)^n$. f, g et h sont des fonctions polynomiales et, à ce titre, sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a de plus, pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \qquad h^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}(x-b)^k$$

D'après le formule de Leibniz on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} fracn!k!(x-a)^{n-k} fracn!k!(x-b)^k$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} (x-a)^{n-k} (x-b)^{k}$$

En particulier, si $a = b = 0$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{(2n)!}{n!} x^n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} x^{n-k} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \binom{2n}{n}$$

On retrouve là un cas particulier de la formule de Vandermonde vue en début d'année.

Chapitre 17

Développements limités et analyse asymptotique

Exercices

On notera $DL_n(a)$ pour désigner le développement limité à l'ordre n en a.

Exercice 17.1

1. Rappeler le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x$
2. En déduire le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Exercice 17.2

1. Donner un $DL_1(0)$ de la fonction $x \mapsto \tan(x)$
2. Rappeler la dérivée de la fonction tan
3. En déduire un $DL_3(0)$ de la fonction tan
4. Donner un $DL_3(0)$ des fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x) - 1$.
5. Retrouver le résultat de la question 3. par un quotient de DL

Exercice 17.3

1. Donner les $DL_3(0)$ des fonctions $f : x \mapsto \ln(1 - 3x) + \sqrt{1 + 2x}$, $g : x \mapsto -2\cos(x) + 4e^{3x}$
2. En déduire, s'ils existent, les $DL_3(0)$ des fonctions $f + g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $\ln(g)$.

Exercice 17.4

Donner les DL suivants

1. $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
2. $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \cos(x)e^x$
3. $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto x(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$

4. $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$

Exercice 17.5

Donner les DL suivants

1. $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \ln(1+\cos(2x))$
2. $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$
3. $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$
4. $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)$
5. $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \cos\left(e^x - \sqrt{1-x}\right)$

Exercice 17.6

Donner les DL suivants

1. $DL_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $f : x \mapsto \sin(x)$
2. $DL_3(3)$ de $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $DL_3(1)$ de $f : x \mapsto \cos(\ln(x))$

Exercice 17.7

Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes

1. $u : x \mapsto \tan(x) - \arctan(x)$
2. $v : x \mapsto e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}$
3. $w : x \mapsto x(2+\cos(x)) - 3\sin(x)$

Exercice 17.8

Calculer (à l'aide de DL) les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\cos(x)-e^x}{\ln(1+x)-\sin(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-(1+x)^{\frac{1}{4}}}{2x^2-\sin(x^2)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 17.9

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{x^2} \end{array}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $(f^{-1})'$ en fonction de f' et f^{-1}.
3. Montrer par récurrence que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que f^{-1} admet un D.L. à tout ordre en 0.
4. En utilisant l'identité $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$, déterminer le D.L. de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Exercice 17.10

Soit $f : \begin{array}{rcl} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x-e^x}{x^2} \end{array}$

1. Déterminer D_f et montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
3. Déterminer la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Exercice 17.11

Soit $g : \begin{array}{rcl} D_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \end{array}$

1. Déterminer D_g, étudier la parité de g.
2. Étudier les variations de g.
3. Étudier l'allure de la courbe de g au voisinage de 0.
4. Étudier l'existence d'asymptotes ainsi que leur position par rapport à la courbe de g.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_g$

Exercice 17.12

Soit $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \end{array}$

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée sera encore notée h.
2. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Exprimer $h'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} h(x)$$
4. Montrer par récurrence que h est infiniment dérivable en 0 et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = 0$. Donner le $DL_n(0)$ de h. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 17.13

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$
2. En déduire un D.L. de f à l'ordre 2 en 0.
3. Déterminer f'
4. Montrer que $f'(x) \underset{0}{\neq} o(x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17.14

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

— $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x\ln(x)}{x+1}$

— $g : x \mapsto \dfrac{xe^x + 1}{x+1}$

— $h : x \mapsto \sqrt{x+1}\ln(x)$

— $k : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x}$

Exercice 17.15

Soit $h : \begin{array}{ccc} D_h & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \end{array}$

1. Déterminer D_h. Donner un D.L. à l'ordre 2 en 0 de h.
2. En déduire l'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_h$ en 0 et étudier la position relative de T_0 et $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$h(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que h admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Préciser l'équation de Δ et la position relative de $\mathcal{C}_h$ et Δ au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0 puis au voisinage de $+\infty$

Réponses

Réponse de l'exercice 17.1

1. On a

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

2. En déduire le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ On a

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n})$$

$$e^{-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^{2n})$$

D'où

$$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1+(-1)^k}{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n})$$

Or $\frac{1+(-1)^k}{2} = 0$ si n est impair et $\frac{1+(-1)^k}{2} = 1$ si n est pair. Ainsi il n'y a que les termes pour k pair dans la somme. D'où

$$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n})$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1-(-1)^k}{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\
&\underset{0}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\
&\underset{0}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 17.2

1. On sait que $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, d'où $\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.
2. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de dérivée $1+\tan(x)^2$.
3. On a
$$1+\tan(x)^2 \underset{0}{=} 1+(x+o(x))^2 = 1+x^2+2xo(x)+o(x)^2 = 1+x^2+o(x^2)$$
Par primitivation de ce DL, on obtient
$$\tan(x) \underset{0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
4. On a
$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
5. On a alors
$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^3+o(x^3) = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$
Puis
$$\tan(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 17.3

1. Donner les $DL_3(0)$ des fonctions $f : x \mapsto \ln(1-3x) + \sqrt{1+2x}$, $g : x \mapsto -2\cos(x) + 4e^{3x}$ On a

$$\ln(1-3x) \underset{0}{=} -(3x) - \frac{(3x)^2}{2} - \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{=} -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+2x} \underset{0}{=} 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{3(2x)^3}{48} + o(x^3) \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3 + o(x^3) + 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{=} 1 - 2x - 5x^2 - \frac{17}{2}x^3 + o(x^3)$$

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad e^{3x} \underset{0}{=} 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 o(x^3)$$

D'où

$$g(x) \underset{0}{=} -2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + 4\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 o(x^3)\right) \underset{0}{=} 2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3)$$

2. On a

$$f(x)+g(x) \underset{0}{=} 1 - 2x - 5x^2 - \frac{17}{2}x^3 + o(x^3) + 2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} 3 + 10x + 14x^2 + \frac{19}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
(f \times g)(x) &\underset{0}{=} \left(1 - 2x - 5x^2 - \frac{17}{2}x^3 + o(x^3)\right)\left(2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3)\right) \\
&\underset{0}{=} 2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3) - 4x + 24x^2 - 38x^3 + o(x^3) - 10x^2 - 60x^3 + o(x^3) - 17x^3 + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} 2 + 8x - 15x^2 - 97x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &\underset{0}{=} \frac{1}{2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3)} \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1 + 6x + \frac{19}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)} \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \left(6x + \frac{19}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) + \left(6x + \frac{19}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right)^2 - \left(6x + \frac{19}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right)^3\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - 6x - \frac{19}{2}x^2 - 9x^3 + o(x^3) + 36x^2 + 2 \times 6 \times \frac{19}{2}x^3 + o(x^3) - 216x^3 + o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{2} - 3x + \frac{53}{4}x^2 - \frac{111}{2}x^3 + o(x^3)$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &\underset{0}{=} \left(1 - 2x - 5x^2 - \frac{17}{2}x^3 + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{2} - 3x + \frac{53}{4}x^2 - \frac{111}{2}x^3 + o(x^3)\right)\\ &\underset{0}{=} \frac{1}{2} - 4x + \frac{67}{4}x^2 - \frac{285}{4}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(g(x)) &\underset{0}{=} \ln\left(2 + 12x + 19x^2 + 18x^3 + o(x^3)\right)\\ &\underset{0}{=} \ln\left(2\left(1 + 6x + \frac{19}{2} + 9x^3 + o(x^3)\right)\right)\\ &\underset{0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + 6x + \frac{19}{2} + 9x^3 + o(x^3)\right)\\ &\underset{0}{=} \ln(2) + \left(6x + \frac{19}{2} + 9x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(6x + \frac{19}{2} + 9x^3 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(6x + \frac{19}{2} + 9x^3 + o(x^3)\right)^3\\ &\underset{0}{=} \ln(2) + 6x - \frac{17}{2}x^2 + 24x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 17.4

1.
$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

2.
$$\cos(x)e^x \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

3.
$$x(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \underset{0}{=} 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

4.
$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)$$

Réponse de l'exercice 17.5

1.
$$\ln(1 + \cos(2x)) \underset{0}{=} \ln(2) - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

2.
$$e^{\cos(x)} \underset{0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$$

3.
$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \underset{0}{=} -1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

4.
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

5.
$$\cos\left(e^x - \sqrt{1-x}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{9x^2}{8} + o(x^2)$$

Réponse de l'exercice 17.6

1. Notons $\tilde{f} : h \mapsto f\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$.
   Pour $h \in \mathbb{R}$ on a alors
$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(h) + \sin(h))\\ &\underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\end{aligned}$$
   On a ensuite $f(x) = \tilde{f}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, d'où
$$f(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

2. Notons $\tilde{f} : h \mapsto f(3 + h)$.
   Pour $h \in \mathbb{R}$ on a alors
$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= \frac{4+h}{2+h}\\ &= \frac{2 + \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}}\\ &\underset{0}{=} \left(2 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)\\ &\underset{0}{=} 2 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\end{aligned}$$
   On a ensuite $f(x) = \tilde{f}(x - 3)$, d'où
$$f(x) \underset{3}{=} 2 - \frac{(x-3)}{2} + \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^3}{8} + o\left((x-3)^3\right)$$

3. Notons $\tilde{f} : h \mapsto f(1 + h)$.
   Pour $h \in \mathbb{R}$ on a alors
$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= \cos(\ln(1+h))\\ &\underset{0}{=} \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)\end{aligned}$$

$$\underset{0}{=} 1 - \frac{\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)^2}{2} + o(h^3)$$
$$\underset{0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3)$$

On a ensuite $f(x) = \tilde{f}(x-1)$, d'où

$$f(x) \underset{1}{=} 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o\left((x-1)^3\right)$$

Réponse de l'exercice 17.7

1. On a
$$\tan(x) - \arctan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$
Ainsi $u(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$
2. On a
$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} &\underset{0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} - e^{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &\underset{0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o(x^3) \\ &\quad - \left(1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$
Ainsi $v(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
3. On a
$$\begin{aligned} x(2 + \cos(x)) - 3\sin(x) &\underset{0}{=} x\left(2 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\ &\underset{0}{=} 3x - \frac{x}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) - 3x + \frac{x}{2} - \frac{x^5}{40} + o(x^5) \\ &\underset{0}{=} \frac{x^5}{60} + o(x^5) \end{aligned}$$
Ainsi $w(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^5}{60}$

Réponse de l'exercice 17.8

1. On a
$$x+\cos(x)-e^x \underset{0}{=} x+1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \underset{0}{=} -x^2+o(x^2)$$
D'où $x+\cos(x)-e^x \underset{0}{\sim} -x^2$
$$\ln(1+x)-\sin(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2)) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
D'où $\ln(1+x)-\sin(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
Finalement on obtient $\frac{x+\cos(x)-e^x}{\ln(1+x)-\sin(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{-\frac{x^2}{2}}=2$, et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos(x)-e^x}{\ln(1+x)-\sin(x)}=2$$

2. On a
$$1-(1+x)^{\frac{1}{4}} \underset{0}{=} 1-\left(1+\frac{1}{4}x+o(x)\right)=-\frac{x}{4}+o(x)$$
D'où $1-(1+x)^{\frac{1}{4}} \underset{0}{\sim} -\frac{x}{4}$
$$2x^2-\sin(x^2) \underset{0}{=} 2x^-\left(x^2+o(x^2)\right) \underset{0}{=} x^2+o(x^2)$$
D'où $2x^2-\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$
Finalement on obtient $\frac{1-(1+x)^{\frac{1}{4}}}{2x^2-\sin(x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x}{4}}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4x}$, et donc
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-(1+x)^{\frac{1}{4}}}{2x^2-\sin(x^2)}=-\infty$$

3. On a
$$\ln(1+x^2)-x\sin(x) \underset{0}{=} x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{0}{=} -\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$
Ainsi $\frac{x^5}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)} \underset{0}{\sim} -3x$ et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}=0$$

4. On a
$$\begin{aligned} e^{x^2+x}-e^{2x} &= e^{2+3(x-1)+(x-1)^2}-e^{2+2(x-1)} \\ &\underset{1}{=} e^2\left(e^{3(x-1)+o(x-1)}-e^{2(x-1)}\right) \\ &\underset{1}{=} e^2\left(1+3(x-1)+o(x-1)-(1+2(x-1)+o(x-1))\right) \\ &\underset{1}{=} e^2(x-1)+o(x-1) \end{aligned}$$
$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \underset{1}{=} -\frac{\pi}{2}(x-1)+o(x-1)$$

Ainsi

$$\frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \underset{1}{\sim} \frac{e^2(x-1)}{\frac{\pi}{2}(x-1)} \underset{1}{\sim} -\frac{2e^2}{\pi}$$

Et donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\frac{2e^2}{\pi}$$

5. Soit $f : x \mapsto \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ et $g : h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$

   On a alors

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{\sin(h)}{h}^{\frac{1}{h^2}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{h^2}\ln\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \exp\left(\frac{1}{h^2}\ln\left(1-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \exp\left(\frac{1}{h^2}\left(-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \exp\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right) \end{aligned}$$

   Ainsi $\lim_{h\to 0^+} g(h) = \lim_{h\to 0^+} \exp\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right) = e^{-\frac{1}{6}}$ et donc, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{h\to 0^+} g(h)$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} e^{-\frac{1}{6}}$$

Réponse de l'exercice 17.9

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$$

   Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(\mathbb{R})$.
   On a de plus

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   Ainsi $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
2. Comme f est dérivable on sait, d'après le théorème de dérivabilité des bijections réciproques que f^{-1} est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}\ ,\ f' \circ f^{-1}(x) \neq 0\}$.
   Comme f' ne s'annule jamais on en déduit que $\{x \in \mathbb{R}\ ,\ f' \circ f^{-1}(x) \neq 0\} = \mathbb{R}$, ainsi f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

3. Montrons par récurrence que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation :
   On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^0$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Hérédité :
   Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et montrons qu'alors elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
   On sait que $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. De plus f et donc f' sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Ainsi, par composition $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
   On a ainsi prouvé que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Young f^{-1} admet un D.L. à tout ordre en 0.
4. f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

   En tant que bijection réciproque d'une fonction impaire f^{-1} est également impaire, en effet pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f^{-1}(-x) = f^{-1}(-f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(f(-f^{-1}(x))) = -f^{-1}(x)$$

   On en déduit que f^{-1} n'a que des termes d'ordre impair dans son développement limité en 0

$$f(x) \underset{0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

   Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ on peut alors sans problème composer les développements limités, on a

$$\begin{aligned}
f^{-1} \circ f(x) &\underset{0}{=} f^{-1}\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) \\
&\underset{0}{=} a_1\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + a_3\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^3 + a_5\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{0}{=} a_1 x + a_1 x^3 + a_1 \frac{x^5}{2} + a_3 x^3 + 3a_3 x^5 + a_5 x^5 + o(x^5) \\
&\underset{0}{=} a_1 x + (a_1 + a_3) x^3 + \left(\frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5\right) x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

   On sait de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1} \circ f(x) = x$$

   En particulier

$$f^{-1} \circ f(x) \underset{0}{=} x + o(x^5)$$

   Par unicité du développement limité de $f^{-1} \circ f(x)$ on a alors

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ \dfrac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5 \end{cases}$$

   C'est-à-dire

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_5 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

   Finalement on obtient

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} x - x^3 + \frac{5x^5}{2} + o(x^5)$$

Réponse de l'exercice 17.10

1. On a $D_f = \mathbb{R}^*$. Pour déterminer l'éventuelle limite de f en 0 on va déterminer si f admet un développement limité en 0. Les questions suivantes nous demandant l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente, on va directement donner un développement limité de f à l'ordre 2 en 0 pour éviter d'avoir à le recommencer ensuite. On a

$$\frac{1+x-e^x}{x^2} \underset{0}{=} \frac{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^2} \underset{0}{=} -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x-\frac{1}{24}x^2+o(x^2)$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, ainsi f se prolonge par continuité en 0 et son prolongement est dérivable en 0 et on a

$$f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(0) - \frac{1}{6}$$

2. À l'aide du développement limité de f en 0 on voit que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation

$$T_0 : y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x$$

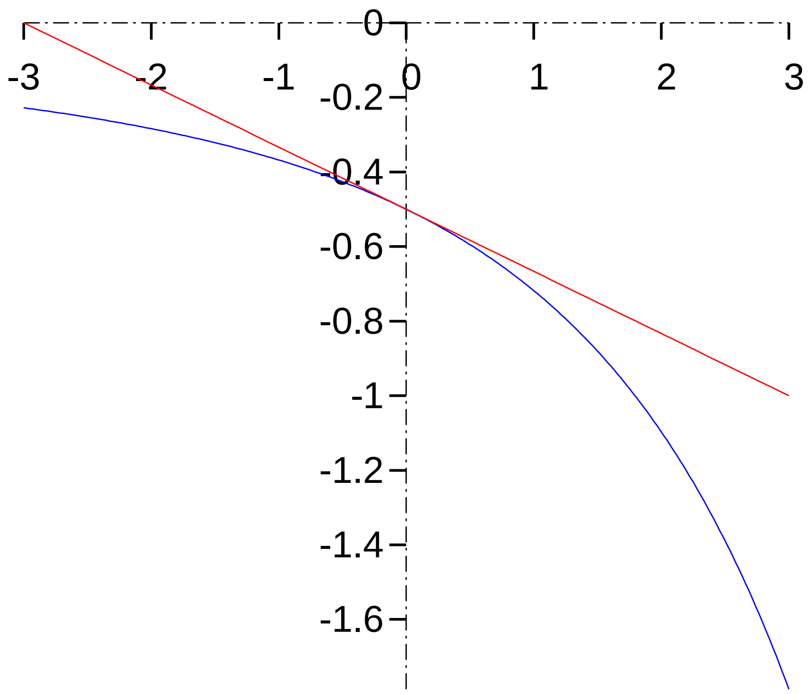
On a de plus

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x\right) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

On sait que $-\dfrac{x^2}{24}$ est négatif pour x au voisinage de 0. Ainsi la courbe de f se trouve en dessous de sa tangente en 0

On trace l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 en traçant d'abord la tangente T_0 puis en traçant une allure de la courbe de f(du bon coté de la tangente). Il ne s'agit que d'une allure, on ne vous demande pas une précision absolue mais une courbe vraisemblable et cohérente avec les résultats prouvés jusqu'alors.

Figure 17.1



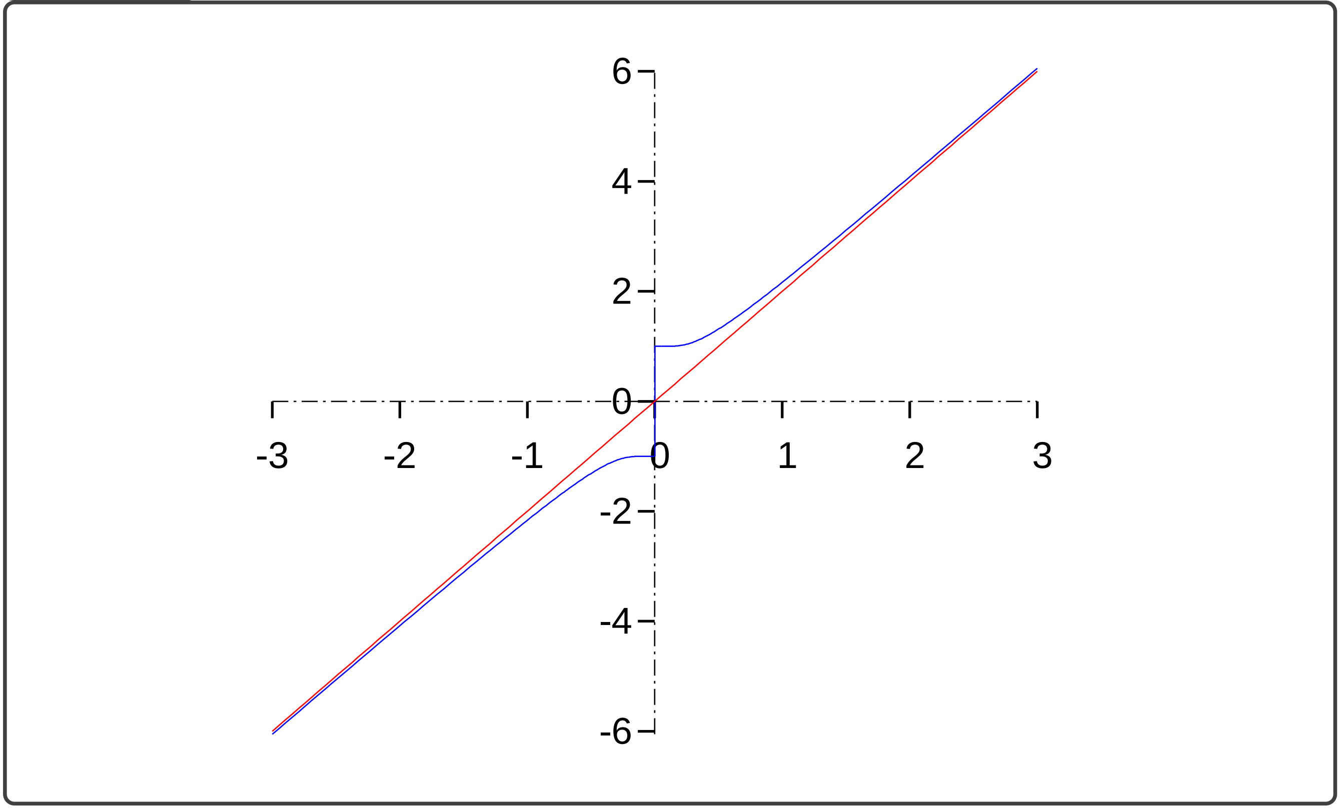
3. Par croissances comparées on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

Réponse de l'exercice 17.11

1. On a
$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \ , \ x \neq 0 \text{ et } e^{\frac{1}{x}} \neq 1\} = \mathbb{R}^*$$
Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a
$$g(-x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}+1}{1-e^{\frac{1}{x}}} = -g(x)$$
g est donc impaire.
2. g est dérivable sur$\mathbb{R}^*$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) - \left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1-e^{\frac{1}{x}}-1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\frac{2}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} > 0 \end{aligned}$$
g est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

3. On a
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$
De plus, pour $x>0$ on a
$$\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}+1}{1-e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1+e^{-\frac{1}{x}}+1}{1-e^{-\frac{1}{x}}}$$
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+e^{-\frac{1}{x}}+1}{1-e^{-\frac{1}{x}}} = 1$ on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$.
On a également
$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$$
Ainsi $\mathcal{C}_g$ admet en $0*^-$ une demi-tangente d'équation $y=-1$ et en 0^+ une demi-tangente d'équation $y=1$.
4. En 0 on a
$$\begin{aligned}
\frac{e^x+1}{e^x-1} &\underset{0}{=} \frac{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)\right)\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+x+\frac{x^2}{2}-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(2+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \underset{+\infty}{=} 2x+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \underset{-\infty}{=} 2x+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$
Ainsi $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote oblique d'équation $y=2x$ en $+\infty$ et $-\infty$. Comme $\dfrac{1}{6x}$ est positif au voisinage de $+\infty$ et négatif au voisinage de $-\infty$ ainsi $\mathcal{C}_g$ est au dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous de son asymptote en $-\infty$.
5. On commence par tracer les demi-tangentes en 0 et les asymptotes obliques puis on complète l'allure de $\mathcal{C}_g$

Figure 17.2



Réponse de l'exercice 17.12

1. On a $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Ainsi on peut prolonger la fonction h par continuité en 0 par

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Sur $\mathbb{R}^*$, h est une composée de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, ainsi h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Pour $x \neq 0$ on a

$$h'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}h(x)$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(n)}(x)\frac{P_n(x)}{x^{3n}}h(x)$$

   Initialisation :
   On sait déjà que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(0)}(x) = h(x) = \frac{1}{x^{3\times 0}}h(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(1)}(x) = h'(x) = \frac{2}{x^{3\times 1}}h(x)$$

   Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(n)}(x)\frac{P_n(x)}{x^{3n}}h(x)$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \left(h^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nP_n(x)x^{3n-1}}{x^{6n}}h(x) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\frac{2}{x^3}h(x) \\ &= \frac{x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x)}{x^{3n+3}}h(x) + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}}h(x) \\ &= \frac{x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}}h(x) \end{aligned}$$

Posons alors $P_{n+1} = X^3P_n' + (2 - 3nX^2)P_n$, on a alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(n+1)}(x)\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}h(x)$$

Ce qui montre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

4. Montrons par récurrence que h est n fois dérivable en 0 pour tout entier n et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = 0$.

Initialisation :
Soit $x \neq 0$, on a alors

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

On sait par croissance comparée que $\lim\limits_{u \to +\infty} u\exp(-u^2) = 0$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u\exp(-u^2) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$. La fonction h est donc dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que h est n fois dérivable en 0 et que $h^{(n)}(0) = 0$.
Soit $x \neq 0$, on a alors

$$\frac{h^{(n)}(x) - h^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}h(x)$$

On sait par croissance comparée que $\lim\limits_{u \to +\infty} u^{3n+1}\exp(-u^2) = 0$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u^{3n+1}\exp(-u^2) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{3n+1}}h(x) = 0$ et, comme, P_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}h(x) = 0$. $h^{(n)}$ est donc dérivable en 0 et $\left(h^{(n)}\right)'(0) = 0$. C'est-à-dire h est $n+1$ fois dérivable en 0 et $h^{(n+1)}(0) = 0$, ce qui achève la récurrence.

Comme h est infiniment dérivable en 0 alors, d'après la formule de Taylor-Young, h admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$h(x) \underset{0}{=} h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Comme $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a donc

$$h(x) = 0 + o(x^n)$$

h admet donc un développement limité à tout ordre en 0 dont la partie régulière est nulle. Cette fonction peut fournir un contre-exemple à beaucoup d'idées fausses que l'on pourrait avoir comme par exemple penser qu'une fonction est entièrement caractérisée par son développement limité puisqu'ici h et la fonction nulle on le même développement limité mais que h ne s'annule jamais en dehors de 0.

Réponse de l'exercice 17.13

1. oit $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x)}{x} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$

   Ainsi
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad -|x| \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$$
   D'après le théorème des gendarmes on a alors
   $$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
   D'où $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, c'est-à-dire $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$
2. D'après la question précédente on a alors
   $$f(x) \underset{0}{=} 0 + o(x^2)$$
3. Pour $x \neq 0$ on a
   $$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
4. Pour $x \neq 0$ on a
   $$\frac{f'(x)}{x} = 3x \ sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   On sait que $\displaystyle\lim_{x \to 0} 3x \ sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ mais $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 et en particulier ne tend pas vers 0. Ainsi $\dfrac{f'(x)}{x}$ ne tend pas vers 0, c'est-à-dire
   $$f'(x) \underset{0}{\neq} o(x)$$
   f est alors une fonction dérivable qui admet un développement limité à l'ordre 2 mais dont la dérivée n'admet pas de développement limité à l'ordre 1, elle illustre donc le fait que l'on ne peut à priori pas dériver les développements limités

---

Réponse de l'exercice 17.14

— Soit $f \ : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2 + x\ln(x)}{x+1} \end{array}$

  On a alors
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Pour $x > 0$ on a

$$f(x) - x = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x+1} - x = \frac{x^2 + x\ln(x) - x^2 - x}{x+1} = \frac{x(\ln(x)-1)}{x+1} = \frac{\ln(x)-1}{1+\frac{1}{x}}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet donc une branche parabolique en $+\infty$ de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

— Soit $g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{xe^x+1}{x+1} \end{array}$

Par croissance comparée on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des ordonnées et admet un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$, elle est de plus au dessus de son asymptote en $-\infty$.

— Soit $h \ : \ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1}\ln(x) \end{array}$

Tout d'abord on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, de plus, pour $x > 0$ on a

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}\ln(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Par croissance comparée on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 0$.

$\mathcal{C}_h$ admet donc une branche parabolique en $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des abscisses.

— $k \ : \ \begin{array}{ccc}]-\infty,0]\cup[4,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x} \end{array}$

Pour $x > 4$ on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4x} &= x\sqrt{1-\frac{4}{x}} \\ &\underset{+\infty}{=} x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} x - 2 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}_k$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x - 2$ et $\mathcal{C}_k$ se trouve en dessous de son asymptote (puisque $-\dfrac{1}{2x}$ est négatif au voisinage de $+\infty$).

Pour $x < 0$ on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4x} &= \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{4}{x}} \\ &= -x\sqrt{1-\frac{4}{x}} \\ &\underset{-\infty}{=} -x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{-\infty}{=} -x + 2 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}_k$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ d'équation $y = -x + 2$ et $\mathcal{C}_k$ se trouve en dessous de son asymptote (puisque $\dfrac{1}{2x}$ est négatif au voisinage de $-\infty$).

Réponse de l'exercice 17.15

1. On a $D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et

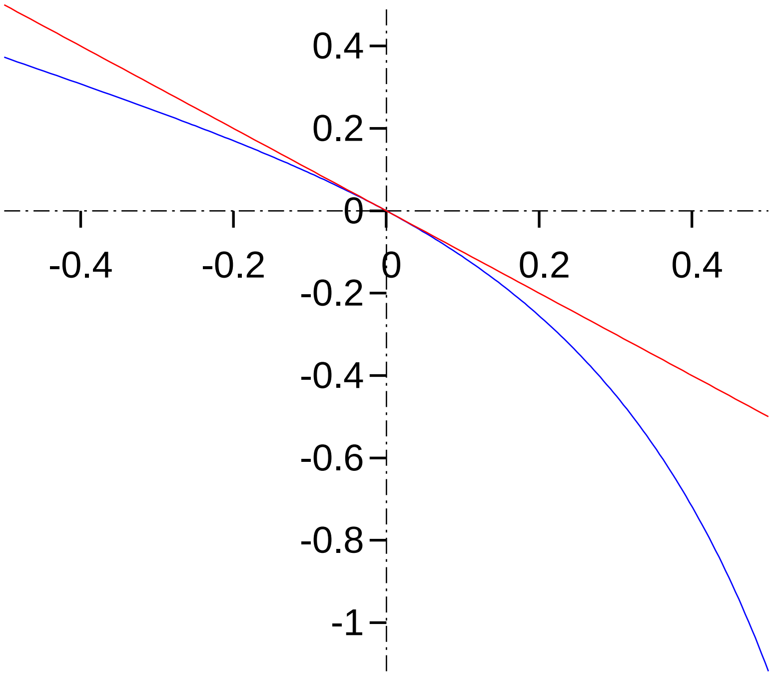
$$\begin{aligned} h(x) &\underset{0}{=} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \\ &\underset{0}{=} -x\sqrt{1+x^2}\frac{1}{1-x} \\ &\underset{0}{=} -x\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x+x^2+o(x^2)\right) \\ &\underset{0}{=} -x-x^2-\frac{3}{2}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

2. La tangente T_0 à $\mathcal{C}_h$ en 0 est donc la droite d'équation $y=-x$. Comme $-x^2$ est négatif au voisinage de 0 alors $\mathcal{C}_h$se trouve en dessous de sa tangente en 0.
3. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\begin{aligned} h(x) &\underset{+\infty}{=} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \\ &\underset{+\infty}{=} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &\underset{+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} x+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

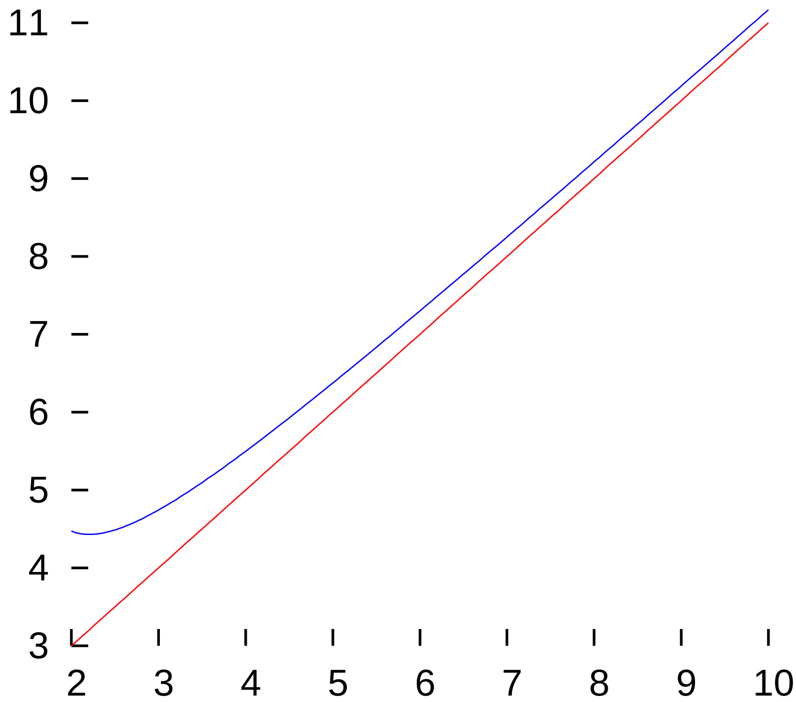
4. On en déduit que h admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ d'équation $y=x+1$ et que $\mathcal{C}_h$ se trouve au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

Figure 17.3 – Allure de $\mathcal{C}_h$ en 0



5.

Figure 17.4 – Allure de $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$



Chapitre 18

Probabilités de base

Exercices

Exercice 18.1

1. Soient A, B et C trois événements.
   Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations sur les ensembles les événements suivants :
   (i) A seul se produit
   (ii) A et C se produisent, mais non B
   (iii) les trois événements se produisent
   (iv) l'un au moins des événements se produit
   (v) au moins deux événements se produisent
   (vi) un événement au plus se produit
   (vii) aucun des trois événements ne se produit
   (viii) deux événements exactement se produisent
   (ix) deux événements au plus se produisent.
2. Monter que
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. Exprimer en fonction des A_n les événements correspondant à la réalisation de
   (i) tous les A_n,
   (ii) au moins un des A_n,
   (iii) aucun des A_n,
   (iv) au plus un des A_n,
   (v) exactement un des A_n,
   (vi) tous les A_n à partir d'un certain rang.

Exercice 18.2

On jette trois dés à 6 faces non pipés.

1. Quel est l'univers de cette expérience ?

2. Quelle probabilité proposez vous pour modéliser cette expérience aléatoire ?
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.
5. Les deux événements considérés aux deux question précédentes sont-ils indépendants ?

Exercice 18.3

Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 0.99 lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade ? Que pensez-vous de ce test ?

Exercice 18.4

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :

— A : « aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules. »
— B : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »
— C : « deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »
— D : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules. »

1. Calculer $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_B(D)$, et $\mathbb{P}_C(D)$.
2. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.
3. Calculer la probabilité de l'événement D.

Exercice 18.5

On lance successivement trois pièces de monnaie. Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. $A = \{$il y a exactement deux « faces »$\}$;
2. $B = \{$il y a au moins deux « faces »$\}$;

Exercice 18.6

1. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Un autre voisin a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 18.7

On lance un dé à 6 faces non cubique. On suppose que la probabilité d'obtenir un chiffre k est proportionnelle à k.

1. Déterminer la constante de proportionnalité
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un chiffre pair
3. Même question avec un dé à $2n$ faces.

Exercice 18.8

On suppose que la probabilité qu'un des réacteurs d'un avion (à plusieurs réacteurs) tombe en panne en cours de vol est $1-p$, indépendamment du comportement des autres moteurs de l'appareil. L'avion peut poursuivre son vol si au moins un réacteur sur deux fonctionne. Pour quelles valeurs de p est-il préférable de voler en avion quadrimoteur plutôt qu'en avion bimoteur ?

Exercice 18.9

Soit un restaurant de 50 places. La probabilité pour qu'une personne, ayant réservé une table, ne vienne pas est de $\dfrac{1}{5}$. Un jour, le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans une situation embarrassante ?

Exercice 18.10

Charles de Gaulle joue au bilboquet. A chaque tentative il a une probabilité $\dfrac{1}{8}$ de réussir. Calculer la probabilité

1. que Charles réussisse du premier coup.
2. qu'il réussisse au bout du 2-ième coup, du 3-ième coup, du n-ième coup.

Exercice 18.11

Sam sait qu'il a une probabilité très faible (disons une chance sur n) de réussir à lancer une pièce de façon à ce qu'elle se stabilise sur sa tranche. Têtu, il décide donc de tenter sa chance n fois.

1. Calculer la probabilité p_n que Sam réussisse au moins une fois.
2. Que devient cette probabilité quand $n \to +\infty$?

Exercice 18.12

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est de $\dfrac{1}{2}$.

1. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé, et on obtient un second 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 18.13

Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Alice pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors que Bob, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Bob est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Alice. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Bob qui l'ait pêché.

Exercice 18.14

Dans une classe de 30 élèves (5 garçons et 25 filles), 60% des filles sont reçues à un examen et 80% des garçons sont reçus. On choisit un élève uniformément au hasard dans la classe. Sachant que cet élève est reçu, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon ?

Exercice 18.15

On dispose de deux dés A et B.

— le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches,
— le dé B a 2 faces noires et 4 faces blanches.

On lance d'abord une pièce de monnaie truquée : PILE tombe avec une probabilité $p \in]0,1[$.

Si on obtient PILE on fait des lancers successifs du dé A, et si on obtient FACE on fait des lancers successifs du dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR au premier lancer de dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR aux deux premiers lancers.
3. Les évènements « obtenir noir au premier lancer »et « obtenir noir au deuxième lancer »sont-ils indépendants ?
4. On a obtenu NOIR aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité d'avoir fait PILE avec la pièce. Déterminer sa limite quand $n \to +\infty$ et interpréter.

Exercice 18.16

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

— qu'il doit intervenir la première semaine,
— que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\dfrac{3}{4}$.
— que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\dfrac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n-ieme semaine »et par p_n la probabilité de E_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$, puis, en fonction de p_n, déterminer $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = \dfrac{13}{20}p_n + \dfrac{1}{10}$
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 18.17

Certaines plantes, par exemple le lupin, se reproduisent par auto-fécondation (ou autogamie). Tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard. On s'intéresse à l'évolution du génotype de la descendance d'une plante mère, concernant un gène qui possède deux allèles A et a.

1. Expliquer ce qui se passe pour la descendance si la plante est de génotype AA ou aa. On suppose désormais que la plante mère est de génotype Aa.
2. Déterminer les probabilités que la descendance de première génération soit une plante de génotype AA, Aa ou aa. Soient les évènements :
   — E_n : « La plante de la n-ième génération est de génotype AA. »
   — F_n : « La plante de la n-ième génération est de génotype Aa. »
   — G_n : « La plante de la n-ième génération est de génotype aa »
3. On note $x_n = \mathbb{P}(E_n)$, $y_n = \mathbb{P}(F_n)$ et $z_n = \mathbb{P}(G_n)$.
   (a) Que valent x_0, y_0 et z_0 ?
   (b) Que vaut $x_n + y_n + z_n$?

(c) Exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

(d) En déduire une expression explicite de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

4. Déterminer les limites de ces trois suites et interpréter.

Exercice 18.18

Un laboratoire fait des tests sanguins pour détecter une maladie. Il détecte 95% des cas de maladie, si elle est présente. 1% des tests sont des tests faux, c'est-à-dire le test indique la maladie chez des gens « sains ». On sait que 0.5% de la population souffre de cette maladie.

Calculer la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test est positif.

Exercice 18.19 Paradoxe de Monty-Hall

Ce problème porte sur un jeu télévisé américain « Let's make a deal »présenté par le canadien Monte Halperin, plus connu sous son nom de scène, Monty Hall. À un moment du jeu, le candidat se retrouve face à 3 portes. Derrière deux d'entre elles se cache une chèvre. Derrière l'une se cache une voiture à gagner. Maintenant voilà l'astuce :

Quand le candidat choisit une porte, le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière les portes, ouvre une des portes qui n'a pas été choisie. Il s'arrange pour que la porte ouverte montre toujours une chèvre. Il demande alors si le candidat veut garder sa porte ou prendre la troisième porte.

Question : Le candidat doit-il changer de porte ? (On justifiera bien sur sa réponse avec des arguments mathématiques rigoureux)

Réponses

Réponse de l'exercice 18.1

1. Soient A, B et C trois événements.

(i) A seul se produit
$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

(ii) A et C se produisent, mais non B
$$A \cap C \cap \overline{B}$$

(iii) les trois événements se produisent
$$A \cap B \cap C$$

(iv) l'un au moins des événements se produit
$$A \cup B \cup C$$

(v) au moins deux événements se produisent
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(vi) un événement au plus se produit, ce qui est la même chose que au moins deux événements ne se produisent pas.
$$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$$

(vii) aucun des trois événements ne se produit

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

(viii) deux événements exactement se produisent

$$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$$

(ix) deux événements au plus se produisent.

$$\overline{A \cap B \cap C}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}\left((A \cup B) \cup C\right) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C \cap B \cap C \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements.

(i) tous les A_n,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

(ii) au moins un des A_n,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

(iii) aucun des A_n,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

(iv) au plus un des A_n,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\neq n} \overline{A_k}$$

(v) exactement un des A_n,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcap_{k\neq n} \overline{A_k} \right)$$

(vi) tous les A_n à partir d'un certain rang.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

Réponse de l'exercice 18.2

1. L'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$
2. En l'absence d'information nous indiquant le contraire, il est raisonnable du supposer les dés équilibrés et les tirages indépendants de sorte que l'on travaillera avec la probabilité uniforme sur Ω.

3. Notons A l'événement « On obtient au moins un as ». Alors $\overline{A}$ est l'événement « On n'obtient aucun as ». On a $\overline{A} = [\![2,6]\!]^3$
Ainsi
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{216-125}{216} = \frac{91}{216}$$
4. Notons B l'événement « On obtient au moins deux faces portant le même chiffre. ». Alors $\overline{B}$ est l'événement « On obtient des faces toutes différentes ».
On a $\text{Card}(B) = 6 \times 5 \times 4 = 120$. En effet on a 6 possibilités pour le résultat du premier dé, puis 5 pour le second (toutes les possibilités sauf le résultat du premier dé) et enfin 4 pour le troisième dé.
Ainsi
$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{216-120}{216} = \frac{96}{216}$$
5. Pour déterminer si A et B sont indépendants il nous faut calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
On a $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \dfrac{91 \times 96}{216^2} = \dfrac{364}{1944}$ et
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 + \mathbb{P}(\overline{A \cup B})$$
$\overline{A \cup B}$ est l'événement « On obtient trois résultats différents et aucun as ». On a $\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{216} = \dfrac{60}{216}$
D'où
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 + \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \frac{91 + 96 - 216 + 60}{216} = \frac{31}{216} = \frac{279}{1944} \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$
A et B ne sont donc pas indépendants.

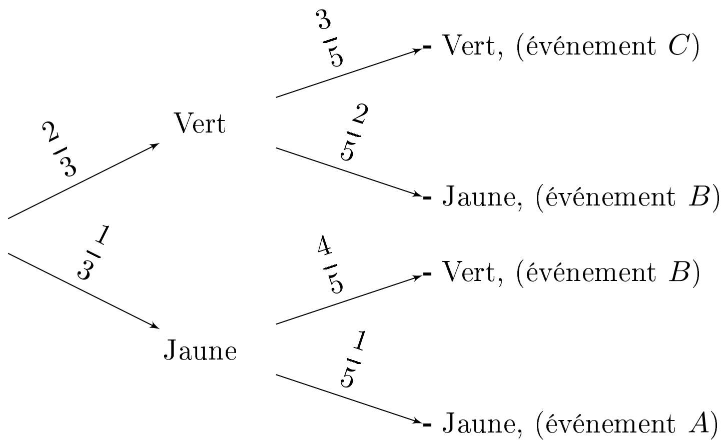
Réponse de l'exercice 18.3

On note T l'événement « le test est positif »et M l'événement « La personne est malade ».
On a alors $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{1000}$, $\mathbb{P}(T|M) = \dfrac{99}{100}$, $\mathbb{P}(T|\overline{M}) = \dfrac{2}{1000}$.
D'après la formule des probabilités totales on a
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{99}{100}\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000}\frac{999}{1000} = \frac{747}{250000}$$
D'après la formule de Bayes on a
$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}\mathbb{P}(T|M) = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{747}{250000}}\frac{99}{100} = \frac{55}{166} \simeq 0.33$$
La probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade est donc d'environ $\dfrac{1}{3}$.

On pourrait (à tort) penser que ce test est alors mauvais. Ce n'est pas le cas. On peut en effet prouver qu'il est impossible mathématiquement de simultanément maximiser la probabilité de détecter les personnes réellement malades et la probabilité qu'un test positif révèle une personne effectivement malade. Il faut alors faire un compromis, préfère-t-on ne pas détecter des personnes malades qui peuvent alors éventuellement propager la maladie (ce qu'on appelle en statistique une erreur de première espèce) ou simplement voir leur santé empirer sans traitement ou détecter à tort des personnes saines dont on s'apercevra lors de tests subséquents de la bonne santé (erreur de seconde espèce) ?

Réponse de l'exercice 18.4

1. On va construire un arbre de probabilité pour le premier tirage



Puis deux arbres pour le second tirage selon si le premier tirage a aboutit à la situation B ou C :
Dans la situation A, il n'y a plus de boules jaunes dans l'urne donc la seule possibilité est de tirer deux boules vertes

Figure 18.1 – Arbre dans la situation B

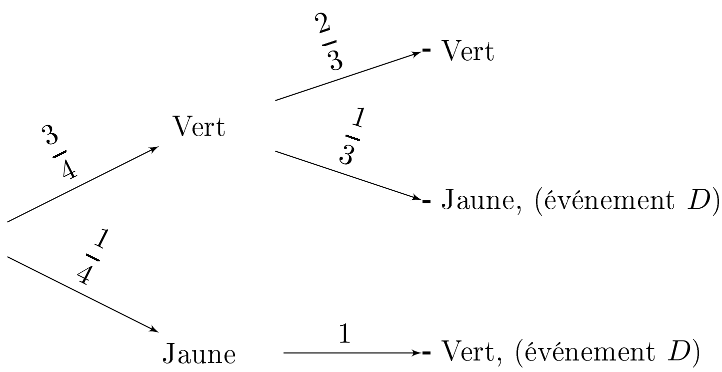
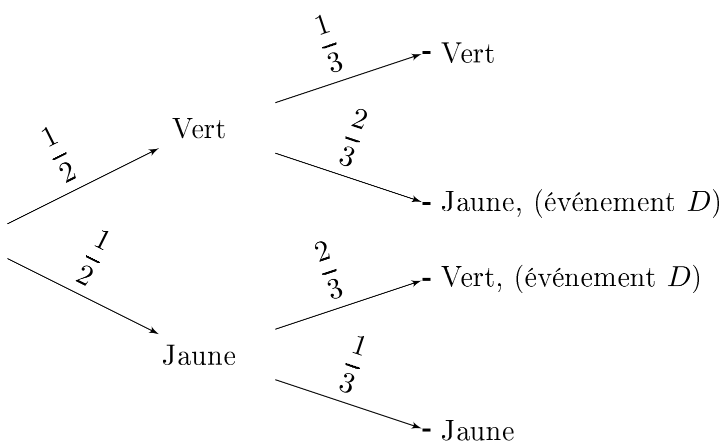


Figure 18.2 – Arbre dans la situation C



On voit alors que $\mathbb{P}_A(D) = 0$,

$$\mathbb{P}_B(D) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2. On a alors

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D)\mathbb{P}(A) = 0$$

$$\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_c(D)\mathbb{P}(C) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

3. D'après la formule des probabilités totale on a

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap B) + \mathbb{P}(D \cap C) = \frac{8}{15}$$

Réponse de l'exercice 18.5

On lance successivement trois pièces de monnaie. L'énoncé ne donnant pas d'indication du contraire on supposera que les pièces sont équilibrées (Pile et Face arrivent respectivement avec une probabilité de $\frac{1}{2}$) et que les tirages sont indépendants. L'univers de notre expérience est alors $\{P, F\}^3$ (de cardinal 8) muni de la probabilité uniforme.

On définit les évènements suivants :

— $A = \{$il y a exactement deux « faces »$\}$;

— $B = \{$il y a au moins deux « faces »$\}$;

On a

$$A = \{FFP, FPF, PFF\} \qquad B = \{FFF, FFP, FPF, PFF\}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Réponse de l'exercice 18.6

L'univers de notre expérience aléatoire est l'ensemble des paires d'enfants possibles en tenant compte de l'ordre de naissance, c'est-à-dire $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ sur lequel on travaille avec la probabilité uniforme.

1. Notons A l'événement « Mon voisin a au moins une fille »et B l'événement « Mon voisin a au moins un garçon ».

   On cherche alors à calculer $\mathbb{P}(B|A)$. On a

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

2. Notons C l'événement « L'ainé est un garçon »et D l'événement « Le puîné est une fille ». On cherche alors à calculer $\mathbb{P}(C|D)$

   On a

$$\mathbb{P}(C|D) = \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

Réponse de l'exercice 18.7

1. Soit C la constante de proportionnalité, c'est-à-dire le réel tel que
$$\mathbb{P}(\{1\}) = 1C \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2C \quad \cdots \quad \mathbb{P}(\{6\}) = 6C$$
On a alors
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\llbracket 1,6\rrbracket) = C \times \sum_{i=1}^{6} k = C \times \frac{6\times 7}{2} = 21C$$
Comme $1 = 21C$ on a alors $C = \dfrac{1}{21}$.
2. Notons A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2,4,6\}$ et
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{2k}{21} = \frac{2}{21} \times \frac{3\times 4}{2} = \frac{12}{21}$$
3. On reprend notre méthode dans le cas d'un dé à $2n$ faces.
Soit C la constante de proportionnalité, c'est-à-dire le réel tel que
$$\mathbb{P}(\{1\}) = 1C \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2C \quad \cdots \quad \mathbb{P}(\{2n\}) = 2nC$$
On a alors
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\llbracket 1,2n\rrbracket) = C \times \sum_{i=1}^{2n} k = C \times \frac{(2n)\times(2n+1)}{2} = Cn(2n+1)$$
Comme $1 = n(2n+1)C$ on a alors $C = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.
4. Notons A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2k\ ,\ k \in \llbracket 1,n\rrbracket\}$ et
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n(2n+1)} = \frac{2}{n(2n+1)} \times \frac{n\times(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n+1}$$

Réponse de l'exercice 18.8

Le quadrimoteur va s'écraser si 3 ou plus de ses moteurs tombent en panne. Chaque moteur a une probabilité $1-p$ de tomber en panne indépendamment des autres moteurs. L'avion va donc s'écraser dans 4 situations incompatibles entre elles :
- $P_1P_2P_3M_4$ (les moteurs $1,2$ et 3 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
- $P_1P_2M_3P_4$ (les moteurs $1,2$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
- $P_MP_2P_3P_4$ (les moteurs $1,3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
- $M_1P_2P_3P_4$ (les moteurs $2,3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
- $P_1P_2P_3P_4$ (les moteurs $1,2,3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $(1-p)^4$

Ainsi $\mathbb{P}($ Le quadrimoteur s'écrase $) = 4p(1-p)^3 + (1-p)^4$
Le bimoteur lui s'écrasera si ses deux moteurs tombent en panne, ce qui arrive avec probabilité $(1-p)^2$.
Il nous faut trouver pour quelles valeurs de p on a $4p(1-p)^3 + (1-p)^4 \leqslant (1-p)^2$

$$\begin{aligned} 4p(1-p)^3 + (1-p)^4 \leqslant (1-p)^2 \Leftrightarrow\ & 4p(1-p)^3 + (1-p)^4 - (1-p)^2 \leqslant 0 \\ & (1-p)^2\left(4p(1-p) + (1-p)^2 - 1\right) \leqslant 0 \\ & (1-p)^2\left(4p - 4p^2 + 1 - 2p + p^2 - 1\right) \leqslant 0 \\ & (1-p)^2\left(2p - 3p^2\right) \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$p(1-p)^2\,(2-3p) \leqslant 0$$

On a $p \geqslant 0$ (et il est vraiment souhaitable que $p \neq 0$) et $(1-p)^2 \geqslant 0$. Ainsi il est préférable de voleur en quadrimoteur si $2-3p \leqslant 0$, c'est-à-dire si $p \geqslant \frac{2}{3}$.

Si les ingénieurs font bien leur travail il est raisonnable de penser que p est très proche de 1 et donc les quadrimoteurs sont plus sûrs que les bimoteurs.

Réponse de l'exercice 18.9

L'univers de notre expérience aléatoire est $\{V, A\}^{52}$ (V pour vient et A pour annule/ne vient pas).

Le patron se trouve dans l'embarras si 51 ou 52 personnes viennent, c'est-à-dire s'il y a 0 ou 1 annulations.

La probabilité qu'il n'y ait aucune annulation est de $\left(\frac{4}{5}\right)^{52}$. La probabilité que le client 1 annule et que les autres viennent est de $\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{51}$. De même la probabilité que le client 2 annule et que tous les autres viennent est de $\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{51}$, etc.

Ainsi la probabilité qu'il y ait exactement une annulation est de $52\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{51}$.

La probabilité que le patron se trouve dans l'embarras est donc de $\left(\frac{4}{5}\right)^{52} + 52\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{51} \simeq 1.27 \times 10^{-4}$, soit un peu plus d'une chance sur 10000, le patron peut donc être rassuré.

Réponse de l'exercice 18.10

1. La probabilité que Charles réussisse du premier coup est $\frac{1}{8}$
2. La probabilité que Charles réussisse au bout du 2-ième coup est la probabilité qu'il rate son premier lancer et réussisse son second, ce qui donne une probabilité de $\frac{7}{8} \times \frac{1}{8}$.
   La probabilité que Charles réussisse du 3-ième coup est la probabilité qu'il rate son premier et son second lancer et réussisse son troisième, ce qui donne une probabilité de $\left(\frac{7}{8}\right)^2 \times \frac{1}{8}$.
   La probabilité que Charles réussisse du n-ième coup est la probabilité qu'il rate ses $n-1$ premiers lancers et réussisse son n-ième lancer, ce qui donne une probabilité de $\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \times \frac{1}{8}$

Réponse de l'exercice 18.11

1. Notons A_n l'événement « Sam réussit au moins une fois ». Alors $\overline{A_n}$ est l'événement « Sam échoue à toutes ses tentatives ».
   On suppose que les lancers successifs sont indépendants. On a alors $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, d'où
   $$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$
2. Il nous faut déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbb{P}(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \exp\left(-1 + o\left(1\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = 1 - e^{-1}$$

Réponse de l'exercice 18.12

On suppose que l'on a pris le dé uniformément au hasard dans le lot de 100 dés et que donc le probabilité qu'il soit pipé est $\frac{1}{4}$, On suppose également que les lancers sont indépendants.

1. D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{ On a obtenu } 6) &= \mathbb{P}(\text{ On a obtenu } 6| \text{ le dé est pipé })\mathbb{P}(\text{ le dé est pipé }) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{ On a obtenu } 6| \text{ le dé est normal })\mathbb{P}(\text{ le dé est normal }) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{24} + \frac{3}{24} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{ Le dé est pipé } | \text{ On a obtenu } 6) &= \frac{\mathbb{P}(\text{ Le dé est pipé })}{\mathbb{P}(\text{ On a obtenu } 6)}\mathbb{P}(\text{ On a obtenu } 6| \text{ Le dé est pipé }) \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Notre dé a donc une chance sur deux d'être pipé.

2. D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{ On a obtenu deux } 6) &= \mathbb{P}(\text{ On a obtenu deux } 6| \text{ le dé est pipé })\mathbb{P}(\text{ le dé est pipé }) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{ On a obtenu deux6}| \text{ Le dé est normal })\mathbb{P}(\text{ Le dé est normal }) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{36}\frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{48} + \frac{1}{48} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Le dé est pipé}|\text{On a obtenu deux 6}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{Le dé est pipé})}{\mathbb{P}(\text{On a obtenu deux 6})}\mathbb{P}(\text{On a obtenu deux 6}|\text{Le dé est pipé}) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}}\frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Notre dé a donc trois chance sur quatre d'être pipé.

Réponse de l'exercice 18.13

Formalisons le problème avec des probabilités, les données de l'énoncé s'interprètent ainsi :

— $\mathbb{P}($ Le poisson observé est un brochet $|$ Le poisson a été péché par Alice $) = \frac{1}{3}$. En effet Alice a pris deux fois plus de gardons que de brochets soit une proportion $\frac{2}{3}$ de gardons et $\frac{1}{3}$ de brochets.

— $\mathbb{P}($ Le poisson observé est un brochet $|$ Le poisson a été péché par Bob$) = \frac{1}{2}$. En effet Bob a pris autant de gardons que de brochets soit une proportion $\frac{1}{2}$ de gardons et $\frac{1}{2}$ de brochets.

— $\mathbb{P}($ Le poisson a été péché par Alice$) = \frac{1}{4}$, en effet Bob a pris trois fois plus de poissons qu'Alice, soit une proportion de $\frac{1}{4}$ de poissons péchés par Alice et de $\frac{3}{4}$ de poissons péchés par Bob

— $\mathbb{P}($ Le poisson a été péché par Bob$) = \frac{3}{4}$

D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet}) \\ &= \mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet } | \text{ Le poisson a été péché par Alice })\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Alice}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet } | \text{ Le poisson a été péché par Bob})\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob}) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} \\ &= \frac{11}{24}\end{aligned}$$

La formule de Bayes nous donne alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob } | \text{ Le poisson est un brochet }) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob })}{\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet })}\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet } | \text{ Le poisson a été péché par Bob }) \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{24}}\frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{11}\end{aligned}$$

Le poisson a donc une probabilité de $\frac{9}{11}$ d'avoir été péché par Bob.

Réponse de l'exercice 18.14

Notons G l'événement « L'élève tiré au hasard est un garçon »et R l'événement « l'élève est reçu ». On a alors

$\mathbb{P}(G) = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(R|G) = \dfrac{4}{5}$.
D'après la formule des probabilités totales on a

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(R|\overline{G}) = \frac{4}{5}\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\frac{5}{6} = \frac{19}{30}$$

Puis, d'après le formule de Bayes on a

$$\mathbb{P}(G|R) = \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(R)}\mathbb{P}(R|G) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{19}{30}}\frac{4}{5} = \frac{4}{19}$$

Sachant qu'un élève est reçu, la probabilité que ce soit un garçon est de $\dfrac{4}{19}$, ce qui est facile à vérifier puisqu'il y a exactement 19 reçus dans la classe et 4 garçons parmi ces 19 reçus.

Réponse de l'exercice 18.15

1. Notons P l'événement « La pièce tombe sur Pile », N l'événement « Le premier lancer de dé donne Noir »et NN l'événement « Les deux premiers lancers de dés donnent Noir ».
   D'après la formule des probabilités totales on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(N|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(N|\overline{P})\mathbb{P}(\overline{P})\\ &= \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}(1-p)\\ &= \frac{1+p}{3}\end{aligned}$$
2. D'après la formule des probabilités totales on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(NN) &= \mathbb{P}(NN|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(NN|\overline{P})\mathbb{P}(\overline{P})\\ &= \frac{2}{3}\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\frac{1}{3}(1-p)\\ &= \frac{1+3p}{9}\end{aligned}$$
3. Notons N_2 l'événement « Obtenir Noir au second lancer ». On montre de la même manière que pour N que $\mathbb{P}(N_2) = \dfrac{1+p}{3}$.
   On a $N \cap N_2 = NN$, $\mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}(N_2) = \dfrac{(1+p)^2}{9}$ et $\mathbb{P}(NN) = \dfrac{1+3p}{9}$
   Ainsi N et N_2 sont indépendants si et seulement si $(1+p)^2 = 1+3p$
   De plus on a
$$\begin{aligned}(1+p)^2 = 1+3p &\Leftrightarrow 1+2p+p^2 = 1+3p\\ &\Leftrightarrow p^2 - p = 0\\ &\Leftrightarrow p(p-1) = 0\end{aligned}$$
   Comme $p \in]0,1[$ on peut alors conclure que n et N_2 ne sont pas indépendants.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons Nn l'événement « On a obtenu NOIR aux n premiers coups »($n \in \mathbb{N}^*$).
   On a alors
$$\mathbb{P}(Nn|P) = \frac{2^n}{3^n} \qquad \mathbb{P}(Nn|\overline{P}) = \frac{1}{3^n}$$

D'après la formule des probabilités totales on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Nn) &= \mathbb{P}(Nn|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(Nn|\overline{P})\mathbb{P}(\overline{P})\\ &= \frac{1+p(2^n-1)}{3^n}\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P|Nn) &= \frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(Nn)}\mathbb{P}(Nn|P)\\ &= \frac{p3^n}{1+p(2^n-1)}\frac{2^n}{3^n}\\ &= \frac{2^n p}{(2^n-1)p+1}\\ &= \frac{p}{p+\frac{1-p}{2^n}}\end{aligned}$$

On voit immédiatement que

$$lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(P|Nn) = \frac{p}{p} = 1$$

Réponse de l'exercice 18.16

1. Par hypothèse on a $\mathbb{P}(E_1) = 1$, $\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{1}{10}$.
   Puis, $\mathbb{P}(E_{n+1}\cap E_n) = \mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(E_n) = \frac{3p_n}{4}$ et $\mathbb{P}(E_{n+1}\cap\overline{E_n}) = \mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\mathbb{P}(\overline{E_n}) = \frac{1-p_n}{10}$.
2. La formule des probabilités totales nous donne alors

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= \mathbb{P}(E_{n+1}\cap E_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}\cap\overline{E_n})\\ &= \frac{3p_n}{4} + \frac{1-p_n}{10}\\ &= \frac{15p_n}{20} + \frac{2-2p_n}{20}\\ &= \frac{13p_n}{20} + \frac{1}{10}\end{aligned}$$

3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Soit $r\in\mathbb{R}$ l'unique réel tel que $r = \frac{13r}{20} + \frac{1}{10}$, c'est-à-dire $r = \frac{2}{7}$. La suite $\left(p_n - \frac{2}{7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite géométrique de raison $\frac{13}{20}$, d'où, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$p_n - \frac{2}{7} = \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{7}\right)$$

D'où

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\frac{5}{7}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \frac{2}{7}$

Réponse de l'exercice 18.17

1. Si la plante est de génotype AA ou aa alors toute sa descendance sera de même génotype que la plante mère.
2. Le génotype de la plante fille correspond à deux tirages successifs uniforme dans l'ensemble $\{A, a\}$. Avec les notations de l'énoncé on a alors

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{4}$$

3. (a) On a $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$
   (b) Les événements E_n, F_n et G_n forment un système complet d'événements (ils sont duex à deux incompatibles et $E_n \cup F_n \cup G_n = \Omega$). Ainsi $x_n + y_n + z_n = 1$
   (c) On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mathbb{P}(E_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}|F_n)\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}|G_n)\mathbb{P}(G_n) \\ &= 1x_n + \frac{1}{4}y_n + 0z_n \\ &= x_n + \frac{y_n}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \mathbb{P}(F_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1}|E_n)\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(F_{n+1}|F_n)\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(F_{n+1}|G_n)\mathbb{P}(G_n) \\ &= 0x_n + \frac{1}{2}y_n + 0z_n \\ &= \frac{y_n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \mathbb{P}(G_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(G_{n+1}|E_n)\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(G_{n+1}|F_n)\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(G_{n+1}|G_n)\mathbb{P}(G_n) \\ &= 0x_n + \frac{1}{4}y_n + 1z_n \\ &= \frac{y_n}{4} + z_n \end{aligned}$$

   (d) D'après la question précédente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où, pour $n \in \mathbb{N}$ $y_n = \frac{1}{2^n}$.
   On a de plus, pour $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} - z_{n+1} = x_n - z_n$. La suite $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut ainsi 0 sa valeur initiale.
   On a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = z_n \qquad x_n + y_n + z_n = 1$$

   D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = z_n = \frac{1 - y_n}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

4. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{1}{2}$$
On peut interpréter ceci comme une disparition quand le temps tend vers l'infini des génotypes « mixtes ».

Réponse de l'exercice 18.18

On note T l'événement « le test est positif »et M l'événement « La personne est malade ».

On a alors $\mathbb{P}(M) = \frac{5}{1000}$, $\mathbb{P}(T|M) = \frac{95}{100}$, $\mathbb{P}(T|\overline{M}) = \frac{1}{100}$.

D'après la formule des probabilités totales on a
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{95}{100}\frac{5}{1000} + \frac{1}{100}\frac{995}{1000} = \frac{147}{10000}$$

D'après la formule de Bayes on a
$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}\mathbb{P}(T|M) = \frac{\frac{5}{1000}}{\frac{147}{10000}}\frac{95}{100} = \frac{95}{294} \simeq 0.32$$

La probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade est donc d'environ $\frac{1}{3}$.

Réponse de l'exercice 18.19

En notant G l'événement « Le joueur gagne la voiture »et B celui « Le joueur avait choisi la bonne porte »on a, par la formule de probabilités totales :
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(G|B) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(G|\overline{B})$$

Dans la stratégie où le joueur ne change pas de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la bonne porte :
$$\mathbb{P}(G|B) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(G|\overline{B}) = 0.$$
Ainsi, $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{3}$.

Dans la stratégie où le joueur change de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la mauvaise porte :
$$\mathbb{P}(G|B) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(G|\overline{B}) = 1.$$
Ainsi, $\mathbb{P}(G) = \frac{2}{3}$.

Chapitre 19

Intégration

Exercices

Exercice 19.1

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan(x)\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\ \mathrm{d}x$, où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,
6. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\ \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\arctan x\ \mathrm{d}x$

Exercice 19.2

1. En utilisant le changement de variable $t = x + \sin(x)$, calculer
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}\ \mathrm{d}x$$
2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$, calculer
$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$$
3. En utilisant le changement de variable $t = \sin(x) - \cos(x)$, calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2-\sin(2x)}\ \mathrm{d}x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, calculer
$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\ \mathrm{d}x$$
5. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, calculer
$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\ \mathrm{d}x$$
6. En utilisant le changement de variable $t = x - \dfrac{1}{x}$, calculer
$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\ \mathrm{d}x$$
7. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, calculer
$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\ \mathrm{d}x$$
8. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, calculer
$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \text{où } a > 0$$
9. En utilisant le changement de variable $t = x^{\frac{1}{6}}$, calculer
$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\ \mathrm{d}x$$
10. En utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$, calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\ \mathrm{d}x$$
11. En utilisant le changement de variable $t = \tan(x)$, calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\ \mathrm{d}x$$

Exercice 19.3

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et déterminer f'.
3. Étudier les variations de f.

4. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$.
5. Déterminer les limites de f en 0,1 et $+\infty$

Exercice 19.4

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Montrer que
$$1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$, on a
$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \qquad \text{et} \ \ \cos(t) = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$
3. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. En posant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ déterminer
$$\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\ \mathrm{d}t \qquad\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(\theta)\cos(t)}\ \mathrm{d}t$$

Exercice 19.5

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-x}^x f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$
2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-x}^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 19.6

Soit $f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\ \mathrm{d}t \end{array}$

1. Étudier la parité de f
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 19.7

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

1. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\ dt$ est une fonction polynomiale et étudier son signe.

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2\ \mathrm{d}t\right)$$

3. En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(t)^2\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 19.8

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que g est positive sur $[a,b]$. On note $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

1. Montrer que

$$m\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

Réponses

Réponse de l'exercice 19.1

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan(x)\ \mathrm{d}x$

On va intégrer le x^2 et dériver le $\arctan(x)$. Soit $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$, et $v(x) = \arctan(x)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\arctan(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x\\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3\arctan(x)}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\int_0^1 x - \frac{x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln(2)}{6}\end{aligned}$$

D'où
$$\int_0^1 x^2 \arctan(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln(2)}{6}$$

2. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x$

On va dériver le $\cos(\ln(x))$ et intégrer le 1. Soit $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(\ln(x))$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x &= \int_1^{e^\pi} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x\cos(\ln(x))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x \times \left(-\frac{1}{x}\sin(\ln(x)\right)\ \mathrm{d}x \\
&= -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On effectue une seconde intégration par parties en dérivant le $\sin(\ln(x))$. Soit $a(x) = x$ et $b(x) = \sin(\ln(x))$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x &= -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x \\
&= -e^\pi - 1 + [x\sin(\ln(x))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x \\
&= -e^\pi - 1 - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x = -e^\pi - 1 - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x$$

D'où
$$\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\ \mathrm{d}x$

On va intégrer un $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et dériver un $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$. Soit $u(x) = \tan(x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{\cos^(x)}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2(x)}\tan^2(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 - \left[\frac{2}{3}\tan^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 2 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$

On va dériver le $\ln(x)$ et intégrer le $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$. Soit $u(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)}$ et $v(x) = \ln(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^1 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ln(2)}{5} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ln(2)}{5} - \frac{1}{2}\left[\ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{5\ln(5) - 13\ln(2)}{20}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{5\ln(5) - 13\ln(2)}{20}$$

5. $\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\ \mathrm{d}x$, où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

Notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\ \mathrm{d}x$. Commençons par remarquer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\lambda \ln(x)^n = 0$, la fonction $x \mapsto x^\lambda \ln(x)^n$ peut alors être prolongée par continuité en 0 par 0 et qu'ainsi I_n a bien un sens.

Si $n = 0$ on a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^\lambda\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda+1}$.

Si $n \geqslant 1$, on va intégrer le x^λ et dériver le $\ln(x)^n$. Soit $u(x) = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda}$ et $v(x) = \ln(x)^n$, on a alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{\lambda+1}\ln(x)^n}{\lambda+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\frac{n}{x}\ln(x)^{n-1}\ \mathrm{d}x \\
&= 0 - \frac{n}{\lambda+1}\int_0^1 x^{\lambda}\ln(x)^{n-1}\ \mathrm{d}x \\
&- \frac{n}{\lambda+1}I_{n-1}
\end{aligned}
$$

On a donc montré que, pour $n > 0$, $I_n = \dfrac{-n}{\lambda+1}I_{n-1}$. D'où

$$
I_n = \frac{-n}{\lambda+1} \times \frac{-(n-1)}{\lambda+1} \times \frac{-(n-2)}{\lambda+1} \times \cdots \times \frac{-1}{\lambda+1} \times I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(\lambda+1)^{n+1}}
$$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$

On va dériver le $\sin(2t)$ et intégrer le $\mathrm{ch}(t)$. Soit $u(t) = \mathrm{sh}(t)$ et $v(t) = \sin(2t)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [\mathrm{sh}(t)\sin(2t)]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\ \mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^{\pi} \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

On va faire une deuxième intégration par parties en dérivant le $\cos(2t)$ et en intégrant le $\mathrm{sh}(t)$. Soit alors $a(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $b(t) = \cos(2t)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= -2\int_0^{\pi} \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\ \mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^{\pi} a'(t)b(t)\ \mathrm{d}t \\
&= -2\left([a(t)b(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} a(t)b'(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= -2\left([\mathrm{ch}(t)\cos(2t)]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= -2\,\mathrm{ch}(\pi) + 2 - 4\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{ch}(\pi) + 2 - 4\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\ \mathrm{d}t
$$

et donc

$$
\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{2 - 2\,\mathrm{ch}(\pi)}{5}
$$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2+2x+2)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

On va faire deux intégrations par parties successives en dérivant d'abord le terme x^2+2x+2 puis le terme $x+1$.

Posons $u(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, $v(x) = x^2+2x+2$, $a(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2}$ et $b(x) = x+1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (x^2+2x+2)\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} v(x)u'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)] - \int_0^{\pi} v'(x)u(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x^2+2x+2)\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (2x+2)\frac{\sin(2x)}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi} (x+1)\sin(2x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} b(x)a'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [a(x)b(x)] - \int_0^{\pi} a(x)b'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x+1)\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi+1}{2} - \frac{1}{2} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{\pi} (x^2+2x+2)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

8. $\displaystyle\int_2^{3} (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\ \mathrm{d}x$

On va intégrer le terme $3x^2-4x+1$ et dériver le terme x^5-x^4. Soit $u(x) = x^3-2x^2+x$ et $v(x) = \ln(x^5-x^4)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_2^{3} (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\ \mathrm{d}x &= \int_1^{2} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_2^3 - \int_2^{3} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[(x^3-2x^2+x)\ln(x^5-x^4)\right]_2^3 - \int_2^{3} (x^3-2x^2+x)\frac{5x^4-4x^3}{x^5-x^4}\ \mathrm{d}x \\
&= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \int_2^{3} x(x-1)^2\frac{x^3(5x-4)}{x^4(x-1)}\ \mathrm{d}x \\
&= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \int_2^{3} (x-1)(5x-4)\ \mathrm{d}x \\
&= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \int_2^{3} 5x^2-9x+4\ \mathrm{d}x \\
&= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \left[\frac{10x^3-27x^2+4x}{6}\right]_2^3
\end{aligned}$$

$$= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \frac{59}{6}$$

9. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t$

   On va dériver $\arctan(t)$ et intégrer 1. Soit $u(t) = t$ et $v(t) = \arctan(t)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= x\arctan(x) - \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^x \\
&= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}
\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\arctan x\ \mathrm{d}x$

   On va dériver $\arctan(x)$ et intégrer $x+1$. Soit $u(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$ et $v(x) = \arctan(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x+1)\arctan x\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1+2x-1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1 + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x + \ln(1+x^2) - \arctan(x)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 19.2

1. Soit $\varphi(x) = x + \sin(x)$, on a alors $\varphi'(x) = 1 + \cos(x) = 1 + \cos\left(2\dfrac{x}{2}\right) = 1 + 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 1 = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

   D'où

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}\ \mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\varphi'(x)}{2\varphi(x)}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{2t}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\ln(t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}+1}^{\pi} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\ln(\pi)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\ln(\pi)}{2} = \frac{\ln(2\pi)-\ln(\pi+2)}{2}$$

2. Soit $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$, on a alors $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $x=\varphi(x)^2-1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x &= \int_0^2 2x\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 (2\varphi(x)^2-2)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} 2t^2-2\ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2t^3}{3}-2t\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{23^{\frac{3}{2}}}{3}-2\sqrt{3}-\frac{2}{3}+2 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

3. Soit $\varphi(x)=\sin(x)-\cos(x)$, on a alors $\varphi'(x)=\sin(x)+\cos(x)$. De plus, pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ on a $2-\sin(2x)\neq 0$ et

$$2-\sin(2x)=2-2\sin(x)\cos(x)=1+\sin(x)^2+\cos(x)^2-2\sin(x)\cos(x)=1+(\ sin(x)-\cos(x))^2$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2-\sin(2x)}\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= [\arctan(t)]_{-1}^{0} \\ &= 0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2-\sin(2x)}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, on a alors $\varphi'(x) = \frac{-1}{x^2}$.
   D'où

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\ \mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{-x^2\varphi'(x)}{x(x^n+1)}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{-\frac{1}{\varphi(x)^2}\varphi'(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}(\frac{1}{\varphi(x)^n}+1)}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t^n}+1)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-t^{n-1}}{1+t^n}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\ln(1+t^n)}{n}\right]_1^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\ln(2)-\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n} \\
&= \frac{\ln(2)-\ln\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)}{n} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)}{n}$$

5. On pose $\varphi(x) = \sqrt{e^x-1}$, d'où $\varphi'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\ \mathrm{d}x &= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{2\varphi'(x)}{(3+e^x)}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{2\varphi'(x)}{(4+\varphi(x)^2)}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(\ln(2))}^{\varphi(\ln(5))} \frac{2}{4+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_1^2 \\
&= \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où
$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

6. On pose $\varphi(x) = x - \frac{1}{x}$, d'où $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$. On a de plus
$$1 + \varphi(x)^2 = 1 + \frac{(x^2-1)^2}{x^2} = 1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2}$$
Alors
$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\ \mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2\varphi'(x)}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t \\ &= [\arcsin(t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \operatorname{argsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{argsh}(0) \\ &= \operatorname{argsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$
D'où
$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\ \mathrm{d}x = \operatorname{argsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

7. Posons $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, d'où $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On a alors
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\ \mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{3}}^1 -\varphi(x)^2\left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)^3}\right)^{\frac{1}{3}} \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\frac{1}{3}}^1 \varphi(x)\left(\varphi(x)^2-1\right)^{\frac{1}{3}} \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\varphi(\frac{1}{3})}^{\varphi(1)} t(t^2-1)^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{3(t^2-1)^{\frac{4}{3}}}{8}\right]_3^1 \\ &= \frac{3\times 8^{\frac{4}{3}}}{8} \\ &= \frac{3\times 2^4}{8} \\ &= 6\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\ \mathrm{d}x = 6$$

8. Soit $a>0$, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, d'où $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)\varphi'(x)}{\frac{1}{x^2}+1}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}^{\varphi(a)} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{1}{a}} a\frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

D'où

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 0$$

9. On pose $\varphi(x)=x^{\frac{1}{6}}$, d'où $\varphi'(x)=\dfrac{1}{6x^{\frac{5}{6}}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\ \mathrm{d}x &= \int_{0}^{1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}} 6x^{\frac{5}{6}}\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1+\varphi(x)^3}{1+\varphi(x)^2} 6\varphi(x)^5\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{6t^5+t^8}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{1} \frac{(t^2+1)(t^6 ` t^4+t^3+t^2 ` t ` 1)+t+1}{t^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} t^6 ` t^4+t^3+t^2 ` t ` 1+\frac{t}{t^2+1}\frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t+\frac{\ln(1+t^2)}{2}+\arctan(t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1+\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{409}{420} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\ \mathrm{d}x = -\frac{409}{420} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}$$

10. On pose $\varphi(x) = \sin(x)$,d'où $\varphi'(x) = \cos(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\varphi(x)^2)^3\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} (1-t^2)^3\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6\ \mathrm{d}t \\
&= \left[t - t^3 + \frac{3t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 \\
&= 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \\
&= \frac{16}{35}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\ \mathrm{d}x = \frac{16}{35}$$

11. On pose $\varphi(x) = \tan(x)$, ainsi $\varphi'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\frac{\varphi'(x)}{1+\tan(x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(x)^7}{1+\varphi(x)^2}\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{t^7}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(t^2+1)(t^5-t^3+t)-t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^5 - t^3 + t - \frac{t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} \\
&= \frac{5}{12} - \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{12} - \frac{\ln(2)}{2}$$

Réponse de l'exercice 19.3

1. Soit $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ et donc, pour tout $t \in [x^2, x]$ on a $\ln(t) \neq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est alors bien définie et continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ est donc bien définie.
   De même, pour $1 < x$ on a $1 < x < x^2$ et donc, pour tout $t \in [x, x^2]$ on a $\ln(t) \neq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est alors bien définie et continue sur $[x, x^2]$ et $f(x)$ est donc bien définie.
2. Soit $x \in]0,1[$ et soit $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$. F est dérivable car c'est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$ qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$. Alors $f(x) = F(x^2) - F(x)$. f est alors dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme de composées de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

   De même, pour $x > 1$ on définit $G(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$. g est dérivable car c'est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]1 + \infty[$ qui s'annule en 2. Alors $f(x) = F(x^2) - F(x)$. f est alors dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que somme de composées de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

3. Pour $x \in]0,1[$ on a $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur $]0,1[$. De même, pour $x \in]1, +\infty[$ on a $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
4. Soit $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t &= [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} \\ &= \ln(\ln(x^2) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) \\ &\ln(2) \end{aligned}$$

   Pour $t \in [x, x^2]$ on a $\dfrac{x}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x^2}{t}$, d'où

$$\frac{x}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{x^2}{t\ln(t)}$$

Ainsi
$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$$
C'est-à-dire
$$x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)$$
Pour $0 < x < 1$ on a
$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t &= [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2}\\ &= \ln(-\ln(x^2)| - \ln(-\ln(x))\\ &= \ln(-2\ln(x))\ln(-\ln(x))\\ &\ln(2)\end{aligned}$$

.

Pour $t \in [x^2, x]$ on a $\dfrac{x^2}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x}{t}$, d'où
$$\frac{x^2}{t\ln(t)} \geqslant \frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{x}{t\ln(t)}$$
Ainsi
$$\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$$
C'est-à-dire
$$-x\ln(2) \geqslant -f(x) \geqslant -x^2\ln(2)$$
D'où
$$x^2\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$$

5. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(2) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
De même $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(2) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
Pour la limite en 1 on va étudier séparément les limites en 1^- et 1^+.
On a $\lim\limits_{x\to 1^-} x\ln(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2\ln(2) = \ln(2)$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$$
Et $\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2\ln(2) = \ln(2)$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ alors f peut être prolongée par continuité en 1 par $\ln(2)$.

Réponse de l'exercice 19.4

1. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$1 + \tan(x)^2 = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Soit $t \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \sin\left(2 \times \frac{t}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right))^2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 \\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left(1 - \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

2. Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(t)} \end{array}$

On pose $u(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, d'où $u'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + u(t)^2\right)$

Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\cos(t)} \,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1+u(t)^2}{1-u(t)^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{2u'(t)}{1-u(t)^2} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tan(0)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{1-x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln(1-x)+\ln(1+x)\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \quad = \left[-\ln(1-x)+\ln(1+x)\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

et, pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(\theta)\cos(t)}\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{u'(t)}{1+u(t)^2}}{1+\cos(\theta)\frac{1-u(t)^2}{1+u(t)^2}}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u'(t)}{1+u(t)^2+\cos(\theta)-\cos(\theta)u(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u'(t)}{1+u(t)^2+\cos(\theta)-\cos(\theta)u(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{1+\cos(\theta)+(1-\cos(\theta))x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-\cos(\theta)} \frac{1}{\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{1-\cos(\theta)}\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\arctan\left(x\times\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\right)\right]_0^1 \\
&= \sqrt{\frac{1}{1-\cos^2(\theta)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\right) \\
&= \frac{1}{|\sin(\theta)|}\arctan\left(\sqrt{\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{|\sin(\theta)|}\arctan\left(\tan(\theta)|\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\arctan\left(\tan(\theta)\right) \\
&= \frac{\theta}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 19.5

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(t) = -t$, d'où $\varphi'(t) = -1$. Alors

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

et

$$\int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(-\varphi(t)) - \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-x}^{0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= -\int_{\varphi(-x)}^{\varphi(0)} f(s)\ \mathrm{d}s \\
&= -\int_{x}^{0} f(s)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(t) = -t$, d'où $\varphi'(t) = -1$. Alors

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{-x}^{0} f(-\varphi(t)) - \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-x}^{0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(-x)}^{\varphi(0)} f(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{x}^{0} f(s)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Réponse de l'exercice 19.6

1. On pose $\varphi(t) = -t$, d'où $\varphi'(t) = -1$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\ \mathrm{d}t &= \int_{x}^{2x} \frac{-\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)^4+\varphi(t)^2+1}}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(x)}^{\varphi(2x)} \frac{-1}{\sqrt{s^4+s^2+1}}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{-x}^{-2x} \frac{-1}{\sqrt{s^4+s^2+1}}\ \mathrm{d}s \\
&= -f(-x)
\end{aligned}$$

f est donc impaire.

2. Posons $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,\mathrm{d}t$. F est alors l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ qui s'annule en 0, d'où, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
   On a alors $f(x) = F(2x) - F(x)$ et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2F'(2x) - F'(x)\\
&= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\\
&= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}}\\
&= \frac{\sqrt{4x^4+4x^2+4} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}}\\
&= \frac{4x^4+4x^2+4-(16x^4+4x^2+1)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}\left(\sqrt{4x^4+4x^2+4}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}\\
&= \frac{3-12x^4}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}\left(\sqrt{4x^4+4x^2+4}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}\\
&= \frac{3(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)(1+2x^2)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}\left(\sqrt{4x^4+4x^2+4}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}
\end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Soit $x > 0$, pour $t \in [x, 2x]$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

   D'où

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

   C'est-à-dire

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

   Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Réponse de l'exercice 19.7

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2 \text{ d}t = \int_a^b \lambda^2 f^2(t)+2\lambda f(t)g(t)+g^2(t) \text{ d}t = \lambda^2 \int_a^b f^2(t) \text{ d}t+2\lambda \int_a^b f(t)g(t) \text{ d}t+\int_a^b g^2(t) \text{ d}t$$

Notons $A = \int_a^b f^2(t) \text{ d}t$, $B = \int_a^b f(t)g(t) \text{ d}t$ et $C = \int_a^b g^2(t) \text{ d}t$. On a alors

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2 \text{ d}t = A\lambda^2 + 2\lambda B + C$$

Notre fonction est donc bien une fonction polynomiale.

On sait que, pour $t \in [a,b]$, $(\lambda f(t)+g(t))^2 \geqslant 0$, ainsi, par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2 \geqslant 0$

2. De la question précédente on déduit que le discriminant de l'expression polynomiale $A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ est négatif ou nul (un polynôme de degré 2 de signe constant admet au plus un racine).
Ainsi $4B^2 - 4AC \leqslant 0$, d'où $B^2 \leqslant AC$, c'est-à-dire

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) \text{ d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t) \text{ d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2 \text{ d}t\right)$$

On retrouve bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz annoncée.

3. On a, en conservant les notations précédentes

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(t)+g(t))^2 \text{ d}t &= \int_a^b f^2(t)+2f(t)g(t)+g^2(t) \text{ d}t\\ &= \int_a^b f^2(t) \text{ d}t + 2\int_a^b f(t)g(t) \text{ d}t + \int_a^b g^2(t) \text{ d}t\\ &= A+2B+C\\ &\leqslant A + 2\sqrt{AC}+C\\ &\leqslant (\sqrt{A}+\sqrt{C})^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2 \text{ d}t\right)^{\frac12} &\leqslant \left((\sqrt{A}+\sqrt{C})^2\right)^{\frac12}\\ &\leqslant A^{\frac12}+B^{\frac12}\\ &\leqslant \left(\int_a^b f^2(t) \text{ d}t\right)^{\frac12} + \left(\int_a^b g(t)^2 \text{ d}t\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

D'où

$$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2 \text{ d}t\right)^{\frac12} \leqslant \left(\int_a^b f^2(t) \text{ d}t\right)^{\frac12} + \left(\int_a^b g(t)^2 \text{ d}t\right)^{\frac12}$$

On retrouve bien l'inégalité de Minkowski annoncée.

Réponse de l'exercice 19.8

1. Pour $t \in [a,b]$ on a
$$m \leqslant f(t) \leqslant M$$
D'où, comme $g(t) \geqslant 0$,
$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$
Ce qui, par croissance de l'intégrale, nous donne
$$m\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Dans un premier temps, traitons le cas particulier où $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t = 0$, comme g est positive sur $[a,b]$ cela entraine que g est identiquement nulle sur $[a,b]$. On a alors
$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad f(c)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t = 0$$
D'où
$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$
On suppose désormais que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t > 0$. La question précédente nous donne alors l'inégalité
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t} \leqslant M$$
Ainsi $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t} \in [m,M]$.
f étant continue sur $[a,b]$ on sait que $f([a,b]$ est un intervalle, c'est en fait exactement l'intervalle $[m,M]$.
Ainsi $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t} \in f([a,b])$. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t}$$
C'est-à-dire
$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

Chapitre 20

Applications linéaires et matrices

Exercices

Exercice 20.1

Pour chacune des applications suivantes dire s'il s'agit d'une application linéaire (en justifiant). Si c'est le cas déterminer son image, son noyau (on donnera une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels) et sa matrice dans les bases canoniques des espaces concernés.

(i) $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,2x) \end{array}$

(ii) $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,3x-3y) \end{array}$

(iii) $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy,0) \end{array}$

(iv) $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z,y+z) \end{array}$

(v) $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y-x,x+2y) \end{array}$

(vi) $\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z,1+y) \end{array}$

(vii) $\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+2y \end{array}$

(viii) $\varphi_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (1,x-2y) \end{array}$

Exercice 20.2

Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x-y-z,-x-y-z,0) \end{array}$

1. Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son image et son noyau.
3. h est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Déterminer $h+2Id$ et $\mathrm{Ker}(h+2Id)$
5. Résoudre l'équation $h(u)=-2u$ d'inconnue $u\in\mathbb{R}^3$

Exercice 20.3

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. f est-elle bijective ?
2. Soit $g = f - Id_{\mathbb{R}^3}$, donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base du noyau de g.

Exercice 20.4

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec $e_1' = (-1, 1, 0)$, $e_2' = (1, 0, 1)$ et $e_3' = (1, 1, 1)$. Soit

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

Exercice 20.5

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter φ
2. Déterminer le noyau et l'image de φ.

Exercice 20.6

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x + 2y) \end{array}$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f est un automorphisme
3. Déterminer f^{-1}.

Exercice 20.7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z)$

1. Déterminer une base de l'image et du noyau de f
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.8

Soit $E = \mathbb{C}^2$. On définit f et $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ par

$$f(x, y) = (x + y, x - y) \qquad \text{et} \qquad g(x, y) = (x + 2y, x + 2y)$$

1. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que $g \in \mathcal{L}(E)$.
2. f et g sont-elles injectives ?

3. Démontrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Exercice 20.9

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'unique endomorphisme f de E vérifiant $f(e_1) = e_2 + e_3,\ f(e_2) = e_1 + e_3,\ f(e_3) = e_1 + e_2$.

f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

Exercice 20.10

On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P(1), P'(1)) \end{array}$$

Montrer que φ est un isomorphisme et donner sa matrice dans les bases canoniques des deux espaces.

Exercice 20.11

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = f' + 3f$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Montrer que φ est surjective.
4. Déterminer une base de $Ker(\varphi \circ \varphi)$.

Exercice 20.12

Soit l'application g définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par

$$g(P) = P(1)X + P(2)X^3$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de E.
3. Déterminer une base de l'image et du noyau de g.

Exercice 20.13

1. Donner un exemple d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
2. Existe-t-il une application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?
3. Généraliser.

Exercice 20.14

1. Donner un exemple d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$
2. Existe-t-il une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
3. Généraliser.

Exercice 20.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par g, c'est-à-dire

$$g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f) \qquad g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 20.16

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$$

Exercice 20.17

Vrai ou faux ? (Justifier)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre ;
2. Si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre ;
3. Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est génératrice de E alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de F ;
4. Si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de F alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est génératrice de E ;
5. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ alors f est injective ;
6. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$ alors f est injective ;
7. Si g est une autre application linéaire de E dans F avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ alors $f = g$.

Exercice 20.18

Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé. Quand l'endomorphisme est inversible on déterminera également son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 20.19

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f vérifié l'équation $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est inversible et donner l'expression de f^{-1} en fonction de f et Id_E
2. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E$$

3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f, de Id_E et de n.
4. Donner enfin l'expression de f^{-n} en fonction de f et de Id_E.

Exercice 20.20

Donner le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \qquad m \in \mathbb{R}$$

Exercice 20.21

1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
2. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\varphi(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \qquad \varphi(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 \qquad \varphi(e_3) = -2e_2 + 6e_3$$

   (a) Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le rang de φ , une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 20.22

Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}$.
2. L'application f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que

$$f(1) = (5, 0, -1, 2),\ f(X) = (1, 2, 0, 0),\ f(X^2) = (4, -2, -1, 2)\ .$$

3. L'endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$g(P) = P(1)X + P(2)X^3$$

4. L'application h de $\mathbb{R}_7[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associe $P(1)$.

Exercice 20.23

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admettant une base (e_1, e_2, e_3). Soit φ un endomorphisme de E défini par :

$$\varphi(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \qquad \varphi(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \qquad \varphi(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de φ .
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Montrer que $Ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par φ^2 des vecteurs de cette base.

Exercice 20.24

Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ constitue une base de E.

Exercice 20.25

Soit $(x_{,1}, \cdots, x_n)$ n réels distincts. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & P & \mapsto & (P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_n)) \end{array}$$

1. Montrer que Ψ est injective.
2. En déduire que Ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.
3. On définit la matrice $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que, si $(x_{,1}, \cdots, x_n)$ sont n réels distincts alors $V(x_1, \cdots, x_n)$ est inversible.

Exercice 20.26

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Démontrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Que peut-on dire de f ?

Réponses

Réponse de l'exercice 20.1

(i) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda u + \mu v) &= \varphi_1(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (\lambda y_1 + \mu y_2, 2(\lambda x_1 + \mu x_2)) \\ &= \lambda(y_1, 2x_1) + \mu(y_2, 2x_2) \\ &= \lambda\varphi_1(u) + \mu\varphi_1(v) \end{aligned}$$

Ainsi φ_1 est une application linéaire.

On a

$$\ker(\varphi_1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \varphi_1(x, y) = (0, 0)\right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \right\}$$
$$= \{(0,0)\}$$

Notons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi_1) &= \operatorname{Vect}(\varphi_1(e_1), \varphi_1(e_2)) \\ &= \operatorname{Vect}\left((0,2),(1,0)\right) \\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

et

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_2(\lambda u + \mu v) &= \varphi_2(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2), 3(\lambda x_1 + \mu x_2) - 3(\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= \lambda(x_1 - y_1, 3x_1 - 3y_1) + \mu(x_2 - y_2, 3x_2 - 3y_2) \\ &= \lambda \varphi_2(u) + \mu \varphi_4(v)\end{aligned}$$

Ainsi φ_2 est une application linéaire.
On a

$$\begin{aligned}\ker(\varphi_2) &= \left\{(x,y) \in R^2 \ , \ \varphi_2(x,y) = (0,0)\right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x = y\right\} \\ &= \left\{(x,x) \ , \ x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,1))\end{aligned}$$

Notons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi_2) &= \operatorname{Vect}(\varphi_2(e_1), \varphi_2(e_2)) \\ &= \operatorname{Vect}\left((1,3),(-1,-3)\right) \\ &= \operatorname{Vect}((1,3))\end{aligned}$$

et

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(iii) φ_3 n'est pas une application linéaire. En effet on a $\varphi_3((1,0)) = \varphi_3((0,1)) = (0,0)$ mais

$$\varphi_3((1,0) + (0,1)) = \varphi((1,1)) = (1,0) \neq \varphi_3((1,0)) + \varphi_3((0,1))$$

(iv) Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_4(\lambda u + \mu v) &= \varphi_4(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)\\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2))\\ &= \lambda(x_1 - z_1, y_1 + z_1) + \mu(x_2 - z_2, y_2 + z_2)\\ &= \lambda\varphi_4(u) + \mu\varphi_4(v)\end{aligned}$$

Ainsi φ_4 est une application linéaire.
On a

$$\begin{aligned}\ker(\varphi_4) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \varphi_4(x, y, z) = (0, 0)\right\}\\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\right\}\\ &= \{(x, -x, x) \ , \ x \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}((1, -1, 1))\end{aligned}$$

Notons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi_4) &= \mathrm{Vect}(\varphi_4(e_1), \varphi_4(e_2), \varphi_4(e_3))\\ &= \mathrm{Vect}\left((1, 0), (0, 1), (-1, 1)\right)\\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(v) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_5(\lambda u + \mu v) &= \varphi_5(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)\\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2), (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda x_1 + \mu x_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2))\\ &= \lambda(x_1 - y_1, y_1 - x_1, x_1 + 2y_1) + \mu(x_2 - y_2, y_2 - x_2, x_2 + 2y_2)\\ &= \lambda\varphi_5(u) + \mu\varphi_5(v)\end{aligned}$$

Ainsi φ_5 est une application linéaire.
On a

$$\begin{aligned}\ker(\varphi_5) &= \left\{(x, y) \in R^2 \ , \ \varphi_5(x, y) = (0, 0, 0)\right\}\\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}\right\}\\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}\right\} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1)\\ &= \{(0, 0)\}\end{aligned}$$

Notons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi_5) &= \mathrm{Vect}(\varphi_5(e_1), \varphi_5(e_2)) \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,-1,1),(-1,1,2)\right)\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(vi) φ_6 n'est pas une application linéaire. En effet on a

$$\varphi_6(0,0,0) = (0,1) \neq (0,0)$$

(vii) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_7(\lambda u + \mu v) &= \varphi_7(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda(x_1 + 2y_1) + \mu(x_2 + 2y_2) \\ &= \lambda \varphi_7(u) + \mu \varphi_7(v)\end{aligned}$$

Ainsi φ_7 est une application linéaire.
On a

$$\begin{aligned}\ker(\varphi_7) &= \left\{(x,y) \in R^2 \ , \ \varphi_7(x,y) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x + 2y\right\} \\ &= \{(-2y, y) \ , \ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((-2,1))\end{aligned}$$

Notons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi_5) &= \mathrm{Vect}(\varphi_5(e_1), \varphi_5(e_2)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(1,2) \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(viii) φ_8 n'est pas une application linéaire. En effet on a

$$\varphi_8(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$$

Réponse de l'exercice 20.2

1. Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \mu v) &= h(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= (-(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), -(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), 0) \\ &= \lambda(-x_1 - y_1 - z_1, -x_1 - y_1 - z_1, 0) + \mu(-x_2 - y_2 - z_2, -x_2 - y_2 - z_2, 0) \\ &= \lambda h(u) + \mu h(v) \end{aligned}$$

Ainsi h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(h) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} -x-y-z=0 \\ -x-y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ -x-y-z=0 \right\} \\ &= \{ (x, y, -x-y) \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h) &= \operatorname{Vect}(h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)) \\ &= \operatorname{Vect}((-1,-1,0),(-1,-1,0),(-1,-1,0)) \\ &= \operatorname{Vect}((-1,1,0)) \end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{Ker}(h) \neq \{(0,0,0)\}$ et $\operatorname{Im}(h) \neq \mathbb{R}^3$. Ainsi h n'est ni injective, ni surjective et, par suite, n'est pas bijective.

4. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(h + 2\operatorname{Id})(x,y,z) = h(x,y,z) + 2(x,y,z) = (x-y-z, -x+y-z, 2z)$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcccc} h + 2\operatorname{Id} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-y-z, -x+y-z, 2z) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(h + 2\operatorname{Id}) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \right\} (L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \ L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases} \right\} (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ &= \{ (x,x,0) \ , \ x \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{Vect}((1,1,0)) \end{aligned}$$

5. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, On a

$$h(u) = -2u \Leftrightarrow (h + 2\mathrm{Id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker}(h + 2\mathrm{Id})$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$h(u) = -2u \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$$

Réponse de l'exercice 20.3

1. D'après la matrice on a $f(1, 0, 0) = (-1, 2, -2)$, $f(0, 1, 0) = (-2, 3, -2)$ et $f(0, 0, 1) = (-2, 2, -1)$ et, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (-x - 2y - 2z, 2x + 3y + 2z, -2x - 2y - z) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} f \circ f(1, 0, 0) &= f(-1, 2, -2) = (1 - 4 + 4, -2 + 6 - 4, 2 - 4 + 2 = (1, 0, 0) \\ f \circ f(0, 1, 0) &= f(-2, 3, -2) = (2 - 6 + 4, -4 + 9 - 4, 4 - 6 + 2) = (0, 1, 0) \\ f \circ f(0, 0, 1) &= f(-2, 2, -1) = (2 - 4 + 2, -4 + 6 - 2, 4 - 4 + 1 = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f$ est l'unique application linéaire g telle que $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $g(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ et $g(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$, c'est-à-dire $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

Ceci montre également que f est bijective et $f^{-1} = f$.

2. On a

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & -2x - 2y - 2z, 2x + 2y + 2z, -2x - 2y - 2z \end{array}$$

et, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(g) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0 \right\} \\ &= \{ (x, y, -x - y) \ , \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)) \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que la famille $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est libre et est donc une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

Réponse de l'exercice 20.4

1. Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \\
&= ((\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2), 2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2), 2(\lambda x_1 + \mu \\
&= \lambda(x_1 + 2y_1 - 2z_1, 2x_1 + y_1 - 2z_1, 2x_1 + 2y_1 - 3z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - 2z_2, 2x_2 + y_2 - 2z_2, 2x_2 + 2y_2 - 3 \\
&= \lambda f(u) + \mu f(v)
\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. On va montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soit alors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est alors solution du système $(\mathcal{S})$ suivant

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\mathcal{S}) :\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_3$

$$\mathcal{S}) :\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On voit alors que $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer, il admet donc une unique solution qui est $(0, 0, 0)$. D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B}'$ est ainsi une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On a

$$f(e'_1) = (-1 + 2, -2 + 1, -2 + 2) = (1, -1, 0) = -e'_1$$
$$f(e'_2) = (1 - 2, 2 - 2, 2 - 3) = (-1, 0, -1) = -e'_2$$
$$f(e'_3) = (1 + 2 - 2, 2 + 1 - 2, 2 + 2 - 3 = (1, 1, 1) = e_3$$

On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 20.5

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi((x, y, z)) &= \varphi(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\
&= x\varphi((1, 0, 0)) + y\varphi((0, 1, 0)) + z\varphi((0, 0, 1)) \\
&= x(2, 0, 0) + y(4, 6, 0) + z(-1, 5, 3)
\end{aligned}$$

$$= (2x + 4y - z, 6y + 5z, 3z)$$

Ainsi

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+4y-z, 6y+5z, 3z) \end{array}$$

2. On a

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 6y + 5z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \right\}$$
$$= \{(0,0,0)\}$$

Et

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((2,0,0),(4,6,0),(-1,5,3))$$

On voit aisément que le rang de la famille $((2,0,0),(4,6,0),(-1,5,3))$ est 3. Ainsi $\mathrm{Vect}((2,0,0),(4,6,0),(-1,5,3))$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((2,0,0),(4,6,0),(-1,5,3)) = \mathbb{R}^3$.

Réponse de l'exercice 20.6

1. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On sait déjà que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, il nous faut maintenant prouver qu'il est bijectif.
On a

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$
$$= \{(0,0)\}$$

On sait de plus que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1),(1,2))$. Or $(1,0) = 2(1,1) - (1,2)$ et $(0,1) = (1,2) - (1,1)$.
Ainsi $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) \subset \mathrm{Vect}((1,1),(1,2))$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Im}(f)$. D'où $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
L'endomorphisme f est ainsi injectif et surjectif, donc bijectif. f est alors bien un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. On sait que f^{-1} est également un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ notons

$$f^{-1}(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$$

On a alors

$$(x,y) = f(f^{-1}(x,y)) = (a(x,y) + b(x,y), a(x,y) + 2b(x,y))$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} x = a(x,y) + b(x,y) \\ y = a(x,y) + 2b(x,y) \end{cases}$$

D'où

$$a(x,y) = 2x - y \qquad b(x,y) = y - x$$

Et donc

$$f^{-1} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, y-x) \end{array}$$

Réponse de l'exercice 20.7

1. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases} \right\} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \right\} (L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2) \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \right\} (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\
&= \{(z,z,z) \ , \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((1,1,1))
\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\
&= \mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1))
\end{aligned}$$

On va calculer le rang de la famille $((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1))$ pour déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi le cardinal des bases de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille $((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1))$ est de rang 2. Les bases de $\mathrm{Im}(f)$ sont donc de cardinal 2. Montrons que la famille $((1,1,-2),(1,-2,1))$ est libre : Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(1,1,-2) + \mu(1,-2,1) = (0,0,0)$$

On a alors $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - 2\mu = 0$ d'où $\lambda = \mu = 0$.
La famille $((1,1,-2),(1,-2,1))$ est ainsi une famille libre de cardinal 2 dans $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension 2, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 20.8

1. Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\lambda u + \mu v) &= g(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= \lambda(x_1 + 2y_1, x_1 + 2y_1) + \mu(x_2 + 2y_2, x_2 + 2y_2) \\ &= \lambda g(u) + \mu g(v) \end{aligned}$$

Ainsi f et g sont des applications linéaires.

2. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \ , \ \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \ , \ \begin{cases} 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\} (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(g) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \ , \ \begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \ , \ \begin{cases} x+2y=0 \\ 0=0 \end{cases}\right\} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= \{(-2y,y) \ , \ y\in\mathbb{C}\} \\
&= \mathrm{Vect}((-2,1))
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$ et $\mathrm{Ker}(g) \neq \{(0,0)\}$ (puisque, par exemple $(-2,1) = \in \mathrm{Ker}(g)$). f est donc injective mais g ne l'est pas.

3. Il nous reste à montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) = &\mathrm{Vect}(f(1,0), f(0,1)) \\
&= \mathrm{Vect}((1,1),(1,-1))
\end{aligned}$$

On sait que f est injective, ainsi $((1,1),(1,-1))$ est une famille libre. Comme c'est une famille libre de cardinal 2 de $\mathbb{C}^2$ qui est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2, c'est alors une base de $\mathbb{C}^2$.
Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1),(1,-1)) = \mathbb{C}^2$. f est un endomorphisme injectif et surjectif de $\mathbb{C}^2$ donc un automorphisme, c'est-à-dire $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Réponse de l'exercice 20.9

Commençons par déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourrait raisonner à l'aide de la matrice mais les résultats nécessaires n'ont pas encore été abordés en cours. On va donc se débrouiller autrement.

Notons $f_1 = f(e_1)$, $f_2 = f(e_2)$ et $f_3 = f(e_3)$ et montrons que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela on peut, par exemple montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$. On a en effet

$$e_1 = \frac{1}{2}(-f_1 + f_2 + f_3) \qquad e_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3) \qquad f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - f_3)$$

Ainsi $e_1 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$, $e_2 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ et $e_3 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

La famille (f_1, f_2, f_3) est ainsi une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ de cardinal 3. Comme $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 on en déduit que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a ainsi montré que l'image de le base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par f est une base de $\mathbb{R}^3$, f est donc un endomorphisme bijectif et en particulier est aussi injectif et surjectif.

Réponse de l'exercice 20.10

Commençons par montrer que φ est une application linéaire. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \big((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)'(0), (\lambda P + \mu Q)(1), (\lambda P + \mu Q)'(1)\big) \\
&= \big(\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P'(0) + \mu Q'(0), \lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P'(1) + \mu Q'(1)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda(P(0), P'(0), P(1), P'(1)) + \mu(Q(0), Q'(0), Q(1), Q'(1))\\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$.

La base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille $(1, X, X^2, X^3)$. On a $\varphi(1) = (1,0,1,0)$, $\varphi(X) = (0,1,1,1)$, $\varphi(X^2) = (0,0,1,2)$ et $\varphi(X^3) = (0,0,1,3)$. D'où

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,0,1,2), (0,0,1,3))$$

Montrons que la famille $((1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,0,1,2), (0,0,1,3))$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_2(0,1,1,1) + \lambda_3(0,0,1,2) + \lambda_4(0,0,1,3) = (0,0,0,0)$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ est alors solution du système $\mathcal{S}$ suivant :

$$\mathcal{S} : \quad \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0\end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$\mathcal{S} :\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0\end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$

$$\mathcal{S} :\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_4 = 0\end{cases}$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille $((1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,0,1,2), (0,0,1,3))$ est donc une famille libre de cardinal de $\mathbb{R}^4$ qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,0,1,2), (0,0,1,3)) = \mathbb{R}^4$$

φ est donc surjective.

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a alors

$$\begin{cases}d = 0\\ c = 0\\ a + b + c + d = 0\\ 3a + 2b + c = 0\end{cases}$$

On retrouve le même système que précédemment dont on a montré que la seule solution est $(0,0,0,0)$. On a donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. D'où $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$, φ est ainsi injective.

Puisque φ est une application linéaire surjective et injective c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$.
On a de plus, en notant $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 20.11

1. Soit $(u, v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u + \mu v)' + 3(\lambda u + \mu v) \\ &= \lambda(u' + 3u) + \mu(v' + 3v) \\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v) \end{aligned}$$

   On sait également que, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors f' est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc $f' + 3f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(E)$
2. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \ f' + 3f = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \ \exists C \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = Ce^{-3x}\} \end{aligned}$$

   Notons $f_1 \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-3x} \end{array}$
   On a alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_1)$.
3. Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on veut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f' + 3f = h$
   Soit $f : x \mapsto e^{-3x} \displaystyle\int_0^x h(t)e^{3t} \ \mathrm{d}t$. f est alors continue, dérivable et on a

$$f'(x) = -3e^{-3x} \int_0^x h(t)e^{3t} \ \mathrm{d}t + e^{-3x}e^{3x}h(x) = h(x) - 3f(x)$$

   Ainsi f' et, par suite f, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) + 3f(x) = h(x)$$

   C'est-à-dire $\varphi(f) = h$
   On a donc trouvé $f \in E$ tel que $\varphi(f) = h$. Ainsi $h \in \mathrm{Im}(\varphi)$. On ne déduit que φ est surjective.
4. Soit $f \in E$, on a

$$\varphi(\varphi(f)) = (f' + 3f)' + 3(f' + 3f) = f'' + 6f' + 9f$$

   On cherche ici les solutions de l'équation différentielle $f'' + 6f' + 9f = 0$. Soit $P = X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2$ le polynôme caractéristique de cette équation différentielle.
   Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' + 6f' + 9f = 0$ est

$$S = \left\{f \in E \ , \ \exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}\right\}$$

Notons

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-3x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-3x} \end{array}$$

On a alors $S = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

Réponse de l'exercice 20.12

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} g(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(1)X + (\lambda P + \mu Q)(2)X^3 \\ &= (\lambda P(1) + \mu Q(1))X + (\lambda P(2) + \mu Q(2))X^3 \\ &= \lambda(P(1)X + P(2)X^3) + \mu(Q(1)X + Q(2)X^3) \\ &= \lambda g(P) + \mu g(Q) \end{aligned}$$

   Ainsi g est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On rappelle que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille $(1, X, X^2, X^3)$.
   On a $g(1) = X + X^3$, $g(X) = X + 2X^3$, $g(X^2) = X + 4X^3$ et $g(X^3) = X + 8X^3$. D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

3. On rappelle qu'un polynôme est égal au polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(g) &= \left\{P \in \mathbb{R}_3[X]\ ,\ P(1)X + P(2)X^3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ ,\ P(1) = P(2) = 0\} \end{aligned}$$

   On sait que $P(1) = 0$ si et seulement si $X - 1$ divise P. Ainsi $P \in \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P = (X-1)(X-2)Q$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X-2)(aX+b) \\ &= (X^2 - 3X + 2)(aX + b) \\ &= aX^3 - 3aX^2 + 2aX + bX^2 - 3bX + 2b = aX^3 + (b-3a)X^2 + (2a-3b)X + 2b \\ &= a(X^3 - 3X^2 + 2X) + b(X^2 + 2X + 2) \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(X^3 - 3X^2 + 2X, X^2 + 2X + 2)$$

   La famille $(X^3 - 3X^2 + 2X, X^2 + 2X + 2)$ est de degré échelonné, elle est donc libre. Ainsi $(X^3 - 3X^2 + 2X, X^2 + 2X + 2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
   On a également

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}(g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)) \\ &= \mathrm{Vect}(X + X^3, X + 2X^3, X + 4X^3, X + 8X^3) \end{aligned}$$

Remarquons que $X = 2(X + X^3) - (X + 2X^3)$ et que $X^3 = (X + 2X^3) - (X + X^3)$. Ainsi $\text{Vect}(X, X^3) \subset \text{Vect}(X + X^3, X + 2X^3, X + 4X^3, X + 8X^3)$.
Il est aisé de remarquer que réciproquement $\text{Vect}(X + X^3, X + 2X^3, X + 4X^3, X + 8X^3) \subset \text{Vect}(X, X^3)$.
Ainsi $\text{Im}(g) = \text{Vect}(X, X^3)$. La famille (X, X^3) est clairement libre et est donc une base $\text{Im}(g)$.

Réponse de l'exercice 20.13

1. L'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ est de manière assez claire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Supposons par l'absurde qu'il existe une application linéaire injective f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Alors, de par l'injectivité de f, $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. On a alors une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 2 ce qui est absurde.
   Ainsi il n'existe pas d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
3. On peut généraliser ce résultat à deux espaces vectoriels E et F de dimension finie avec $\dim(F) < \dim(E)$:
   Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(F) < \dim(E)$ *alors il n'existe pas d'application linéaire injective de E dans F*
   Ce résultat se prouve de la même manière qu'à la question précédente. Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$, on a donc $p < n$.
   Supposons par l'absurde qu'il existe une application linéaire injective f de E dans F. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors, de par l'injectivité de f, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille libre de F. On a alors une famille libre de cardinal n dans un espace vectoriel de dimension $p < n$ ce qui est absurde.

Réponse de l'exercice 20.14

1. L'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$ est de manière assez claire injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Supposons par l'absurde qu'il existe une application linéaire surjective f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Alors, de par la surjectivité de f, $(f(e_1), f(e_2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. On a alors une famille génératrice de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 3 ce qui est absurde.
   Ainsi il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$
3. On peut généraliser ce résultat à deux espaces vectoriels E et F de dimension finie avec $\dim(F) > \dim(E)$:
   Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(F) > \dim(E)$ *alors il n'existe pas d'application linéaire surjective de E dans F*
   Ce résultat se prouve de la même manière qu'à la question précédente. Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$, on a donc $p > n$.
   Supposons par l'absurde qu'il existe une application linéaire surjective f de E dans F. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors, de par la surjectivité de f, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F. On a alors une famille génératrice de cardinal n dans un espace vectoriel de dimension $p > n$ ce qui est absurde.

Réponse de l'exercice 20.15

Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Soit $u \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $v \in E$ tel que $u = f(v)$. On a alors $g(u) = g \circ f(v) = f(g(v) \in \text{Im}(f)$
Ainsi $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $g(u) \in \mathrm{Ker}(f)$.
On a $f(g(u)) = g(f(u)) = g(0_E) = 0_E$. D'où $g(u) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi $g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Réponse de l'exercice 20.16

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Supposons d'abord que $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$
Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, il existe alors $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On en déduit que $v(x) = v \circ u(y) = 0_E$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(v)$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$
Supposons maintenant que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$
Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. Ainsi $v \circ u(x) = 0_E$.
On a donc montré que, pour tout $x \in E$, $v \circ u(x) = 0$, c'est-à-dire $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Réponse de l'exercice 20.17

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre ; FAUX
   Si, par exemple $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ alors la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ contient le vecteur nul et est donc lié. L'exemple le plus flagrant est le cas où $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.
2. Si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre ; VRAI
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$$
   Alors
   $$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = f(0_E) = 0_F$$
   Par liberté de la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ on a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est donc libre.
3. Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est génératrice de E alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de F ; FAUX
   Si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de F alors F est surjective, ce qui n'est pas toujours le cas, prendre par exemple le cas où $\dim(F) > \dim(E)$.
4. Si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de F alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est génératrice de E ; FAUX
   Prenons par exemple l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$
   Alors la famille $f(1, 0)$ est génératrice de $\mathbb{R}$ mais $(1, 0)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.
5. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ alors f est injective ; FAUX
   Si $\mathrm{Im}(f) = F$ alors f est surjective mais pas forcement injective. Considérons par exemple l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$
   On a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ mais $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, f n'est pas injective.
6. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$ alors f est injective ; VRAI
   C'est un résultat du cours.
7. Si g est une autre application linéaire de E dans F avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ alors $f = g$. FAUX

Prenons par exemple $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$.

Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ mais $f \neq g$.

Réponse de l'exercice 20.18

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{10}{7} L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi a est de rang 2.
Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4),(1,4,7))$.
On sait que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) = \mathrm{Rang}(\varphi_A) = 2$. Ainsi, les bases de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ sont de cardinal 2. On sait que de toute famille génératrice on peut extraire une base, on va alors extraire une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ à partir de la famille $(1,-3,-3),(2,1,4),(1,4,7)$.
On a $\mathrm{Rang}((1,-3,-3),(2,1,4)) = 2$. Ainsi

$$\mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4)) \subset \mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4),(1,4,7))$$

et

$$\dim(\mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4))) = \dim(\mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4),(1,4,7)))$$

D'où $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}((1,-3,-3),(2,1,4))$ et $((1,-3,-3),(2,1,4))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi_A) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; , \; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; , \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; , \; \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \right\} \\
&= \{(z,-z,z) \; , \; z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((1,-1,1))
\end{aligned}$$

Ainsi $(1,-1,1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors φ_A n'est pas inversible.

— $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -20 & 42 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{6}L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -20 & 42 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 20L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi B est de rang 3. Notons φ_B l'application linéaire canoniquement associé à B. Alors $\mathrm{Im}(\varphi_B) = \mathrm{Vect}((4,1,10),(2,2,0),(0,-3,12)) = \mathbb{R}^3$ et donc $((4,1,10),(2,2,0),(0,-3,12))$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $\mathrm{Im}(\varphi_B)$ qui est de dimension 3, $((4,1,10),(2,2,0),(0,-3,12))$ est ainsi une base de $\mathrm{Im}(\varphi_B) = \mathbb{R}^3$.
De plus $\mathrm{Ker}(\varphi_B) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
φ_B est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à B^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -20 & 42 & 0 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{6}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -20 & 42 & 0 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 20L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Et donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

φ_B^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à B^{-1}, c'est-à-dire

$$\begin{array}{cccc} \varphi_B^{-1} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \left(2x - 2y - \frac{z}{2}, -\frac{7x}{2} + 4y + z, -\frac{5x}{3} + \frac{5y}{3} + \frac{z}{2}\right) \end{array}$$

— $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi C est de rang 1. On note φ_C l'application linéaire canoniquement associée à C. Alors $\mathrm{Im}(\varphi_C) = \mathrm{Vect}((1,-3,-2),(1,-3,-2),(-1,3,2)) = \mathrm{Vect}((1,-3,-2))$. $(1,-3,-2)$ est donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi_C)$.

On a de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\varphi_C) &= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ x+y-z=0\right\}\\ &= \{(z-y,y,z)\ ,\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}((1,0,1),(-1,1,0))\end{aligned}$$

La famille $(1,0,1),(-1,1,0)$ est clairement libre et est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_C)$.
Comme $\mathrm{Ker}(\varphi_C)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, φ_C n'est pas inversible.

— $D = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Ainsi D est de rang 3. Notons φ_D l'application linéaire canoniquement associé à D. Alors $\mathrm{Im}(\varphi_D) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)) = \mathbb{R}^3$ et donc $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $\mathrm{Im}(\varphi_D)$ qui est de dimension 3, $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ est ainsi une base de $\mathrm{Im}(\varphi_D)=\mathbb{R}^3$.
De plus $\mathrm{Ker}(\varphi_D)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
φ_D est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à D^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$
$L_2 \leftarrow -L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Et donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

φ_D^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à D^{-1}, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_D^{-1} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y-z}{2}, \dfrac{x-y+z}{2}, \dfrac{-x+y+z}{2}\right) \end{array}$$

— $E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -2 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -21 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E est donc de rang 3. On note $\varphi_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire canoniquement associée à E. On a alors $\mathrm{Im}(\varphi_E) = \mathrm{Vect}((-3,-2,1,-1),(4,4,0,4),(0,7,-7,0))$. On sait de plus que $\mathrm{Im}(\varphi_E)$ est de dimension 3. Ainsi $((-3,-2,1,-1),(4,4,0,4),(0,7,-7,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_E)$. D'après le théorème du rang on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_E) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{Rang}(\varphi_E)) = 3 - 3 = 0$$

D'où $\mathrm{Ker}(\varphi_E) = \{0\}$.
φ_E n'est pas inversible car $\dim(\mathbb{R}^4) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

— $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftrightarrow L_2$
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftrightarrow L_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F est donc de rang 4. Notons φ_F l'application linéaire canoniquement associée à F. Alors $\mathrm{Im}(\varphi_F) = \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)) = \mathbb{R}^4$ et donc $((1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0))$ est une famille génératrice de cardinal 4 de $\mathrm{Im}(\varphi_F)$ qui est de dimension 4, $((1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,$ est ainsi une base de $\mathrm{Im}(\varphi_F) = \mathbb{R}^4$.
De plus $\mathrm{Ker}(\varphi_F) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
φ_F est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à F^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftrightarrow L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Et donc $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

φ_F^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à F^{-1}, c'est-à-dire

$$\begin{array}{cccc} \varphi_F^{-1} : & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (y, -y+z, -y+t, x+y-z-t) \end{array}$$

— $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G est donc de rang 2. Soit $\varphi_G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à G.
Alors $\mathrm{Im}(\varphi_G) = \mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0),(1,3,5),(5,-4,6))$. On sait que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_G)) = \mathrm{Rang}(\varphi_G) = 2$. Ainsi, les bases de $\mathrm{Im}(\varphi_G)$ sont de cardinal 2. On sait que de toute famille génératrice on peut extraire une base, on va alors extraire une base de $\mathrm{Im}(\varphi_G)$ à partir de la famille $((2,-1,3),(-1,2,0),(1,3,5),(5,-4,6))$.
On a $\mathrm{Rang}((2,-1,3),(-1,2,0)) = 2$. Ainsi

$$\mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0)) \subset \mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0),(1,3,5),(5,-4,6))$$

et

$$\dim(\mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0))) = \dim(\mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0),(1,3,5),(5,-4,6)))$$

D'où $\mathrm{Im}(\varphi_G) = \mathrm{Vect}((2,-1,3),(-1,2,0))$ et $((2,-1,3),(-1,2,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_G)$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi_G) &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ \begin{cases} x = \frac{y}{2} - \frac{z}{2} - \frac{5t}{2} \\ \frac{3y}{2} = -\frac{7z}{2} + \frac{3t}{2} \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \left(-\frac{5z}{3} - 2t, -\frac{7z}{3} + t, z, t \right) \ , \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 1, 0 \right), (-2,1,0,1) \right)
\end{aligned}$$

La famille $\left(\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 1, 0 \right), (-2,1,0,1) \right)$ est libre et, par conséquent, est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_G)$. Comme $\dim(\mathbb{R}^4) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ alors φ_G n'est pas inversible.

Réponse de l'exercice 20.19

1. De l'égalité $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ on tire

$$f \circ (f - 3\mathrm{Id}_E) = -2\mathrm{Id}_E$$

$$(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ f = -2\mathrm{Id}_E$$

D'où

$$f \circ \left(\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2} f \right) = \mathrm{Id}_E$$

$$\left(\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f\right) \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Ainsi f est inversible et $f^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f$.

2. On procède par récurrence. On a
   - $f^0 = \mathrm{Id}_E$, d'où $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.
   - $f^1 = f$, d'où $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$.
   - $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}$, d'où $\alpha_2 = 3$ et $\beta_2 = -2$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}$.
   Alors

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f \circ f^n \\ &= f \circ \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id} \\ &= \alpha_n f^2 + \beta_n f \\ &= \alpha_n(3f - 2\mathrm{Id}) + \beta_n f \\ &= (3\alpha_n + \beta_n)f - 2\alpha_n \mathrm{Id} \end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n$ et$\beta_{n+1} = -2\alpha_n$ on a bien

$$f^{n+1} = \alpha_{n+1} f + \beta_{n+1}\mathrm{Id}$$

   On a ainsi montré que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n \end{cases}$$

   sont telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\alpha_{n+2} = 3\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 3\alpha_{n+1} - 2\alpha_n$$

   Posons alors $P = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$ le polynôme caractéristique de notre relation de récurrence.
   Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = A1^n + B2^n$$

   On a $\alpha_0 = 0 = A + B$ et $\alpha_1 = 1 = A + 2B$ d'où $A = -1$ et $B = 1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = 2^n - 1$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a également $\beta_n = -2\alpha_{n-1} = -2(2^{n-1} - 1) = 2 - 2^n$
   Finalement on obtient l'expression suivante de f^n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\mathrm{Id}$$

4. On sait que $f^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f$, et que $f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n$ d'où, en composant par f^{-1}

$$f^{-2} = \frac{3}{2}f^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{Id}$$

   De manière similaire aux questions précédentes on montre qu'il existe deux suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{-n} = \gamma_n f^{-1} + \delta_n \mathrm{Id}$$

avec

$$\gamma_0 = 0,\ \delta_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \gamma_{n+1} = \dfrac{3}{2}\gamma_n + \delta_n \\ \delta_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\gamma_n \end{cases}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \gamma_{n+2} = \frac{3}{2}\gamma_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma_n$$

Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est $P = X^2 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2} = (X-1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$
Ainsi il existe $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \gamma_n = C1^n + D\frac{1}{2^n}$$

On a $\gamma_0 = C + D = 0$ et $\gamma_1 = 1 = C + \dfrac{D}{2}$, d'où $C = 2$ et $D = -2$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \gamma_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\delta_n = -\frac{1}{2}\gamma_{n-1} = -\frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} - 1$$

et finalement, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} f^{-n} &= \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) f^{-1} + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) \mathrm{Id} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) \mathrm{Id} \\ &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) f + \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \mathrm{Id} \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 20.20

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer le rang de ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + \dfrac{7}{5} L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{29}{5} & \dfrac{29}{5} \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{29}{5} L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

Soit $m \in \mathbb{R}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - (1+m)L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 0 & -2-m & 1+m^2 \\ 0 & -m-2 & 1+2m \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 0 & -(m+2) & 1+m \\ 0 & 0 & m(2-m) \end{pmatrix}$$

On voit alors que, si $m \in \{-2, 0, 2\}$ alors B est de rang 2 et si $m \notin \{-2, 0, 2\}$ alors B est de rang 3.

Réponse de l'exercice 20.21

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
   $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi A est de rang 2.

2. (a) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A$$

(b) D'après la question 1. on sait que $\mathrm{Rang}(\varphi) = 2$.
On a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1), (0, -2, 6))$. On sait que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{Rang}(\varphi_A) = 2$. Ainsi, les bases de $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont de cardinal 2. On sait que de toute famille génératrice on peut extraire une base, on va alors extraire une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ à partir de la famille $(1, -2, 1), (-2, 3, 1), (0, -2, 6)$.
On a $\mathrm{Rang}((1, -2, 1), (-2, 3, 1)) = 2$. Ainsi

$$\mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1)) \subset \mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1), (0, -2, 6))$$

et

$$\dim(\mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1))) = \dim(\mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1), (0, -2, 6)))$$

D'où $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1), (-2, 3, 1))$ et $((1, -2, 1), (-2, 3, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E \ , \ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E \ , \ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E \ , \ \begin{cases} x = 2y \\ y = -2z \end{cases} \right\} \\
&= \{-4ze_1 - 2ze_2 + ze_3 \ , \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}(-4e_1 - 2e_2 + e_3)
\end{aligned}$$

Ainsi $-4e_1 - 2e_2 + e_3$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Réponse de l'exercice 20.22

1. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est une application bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, elle est en particulier surjective, ainsi son rang est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire 3. De même le rang de $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}$ est égal à la dimension de $\mathbb{C}_3[X]$, c'est-à-dire 4.
2. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.
$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1}{2}L_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est de rang 2 et donc f est de rang 2.

3. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Un pivot de Gauss rapide nous montre que la rang de g est alors 2.

4. h est clairement surjective (si $c \in \mathbb{R}$ alors $c = h(cX)$), ainsi la rang de h est égal à la dimension de $\mathbb{R}$, soit 1.

Réponse de l'exercice 20.23

1. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Soit $y_1 = 2e_2 + 3e_3$, $y_2 = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $y_3 = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$. On sait alors qu'il existe application linéaire φ telle que $\varphi(e_1) = y_1$, $\varphi(e_2) = y_2$ et$\varphi(e_3) = y_3$.
2. Notons $\mathcal{B}$ la base (e_1, e_2, e_3). Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

On a, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On va résoudre l'équation $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss en utilisant une matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -6 & 4 & 0\\ 3 & -8 & 5 & 0\end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_2$
$L_1 \leftarrow -L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Ainsi on a $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

C'est-à-dire si et seulement si $x = z$ et $y = z$.
Ainsi

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3\ ,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x = y = z\} = \{x(e_1+e_2+e_3)\ ,\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$$

$e_1 + e_2 + e_3$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.

3. On a

$$N = \mathrm{Mat}(\varphi^2 + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}(\varphi^2)^3 + I_3 = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{Id}_E) &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3\ ,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ 2x - 2y + 2z = 0\}\\ &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3\ ,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x = y - z\}\\ &= \{y(e_1 + e_2) + z(-e_1 + e_3)\ ,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, -e_1 + e_3)\end{aligned}$$

Vérifions que la famille $(e_1+e_2, -e_1+e_3)$ est libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(e_1+e_2)+\mu(-e_1+e_3)=0_E$. D'où

$$(\lambda-\mu)e_1+\lambda e_2+\mu e_3=0_E$$

Comme la famille (e_1,e_2,e_3) est une base ceci implique que $\lambda-\mu=\lambda=\mu=0$.
Ainsi la famille $(e_1+e_2,-e_1+e_3)$ est libre est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi^2+\mathrm{Id})$.

4. Soit $u\in\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^2+\mathrm{Id}_E)$. Alors, comme $u\in\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)$ alors $\varphi(u)=u$ et donc $\varphi^2(u)=u$.
On a également, comme $u\in\mathrm{Ker}(\varphi^2+\mathrm{Id}_E)$, $\varphi^2(u)=-u$.
Finalement on obtient $u=-u$, d'où $u=0_E$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^2+\mathrm{Id}_E)=\{0_E\}$
5. Notons $f_1=e_1+e_2+e_3$, $f_2=e_1+e_2$ et $f_3=-e_1+e_3$. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_3f_3=0_E$.
On a alors $u=\lambda_1f_1=-\lambda f_2-\lambda f_3\in\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^2+\mathrm{Id}_E)$ et donc $u=0$. Ce qui implique que

$$\lambda_1f_1=0_E \qquad \lambda_2f_2+\lambda_3f_3=0_E$$

Ainsi $\lambda_1=0$ et, par liberté de la famille (f_2,f_3), $\lambda_2=\lambda_3=0$.
La famille (f_1,f_2,f_3) est finalement une famille libre de cardinal de E qui est un espace vectoriel de dimension 3, la famille (f_1,f_2,f_3) est donc une base de E.

Réponse de l'exercice 20.24

On va montrer que la famille $(x,f(x),...,f^{n-1}(x))$ est libre. Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots\lambda_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_0x+\lambda_1f(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(x)=0_E$$

En composant par f^{n-1} on a alors

$$\lambda_0f^{n-1}(x)+\lambda_1f^n(x)+\cdots\lambda_{n-1}f^{2n-2}(x)=0$$

Or, comme $f^n(x)=0$, on a alors, pour $k\in\mathbb{N}$, $f^{n+k}(x)=f^k(f^n(x))=f^k(0_E)=0_E$. Ainsi

$$\lambda_0f^{n-1}(x)+\lambda_1f^n(x)+\cdots\lambda_{n-1}f^{2n-2}(x)=\lambda_0f^{n-1}(x)$$

On a alors $\lambda_0f^{n-1}(x)=0$, d'où, comme $f^{n-1}(x)\neq0_E$, $\lambda_0=0$.
Ainsi

$$\lambda_1f(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(x)=0_E$$

En composant par f^{n-2} on obtient de manière similaire $\lambda_1f^{n-1}(x)=0_E$, d'où $\lambda_1=0$.
On répète ce procédé et finalement on obtient $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$. La famille $(x,f(x),...,f^{n-1}(x))$ est alors une famille libre de cardinal n dans E qui est un espace vectoriel de dimension n, c'est ainsi une base de E.

Réponse de l'exercice 20.25

1. Soit $P\in\mathrm{Ker}(\Psi)$. On a alors $P(x_1)=\cdots=P(x_n)=0$. P admet donc n racines distinctes $x_1,\cdots,x_n$. Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et, à ce titre, n'admet plus de $n-1$ racines que s'il s'agit du polynôme nul. On a ainsi $P=0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
Puisque $\mathrm{Ker}(\Psi)=\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$, f est donc injective.
2. On a $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])=n=\dim(\mathbb{R}^n)$. Ψ est alors une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, c'est donc un isomorphisme.

3. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Comme Ψ est un isomorphisme alors $V(x_1, x_2, \cdots x_n)$ est inversible.
On appelle la matrice $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une matrice de Vandermonde.

Réponse de l'exercice 20.26

1. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors
$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$$
Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, f est donc injective. Puisque $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et que $\dim(E) = \dim(E)$ alors f est bijective.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Soit $y \in E$, alors $y = f(g(y)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. f est ainsi surjective et, comme $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et que $\dim(E) = \dim(E)$ alors f est bijective.

Chapitre 21

Variables aléatoires réelles finies

Exercices

Exercice 21.1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0.1	0.35	0.15	0.25	0.15

1. Tracer le diagramme en bâtons de X.
2. Donner sa fonction de répartition et en tracer le graphe.
3. Calculez $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(-3,5 < X \leqslant -2)$ et $\mathbb{P}(-3,5 < X < -2)$.
4. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$.

Exercice 21.2

Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et X une v.a.r à valeurs dans $[\![0, 3]\!]$ dont la loi de probabilité est définie par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \theta \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} - \theta$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.
3. Donner la loi de probabilité des v.a.r. suivantes :

$$S = \frac{(1-X)(2-X)(3-X)}{6} \qquad T = \frac{X(3-X)}{2} \qquad V = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

Exercice 21.3

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -2 \leqslant x < 1 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = -1)$.
4. Déterminer la loi de X
5. Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = \dfrac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Exercice 21.4

Aurore organise une loterie. Elle vend 50 billet à 1€ chacun, puis choisit au hasard (de manière équiprobable) un billet. Le détenteur du billet en question gagne alors une bicyclette achetée en solde pour 35€. Bastien achète un billet et Catherine en achète deux.

1. Calculer la probabilité que Bastien gagne, que Catherine gagne.
2. On note B le gain de Bastien et C celui de Catherine. Calculer l'espérance et la variance de B, ainsi que l'espérance de C.

Exercice 21.5

Un dé à six faces amène le six avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$) à chaque lancer. On le lance indéfiniment, et on note X_n la v.a.r. égale au nombre de fois où le six est sorti au cours des $6n$ premiers lancer ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Écrire l'inégalité de Bienaymé–Tchebichev pour la v.a.r. X_n.
3. On suppose le dé honnête. D'après l'inégalité, quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition du six qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur $\dfrac{1}{6}$?

Exercice 21.6

Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 1€ et 3 roues tournent ; ces roues présentent les dix chiffres 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise. S'il y a un « double »le joueur touche 2€ et s'il y a un « triple »le joueur touche y€ (y est un entier).

Pour quelles valeurs de y le jeu est-il favorable au tenancier ?

Exercice 21.7

On extrait au hasard 6 lapins de leur cage. Chaque animal possède, indépendamment des autres, la probabilité 0.5 d'être un mâle. Soit C la variable aléatoire égale au nombre de couples mâle–femelle formés simultanément avec les 6 animaux. Donner la loi de C et calculer $\mathbb{E}(C)$.

Exercice 21.8

1. Trois garçons invitent trois filles à une soirée. Chaque garçon choisit indépendamment des autres une fille et lui envoie un SMS. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles invitées. Donner la loi de X et calculer son espérance.
2. En fait les garçons peuvent inviter une fille ou un garçon indifféremment. Reprendre la question précédente.

Exercice 21.9

N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Trouver la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Quelle est la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$? En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 21.10

On considère 4 lettres et 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit une variable aléatoire X égale au nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 21.11

On lance un dé idéal au plus cinq fois, en s'arrêtant dès que l'on a obtenu un 6. On note Y le nombre de lancer effectués. Déterminer la loi de Y.

Exercice 21.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ On lance une pièce de monnaie supposée honnête n fois de suite.

1. À l'aide l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, trouver une condition sur l'entier n pour que le rapport du nombre de face obtenus sur le nombre de lancer soit strictement compris entre $0,4$ et $0,6$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,9$.
2. Au bout de 1000 lancers, on observe une proportion de pile de $0,65$. La pièce est-elle vraiment honnête ?

Exercice 21.13

En une semaine, un changeur de monnaie a distribué 1000 pièces de monnaie dont 50 sont fausses. Guillaume a reçu 15 pièces de ce changeur. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'au moins 3 de ces pièces soient fausses.

Exercice 21.14

On considère une v.a.r. X telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

Exercice 21.15

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est sa loi exacte (avec les paramètres si l'énoncé permet de les déterminer) :

1. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est 0.48
2. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 pour qu'un accident survienne

3. Dans une délégation de 20 personnes comptant 5 femmes, nombre de femmes présentes dans une sous-délégation de 6 personnes tirées au sort.
4. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote.
5. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On note X le numéro de la boule obtenue. Loi de X ?

Exercice 21.16

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres. $X =$ nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. $X =$ nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. $X =$ nombre de boules vertes tirées.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de cœur. $X =$ nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. $X =$ nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 21.17

1. Soit X une variable de loi uniforme sur $[\![0, a]\!]$. On suppose que $\mathbb{V}(X) = 2$. Déterminer la valeur de a.
2. Soit Y une variable de loi binomiale sur $[\![0, n]\!]$. On suppose que $\mathbb{E}(Y) = 6$ et $\sigma(Y) = 2$. Déterminer la valeur de n.
3. Soit Z une variable suivant une loi binomiale, on suppose que X a une espérance de 24 et une variance de 18. Calculer les paramètres de la loi de Z.

Exercice 21.18

Une urne contient $n-1$ boules blanches et une boule noire, où $n > 1$. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang du tirage de la boule noire.

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 21.19

1. Lors d'une séance de penaltys, cinq joueurs tirent successivement leur penalty, indépendamment les uns des autres. On suppose qu'ils ont tous une probabilité $\dfrac{2}{3}$ de marquer.
   (a) Donner la loi du nombre de penaltys marqués par l'équipe.
   (b) Quelle est la probabilité pour que l'équipe réussisse exactement 3 penaltys ?
   (c) Combien, en espérance, l'équipe réussira de penaltys ?
2. Dans une entreprise de 100 personnes dont 30 femmes, on choisit au hasard une équipe de 5 joueurs (ou joueuses) pour participer à une compétition de basket.
   (a) Donner la loi du nombre de femmes dans l'équipe.
   (b) Quelle est la probabilité pour que l'équipe contienne exactement 2 femmes ?

(c) Justifier que cette probabilité peut être approchée grâce à la loi binomiale. Vérifier que cette approximation est bonne.

(d) Combien, en moyenne, l'équipe contiendra t-elle de femmes ?

Exercice 21.20

On tire 6 cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. On note Y le nombre de rois tirés.

1. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Même question avec un tirage sans remise.

Exercice 21.21

On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21.22

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 21.23

1. Soit X une v.a.r de loi uniforme sur $[\![1, 20]\!]$.
   (a) Quelle est la loi de $\max(X, 10) - 1$?
   (b) Quelle est la loi de $21 - X$?
2. Soit Y une v.a.r de loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{4}$:
   (a) Quelle est la loi de $\min(Y, 1)$?
   (b) Quelle est la loi de $10 - Y$?

Exercice 21.24

On considère une urne contenant 8 billes vertes et 8 billes bleues, dont on extrait un paquet de 8 billes. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de billes vertes dans le groupe. Calculer, à la calculatrice, $\mathbb{P}(3 \leqslant N \leqslant 5)$ et comparer avec la probabilité de l'évènement similaire pour une loi binomiale de paramètres 8 et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 21.25

Aurore (A) et Bastien (B) jouent à un petit jeu dont la règle est la suivante : A lance deux pièces et C trois ; si A obtient plus de piles que C, elle gagne 10€, s'elle en obtient autant elle gagne 1€ et s'il en obtient moins elle perd 5€. Préférerez-vous être Aurore ou Bastien ?

Exercice 21.26

On dispose d'une urne contenant 10 boules blanches et 10 boules noires. On tire 5 boules simultanément dans cette urne.

1. Calculer (à la calculatrice) la probabilité de tirer plus de boules blanches que de boules noires.
2. Reprendre la question précédente en supposant que les tirages se font successivement et avec remise.

Exercice 21.27

Cette feuille d'exercice contient k erreurs typographiques. Lors de la relecture une erreur à la probabilité $p = 0.75$ d'être détectée par un lecteur attentif (et il y a indépendance entre la détection des différentes erreurs).

1. Calculer le nombre moyen d'erreurs non détectées.
2. Calculer ensuite cette espérance si le texte est soumis à 37 relectures indépendantes.

Exercice 21.28

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 4 boules successivement, sans remise.

1. On désigne par X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. On tire 4 boules successivement, avec remise. On désigne par Y la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Reprendre la question précédente avec Y.
3. (a) Comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$, commenter.
   (b) Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ et commenter.

Exercice 21.29

Un examen comporte 15 questions chacune admettant 3 réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. On suppose que 70% des étudiants ont préparés l'examen et répondent à une question correctement avec une probabilité de 0.8, les 30% restants répondent aux questions au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité pour qu'il ait préparé l'examen ?
2. Soit M le nombre moyen de bonnes réponses pour un étudiant ayant préparé l'examen. Si un étudiant obtient cette note M quelle est la probabilité pour qu'il n'ait pas préparé l'examen ?

Exercice 21.30

Une urne contient $n > 1$ boules dont $r > 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $x \in [\![1, r]\!]$. On appelle X le rang d'apparition de la x–ième boule rouge. Trouver la loi de X.

Exercice 21.31

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n, où $n > 3$. On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y et Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer son espérance.

Exercice 21.32

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{6},\qquad \mathbb{P}(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{4}\qquad \text{et } \mathbb{P}(X=2)=P(X=-2)=\frac{1}{6}$$

Soit $Y=X^2$.

1. Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

Exercice 21.33

On lance n dés équilibrés et, pour tout entier i compris entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face i est apparue au moins une fois et à 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i .
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros de faces différents obtenus. Calculer l'espérance de X.
3. (a) Pour $(i,j)\in [\![1,6]\!]^2$, $i\neq j$, déterminer la loi conjointe de (X_i,X_j). En déduire $\operatorname{Cov}(X_i,X_j)$.
   (b) Calculer $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 21.34

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Y=j|X=i)$ pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple (X,Y).

Exercice 21.35

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y=(X+1)^2$. Calculer la covariance de X et de Y.

Exercice 21.36

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes admettant des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$. On pose $Z=X+Y$ et $T=X-Y$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Y)$.
2. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs $1,2,3$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$
3. (a) Montrer que $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Y)$.
   (b) Déterminer les lois de Z et de T. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 21.37

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathcal{B}\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$. Soit $Z=X-Y$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Z et X sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\text{Cov}(X, Z)$.

Loi de Hardy-Weinberg 21.38

En 1908, un mathématicien anglais, G.H. Hardy, et un médecin allemand W. Weinberg ont formulé une loi, connue sous le nom de loi de Hardy-Weinberg, qui concerne les fréquences alléliques pour un gène pouvant s'exprimer sous la forme de deux allèles A et a dans une population diploïde idéale. Nous dirons qu'une population est idéale lorsque

— La population est de taille infinie.
— Les individus s'y unissent aléatoirement, impliquant l'union aléatoire des gamètes. Il n'y a donc pas de choix du conjoint en fonction de son génotype. On dit alors que la population est panmictique.
— Il n'y a pas de migration. Aucune copie allélique n'est apportée de l'extérieur.
— Il n'y a pas de mutation.
— Il n'y a pas de sélection.
— Les générations sont séparées.

On a alors la loi de Hardy-Weinberg :

Si $p \in [0, 1]$ est la proportion d'allèles A dans la population initiale et $1 - p$ la proportion d'allèles a alors c'est encore le cas à chaque génération suivante.
De plus, si r, s, t sont les proportions respectives des génotypes AA, Aa et aa dans la population initiale avec $r + s + t = 1$ alors les fréquences de AA, Aa et aa pour toutes les générations suivantes sont égales à

$$\left(r + \frac{s}{2}\right)^2, \qquad 2\left(r + \frac{s}{2}\right)\left(t + \frac{s}{2}\right), \qquad \left(t + \frac{s}{2}\right)^2$$

Cette loi est généralisable à un locus avec plusieurs allèles $A_1, A_2, \cdots, A_k$.

Conséquences.

— Les relations de dominance entre allèles n'ont aucun effet sur l'évolution des fréquences alléliques.
— La ségrégation mendélienne aléatoire des chromosomes préserve la variabilité génétique des populations.
— L'évolution étant définie par un changement des fréquences alléliques, une population diploïde idéale n'évolue pas.
— Seules les violations des propriétés de la population idéale permettent le processus évolutif.

Applicabilité de la loi de Hardy-Weinberg.

Bien que les propriétés d'une population idéale apparaissent un peu surréalistes, la plupart des populations présentent des fréquences génotypiques en équilibre de Hardy-Weinberg pour une grande majorité des locus. Ceci est dû au fait que cet équilibre résulte avant tout de la ségrégation aléatoire des chromosomes qui a lieu à chaque génération. Par contre, dans les populations naturelles, les fréquences alléliques varient constamment d'une génération à l'autre sous l'influence de divers facteurs (sélection, dérive génétique, etc...). Mais l'équilibre de Hardy-Weinberg est rétabli au début de chaque génération. L'équilibre est avant tout perturbé si les gamètes ne sont pas produites aléatoirement (meiotic drive), ou si il y a choix du conjoint (consanguinité). Notez que la sélection naturelle n'affecte pas l'équilibre de Hardy-Weinberg parmi les nouveau-nés. Son effet ne devient perceptible que par la suite, au cours du développement.

On va prouver la loi de Hardy-Weinberg. Soit X_i la variable aléatoire exprimant le génotype d'un individu tiré au hasard parmi la population à la génération i. On suppose que la la loi de X_0 est donnée par le tableau suivant :

x_i	AA	Aa	aa
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	q	r

Pour obtenir un individu de la génération $i+1$ on tire indépendamment deux individus de la génération i et on tire aléatoire un des allèles de chaque individu pour constituer le génotype de notre nouvel individu.

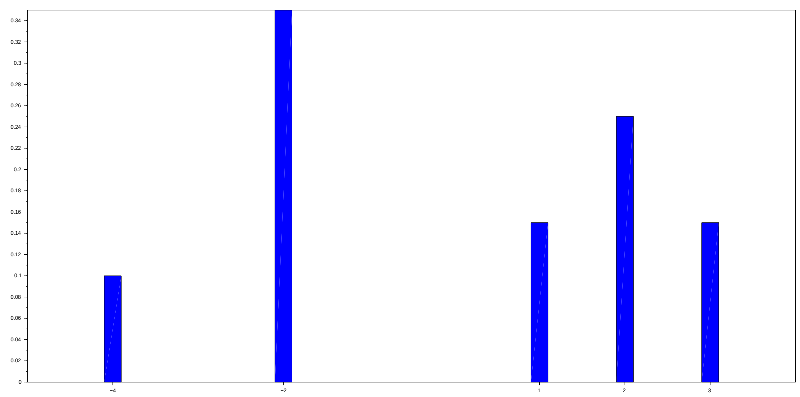
1. On note $p_i = \mathbb{P}(X_i = AA)$, $q_i = \mathbb{P}(X_i = Aa)$ et $r_i = \mathbb{P}(X_i = aa)$. Exprimer $(p_{i+1}, q_{i+1}, r_{i+1})$ en fonction de (p_i, q_i, r_i).
2. Déterminer (p_1, q_1, r_1) et (p_2, q_2, r_2). Que peut-on conclure ?

Réponses

Réponse de l'exercice 21.1

1. On obtient le diagramme en bâtons suivant

Figure 21.1 – Diagramme en bâtons de X

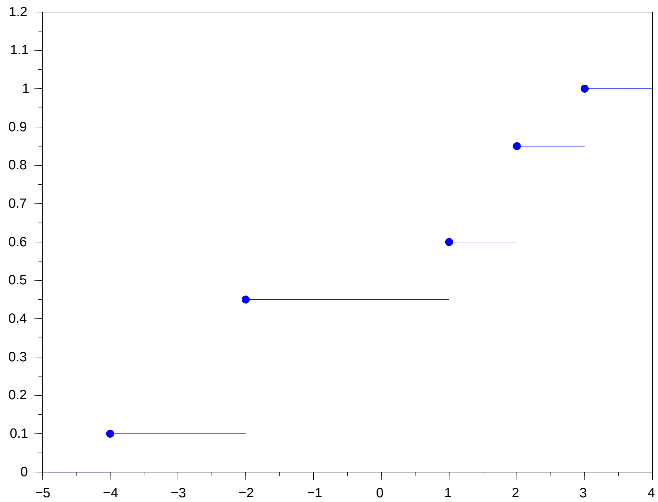


2. La fonction de répartition F_X de X est

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < -4 \\ 0.1 & \text{si } -4 \leqslant t < -2 \\ 0.45 & \text{si } -2 \leqslant t < 1 \\ 0.6 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 0.85 & \text{si } 2 \leqslant t < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leqslant t \end{cases}$$

Son graphe est

Figure 21.2 – Fonction de répartition de X



3. On a
   - $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X \in \{-4, -2\}) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = -2) = 0.45$
   - $\mathbb{P}(X > -1) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant -1) = 1 - F(-1) = 1 - 0.45 = 0.55$
   - $\mathbb{P}(-3,5 < X \leqslant -2 = \mathbb{P}(X = -2) = 0.1$
   - $\mathbb{P}(-3,5 < X < -2) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
4. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$.

   On commence par déterminer $|X|(\Omega)$, on a $|X|(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$
   - $\mathbb{P}(|X| = 1) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x|=1}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 1) = 0.15$
   - $\mathbb{P}(|X| = 2) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x|=2}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.6$
   - $\mathbb{P}(|X| = 1) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x|=3}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 3) = 0.15$
   - $\mathbb{P}(|X| = 1) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x|=4}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -4) = 0.1$

   Ainsi la loi de $|X|$ est donnée par le tableau suivant

x_i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\lvert X\rvert = x_i)$	0.15	0.6	0.15	0.1

   On a $(X^2 + X - 2)(\Omega) = \{0, 4, 10\}$
   - $\mathbb{P}(X^2 + X - 2 = 0) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x^2+x-2=0}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 1) = 0.5$
   - $\mathbb{P}(X^2 + X - 2 = 4) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x^2+x-2=4}} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 2) = 0.25$

— $\mathbb{P}(X^2+X-2=10) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x^2+x-2=10}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=-4)+\mathbb{P}(X=3) = 0.25$

Ainsi la loi de X^2+X-2 est donnée par le tableau suivant

x_i	0	4	10
$\mathbb{P}(X^2+X-2=x_i)$	0.5	0.25	0.25

On a $(\inf(X,1))(\Omega) = \{-4,-2,1\}$

— $\mathbb{P}(\inf(X,1)=-4) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \inf(x,1)=-4}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=-4) = 0.1$

— $\mathbb{P}(\inf(X,1)=-2) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \inf(x,1)=-2}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=-2) = 0.35$

— $\mathbb{P}(\inf(X,1)=1) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \inf(x,1)=1}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3) = 0.55$

Ainsi la loi de $\inf(X,1)$ est donnée par le tableau suivant

x_i	-4	-2	1
$\mathbb{P}(X^2+X-2=x_i)$	0.1	0.35	0.55

Enfin on a $(\sup(X,-X^2))(\Omega) = \{-4,-2,1,2,3\}$

— $\mathbb{P}(\sup(X,-X^2)=-4) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \sup(x,-x^2)=-4}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=-4) = 0.1$

— $\mathbb{P}(\sup(X,-X^2)=-2) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \sup(x,-x^2)=-2}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=-2) = 0.35$

— $\mathbb{P}(\sup(X,-X^2)=1) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \sup(x,-x^2)=1}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=1) = 0.15$

— $\mathbb{P}(\sup(X,-X^2)=2) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \sup(x,-x^2)=2}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=2) = 0.25$

— $\mathbb{P}(\sup(X,-X^2)=3) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \sup(x,-x^2)=3}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=3) = 0.15$

Ainsi la loi de $\sup(X,-X^2)$ est donnée par le tableau suivant

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	0.1	0.35	0.15	0.25	0.15

$\sup(X,-X^2)$ est donc de même loi que X.

Réponse de l'exercice 21.2

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\ &= 0\theta + 1\left(\frac{1}{2}-\theta\right) + 2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) + 3\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \\
&= 0^2\theta + 1^2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) + 2^2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) + 3^2\theta \\
&= \frac{5}{2} + 4\theta
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 4\theta + \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = 4\theta + \frac{1}{4}$$

2. On a $R(\Omega) = \{0\}$, ainsi R suit la loi certaine égale à 0.
3. On a $S(\Omega) = \{0,1\}$ et
   — $\mathbb{P}(S=0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{6}=0}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) = 1-\theta$
   — $\mathbb{P}(S=1) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{6}=1}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=0) = \theta$

   Ainsi S suit une loi de Bernoulli de paramètre θ.

   On a $T(\Omega) = \{0,1\}$ et
   — $\mathbb{P}(T=0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{x(3-x)}{2}=0}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=3) = 2\theta$
   — $\mathbb{P}(T=1) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{x(3-x)}{2}=1}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 1-2\theta$

   Ainsi T suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-2\theta$.

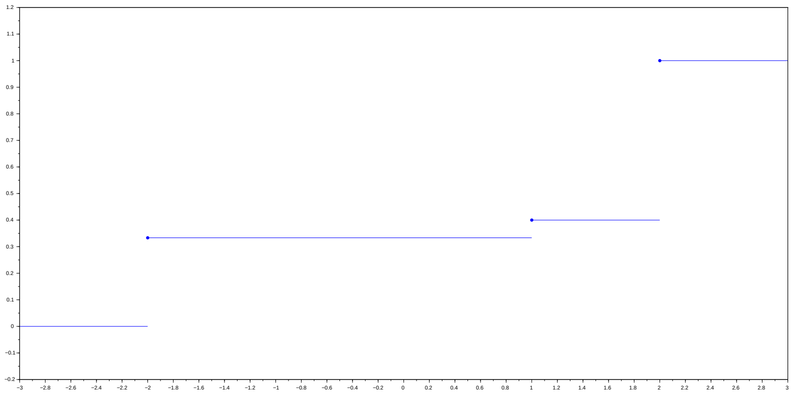
   On a $V(\Omega) = \{0,1\}$ et
   — $\mathbb{P}(V=0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{x(x-1)(x-2)}{6}=0}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 1-\theta$
   — $\mathbb{P}(V=1) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \frac{x(x-1)(x-2)}{6}=1}} \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=3) = \theta$

   Ainsi V suit une loi de Bernoulli de paramètre θ.

Réponse de l'exercice 21.3

1. Le graphe de F est le suivant

Figure 21.3 – Fonction de répartition de X



2. On a $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = F(0) = \dfrac{1}{3}$
3. $\mathbb{P}(X = 1)$ correspond à la « hauteur du saut que F fait en 1 », soit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \lim_{t \to 1^+} F(t) - \lim_{x \to 1^-} F(t) \\ &= 1 - \frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(X = -1)$ correspond à la « hauteur du saut que F fait en -1 », soit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -1) &= \lim_{t \to -1^+} F(t) - \lim_{x \to -1^-} F(t) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de X fait des « sauts »en $-2, 1$ et 2. Ainsi $X(\Omega) = \{-2, 1, 2\}$ et on a
   — $\mathbb{P}(X = -2) = \dfrac{1}{3} - 0 = \dfrac{1}{3}$
   — $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15}$
   — $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$
5. On a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{2} \leqslant t\right) = \mathbb{P}(X \leqslant 2t) = F_X(2t)$$

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(X + 2 \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t - 2) = F_X(t - 2)$$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

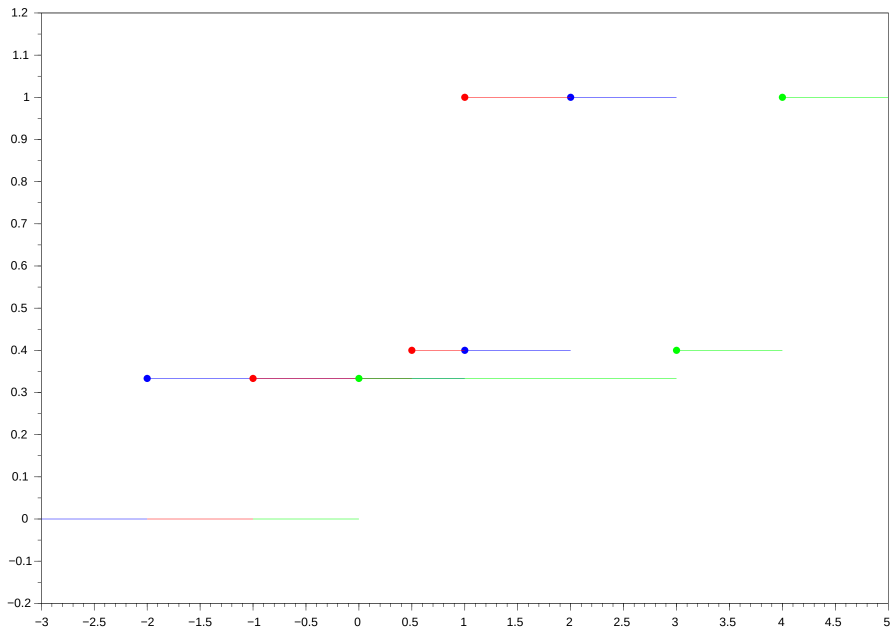
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2t < -2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } -2 \leqslant 2t < 1 \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } 1 \leqslant 2t < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant 2t \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } -1 \leqslant t < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t \end{cases}$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-2 < -2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } \ -2 \leqslant t-2 < 1 \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } 1 \leqslant t-2 < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant t-2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 \leqslant t < 3 \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } 3 \leqslant t < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leqslant t \end{cases}$$

Sur le graphique suivant, F_X est racée en bleu, F_Y en rouge et F_Z en vert.

Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = \dfrac{X}{2}$ et $Z = X + 2$.

Figure 21.4 – Fonctions de répartition de X, Y et Z



Réponse de l'exercice 21.4

1. Notons G_i l'événement « le billet i est gagnant »où le billet 1 est acheté par Bastien et les billets 2 et 3 par Catherine, on a alors
   — $\mathbb{P}(\text{ Bastien gagne }) = \mathbb{P}(G_1) = \dfrac{1}{50}$
   — $\mathbb{P}(\text{ Catherine gagne }) = \mathbb{P}(G_2 \cup G_3) = \mathbb{P}(G_2) + \mathbb{P}(G_3) - \mathbb{P}(G_2 \cap G_3) = \dfrac{2}{50}$
2. On a $B(\Omega) = \{-1, 34\}$ et

$$\mathbb{E}(B) = -1 \times \frac{49}{50} + 34 \times \frac{1}{50} = -\frac{15}{50} = -\frac{3}{10}$$

$$\mathbb{V}(B) = \mathbb{E}(B^2) - \mathbb{E}(B)^2$$

$$\begin{aligned}&= 1 \times \frac{49}{50} + 34^2 \times \frac{1}{50} - \frac{9}{100}\\ &= \frac{2401}{100}\end{aligned}$$

On a également $C(\Omega) = \{-2, 33\}$ et

$$E(C) = -2 \times \frac{48}{50} + 33 \times \frac{2}{50} = -\frac{3}{5}$$

De manière générale, une personne qui achète k billets a une probabilité $\frac{50-k}{50}$ de perdre k€ et une probabilité $\frac{k}{50}$ de gagner $35 - k$€ ce qui donne une espérance de gain de

$$-k \times \frac{50-k}{50} + (35-k)\frac{k}{50} = -\frac{3k}{10}$$

La meilleure stratégie pour optimiser son gain moyen est donc de ne pas acheter de billets.

Réponse de l'exercice 21.5

1. X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(6n, p)$, son espérance est donc $\mathbb{E}(X) = 6np$ et sa variance $\mathbb{V}(X) = 6np(1-p)$.
2. L'inégalité de Bienaymé–Tchebichev pour la v.a.r. X_n est

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X_n - 6np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{6np(1-p)}{\varepsilon^2}$$

3. On suppose le dé honnête, d'où $p = \frac{1}{6}$.
On a alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X_n - n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{5n}{6\varepsilon^2}$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{6n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{6n}\right) \leqslant \frac{5n}{6\varepsilon^2}$$

On prend alors $\varepsilon = 6n \times 10^{-2}$ et on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{6n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant \frac{5 \times 10^4 n}{6^3 n^2}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{6n} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 10^{-2}\right) \geqslant 1 - \frac{5 \times 10^4}{6^3 n}$$

On cherche alors n de telle sorte que $1 - \frac{5 \times 10^4}{6^3 n} \geqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{10^5}{6^3}$. Or $\frac{10^5}{6^3} \simeq 462.9$.
Ainsi la plus petite valeur de n pour laquelle on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition du six qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur $\frac{1}{6}$ lorsque l'on fait $6n$ lancers est 463.

Réponse de l'exercice 21.6

Notre univers est $\Omega = [\![0, 9]\!]^3$ muni de la probabilité uniforme.

Notons X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur. On a alors $X(\Omega) = \{-1, 1, y - 1\}$

On a alors

— $\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(\text{ trois résultats différents }) = \dfrac{10\times 9\times 8}{10^3} = \dfrac{72}{100}$
— $\mathbb{P}(X=y-1) = \mathbb{P}(\text{ trois résultats égaux }) = \dfrac{10\times 1\times 1}{10^3} = \dfrac{1}{100}$
— $\mathbb{P}(X=1) = 1-\mathbb{P}(X=-1)-\mathbb{P}(X=y-1) = 1-\dfrac{72}{100}-\dfrac{1}{100} = \dfrac{27}{100}$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\ &= -1\mathbb{P}(X=-1)+1\mathbb{P}(X=1)+(y-1)\mathbb{P}(X=y-1)\\ &= -\frac{72}{100}+\frac{27}{100}+\frac{y-1}{100}\\ &= \frac{y-46}{100}\end{aligned}$$

Le jeu est favorable au tenancier si le gain moyen d'un joueur est strictement négatif, c'est-à-dire si $\mathbb{E}(X)<0$ ce qui correspond à $y<46$.

Réponse de l'exercice 21.7

On va supposer que nos lapins sont monogames et donc que si on tire par exemple 2 mâles et 4 femelles on ne forme que 2 couples.

On a $C(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et la loi de C est donnée par le tableau suivant :

c_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(C=c_i)$	$\dfrac{2}{2^6}$	$\dfrac{2\times\binom{6}{1}}{2^6}$	$\dfrac{2\times\binom{6}{2}}{2^6}$	$\dfrac{\binom{6}{3}}{2^6}$

C'est-à-dire

c_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(C=c_i)$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{6}{32}$	$\dfrac{15}{32}$	$\dfrac{10}{32}$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C) &= \sum_{c\in C(\Omega)} c\mathbb{P}(C=c)\\ &= 0\mathbb{P}(C=0)+1\mathbb{P}(C=1)+2\mathbb{P}(C=2)+3\mathbb{P}(C=3)\\ &= \frac{6+30+30}{32}\\ &= \frac{33}{16}\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.8

1. On suppose que chaque garçon choisit uniformément parmi les trois filles (très romantique).
   On a alors $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et
   — $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{3\times 1\times 1}{3^3} = \dfrac{1}{9}$
   — $\mathbb{P}(X=3) = \dfrac{3\times 2\times 1}{3^3} = \dfrac{2}{9}$

— $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=3) = \dfrac{6}{9}$

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. Dans cette nouvelle situation on a $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$. Chaque garçon peut choisir parmi 5 autres personnes (ils ne poussent pas le narcissisme jusqu'à s'inviter eux mêmes). Ainsi
   - $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$
   - $\mathbb{P}(X=3) = \dfrac{3\times 2\times 1}{5^3} = \dfrac{6}{125}$

   $X=2$ correspond à deux types de situations mutuellement incompatibles :
   - Un garçon a invité un garçon et les deux autres deux filles différentes, ce qui arrive avec une probabilité de $\dfrac{3\times 2\times 3\times 2}{5^3}$ (on choisit au hasard le garçon qui n'invite pas de filles, ce garçon a deux choix possibles puis les deux autres garçons invitent deux filles différentes)
   - Tous les garçons on invité deux filles mais une fille a été invité deux fois, ce qui arrive avec probabilité $\dfrac{2\times 2\times 3}{5^3}$ (on choisit les deux filles invitées, on choisit la fille invitée une seule fois et on choisit le garçon qui invite cette fille)

   Ainsi $\mathbb{P}(X=2) = \dfrac{36}{125} + \dfrac{12}{125} = \dfrac{48}{125}$

   Enfin on peut calculer $\mathbb{P}(X=1)$ en utilisant la relation $\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=3) = \dfrac{125-8-48-6}{125} = \dfrac{63}{125}$ On peut également dénombrer la situation $X=1$: On choisit la seule fille invitée (3 choix), chaque garçon a alors 3 choix possibles (27 situations) et on enlève les 6 situations ou aucun garçon n'a invité de filles, ce qui nous fait donc 3×21 situations soit 63 situations sur 125.

   La loi de X est donc donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{63}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{6}{125}$

Réponse de l'exercice 21.9

1. Notons T_i le résultat du tirage dans chaque urne, tirages que l'on suppose indépendants.
   Notons F_T La fonction de répartition commune des T_i (les T_i ont même loi donc même fonction de répartition), pour $t\in\mathbb{R}$ on a alors

$$\begin{aligned} F_{T_i} &= \mathbb{P}(T_i \leqslant t) \\ &= \frac{\mathrm{Card}(\{k\in[\![1,n]\!]\ ,\ k\leqslant t)}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \dfrac{\lfloor t\rfloor}{n} & \text{si } t\in[1,n[\\ 1 & \text{si } t\geqslant n \end{cases} \end{aligned}$$

   On a ensuite, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X\leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\max_{i\in[\![1,N]\!]} T_i \leqslant t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\Big(\bigcap\{T_i \leqslant t\}\Big)\\
&= \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_i \leqslant t)\\
&= F_T(t)^N\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor^N}{n^N} & \text{si } t \in [1, n[\\ 1 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= F_X(k) - F_X(k-1)\\
&= \frac{k^N}{n^N} - \frac{(k-1)^N}{n^N}\\
&= \frac{k^N - (k-1)^N}{n^N}
\end{aligned}
$$

3. On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{k^N - (k-1)^N}{n^N}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{N+1} - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)^N}{n^N}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{N+1} - \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)j^N}{n^N} \qquad \text{on prend } j = k-1\\
&= \frac{n^{N+1} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{N+1} - \sum_{j=0}^{n-1} j^{N+1} - \sum_{j=0}^{n-1} j^N}{n^N}\\
&= \frac{n^{N+1} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{N+1} - \sum_{j=1}^{n-1} j^{N+1} - 0^{N+1} - \sum_{j=0}^{n-1} j^N}{n^N}\\
&= \frac{n^{N+1} - \sum_{j=0}^{n-1} j^N}{n^N}\\
&= n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^N}{n^N}
\end{aligned}
$$

Alors $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^N$

On reconnait une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^N$, ainsi

$$
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^N = \int_0^1 t^N \, \mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}
$$

D'où

$$
\lim_{n \to +\infty} \frac{E(X)}{n} = \frac{N}{N+1}
$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{Nn}{N+1}$$

4. On a $\mathbb{E}(X) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N$

   Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ on a $-1 < \frac{j}{n} < 1$ d'où $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(X) = n$

Réponse de l'exercice 21.10

On a $\Omega = \mathfrak{S}_4$ l'ensemble des permutations d'un ensemble à 4 éléments, et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$.

Le plus « simple »ici est d'expliciter les 24 éléments de $\mathfrak{S}_4$ pour déterminer s'ils correspondent à $0, 1, 2$ ou 4 « bonnes »lettres.

On rappelle que (a, b) désigne la permutation qui échange a et b et laisse les autres éléments invariants, (a, b, c) désigne la permutation qui envoie a sur b, b sur c et c sur a et laisse les autres invariants, (a, b, c, d) est la permutation qui envoie a sur b, b sur c, c sur d et d sur a en laissant les autres éléments inchangés et $(a, b)(c, d)$ est la permutation qui échange a et b et échange c et d.

$$\begin{aligned}\Omega =&\{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4),\\ &(1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3),\\ &(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3),\\ &(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2)\}\end{aligned}$$

La loi de X est alors donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)\\ &= \frac{8}{24} + 2\frac{6}{24} + 4\frac{1}{24}\\ &= 1\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.11

On note X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 les résultats des lancers successifs que l'on suppose indépendants et suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

On a $Y(\Omega) = [\![1, 5]\!]$ et

— $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 6) = \frac{1}{6}$

—

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6\ ,\ X_2 = 6)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6)\mathbb{P}(X_2 = 6) \qquad \text{car les lancers sont indépendants)}\\ &= \frac{5}{6}\frac{1}{6}\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=3) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6\ ,\ X_2 \neq 6\ ,\ X_3 = 6)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6)\mathbb{P}(X_2 \neq 6)\mathbb{P}(X_3 = 6) \qquad \text{car les lancers sont indépendants)}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=4) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6\ ,\ X_2 \neq 6\ ,\ X_3 \neq 6\ ,\ X_4 = 6)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6)\mathbb{P}(X_2 \neq 6)\mathbb{P}(X_3 \neq 6)\mathbb{P}(X_4 = 6) \qquad \text{car les lancers sont indépendants)}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=5) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6\ ,\ X_2 \neq 6\ ,\ X_3 \neq 6\ ,\ X_4 \neq 6\ ,\ X_5 \neq 6)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6)\mathbb{P}(X_2 \neq 6)\mathbb{P}(X_3 \neq 6)\mathbb{P}(X_4 \neq 6)\mathbb{P}(X_5 \neq 6) \qquad \text{car les lancers sont indépendants)}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5\end{aligned}$$

Le tableau de la loi de Y est donc

y_i	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$

Réponse de l'exercice 21.12

1. Notons X le nombre de faces obtenus, X suit alors une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n}{4}$.
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev nous dit que, pour $\varepsilon > 0$,
   $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$
   D'où, en prenant $\varepsilon = n \times 0.1$ on obtient
   $$\mathbb{P}\left(|X - \frac{n}{2}| \geqslant n \times 0.1\right) \leqslant \frac{100n}{4n^2}$$
   C'est-à-dire
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0.1\right) \leqslant \frac{25}{n}$$
   ou encore
   $$\mathbb{P}\left(\frac{X}{4} \notin]0.4, 0.6[\right) \leqslant \frac{25}{n}$$
   En passant aux événements contraires on a alors
   $$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n} \in]0.4, 0.6[\right) \geqslant 1 - \frac{25}{n}$$
   Il ne nous reste plus qu'à trouver n tel que $1 - \frac{25}{n} \geqslant 0.9$, c'est-à-dire
   $$n \geqslant 250$$

2. L'inégalité obtenu précédemment nous dit que, si $n = 1000$ et la pièce est vraiment honnête alors

$$\begin{aligned} p\left(\frac{X}{1000} = 0.35\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{1000} - 0.5\right| \geqslant 0.15\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 150) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{150^2} \\ &\leqslant \frac{25}{22500} \\ &\leqslant \frac{1}{900} \end{aligned}$$

Si la pièce est vraiment honnête alors on a une probabilité inférieure à $\frac{1}{900}$ d'obtenir une proportion de pile de $0,65$. Il est ainsi raisonnable de penser que la pièce n'est pas honnête.

Réponse de l'exercice 21.13

Notons X le nombre de pièces fausses reçues par Guillaume. X suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(50, 9950, 15)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 1 - \frac{\binom{50}{0}\binom{950}{15}}{\binom{1000}{15}} - \frac{\binom{50}{1}\binom{950}{14}}{\binom{1000}{15}} - \frac{\binom{50}{2}\binom{990}{13}}{\binom{1000}{15}} \\ &= \frac{113600023058004501381839}{3246522832693782873159330} \qquad \text{grâce à un logiciel de calcul} \\ &\simeq 0.035 \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.14

Comme $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ on a donc $\mathbb{P}(X \geqslant n + 1) = 0$. (ce qui sera utilise dans le calcul suivant).

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{j=1}^{n+1} (j - 1)\mathbb{P}(X \geqslant j) \qquad \text{on pose } j = k + 1 \\ &= 0\mathbb{P}(X \geqslant 0) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n} (k - 1)\mathbb{P}(X \geqslant k) - n\mathbb{P}(X \geqslant n + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k - (k - 1))\mathbb{P}(X \geqslant k) \\ &= \mathbb{P}(X \geqslant k) \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

Réponse de l'exercice 21.15

1. On répète 6 fois de suite une expérience de Bernoulli qui a une probabilité de succès de 0.48. Le nombre de succès suit alors une loi binomiale de paramètres 6 et 0.48. Ici le nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est 0.48 suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(6, 0.48)$
2. On répète 365 fois de suite une expérience de Bernoulli qui a une probabilité de succès de $\frac{1}{125}$. Le nombre de succès suit alors une loi binomiale de paramètres 365 et $\frac{1}{125}$. Ici le nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 pour qu'un accident survienne suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}\left(365, \frac{1}{125}\right)$
3. On fait ici 6 tirages successifs sans remise dans une population comptant 5 femmes et 15 hommes, le nombre de femmes présentes dans une sous-délégation de 6 personnes tirées au sort suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5, 15, 6)$
4. Notons N le nombre total de bulletins et N_1 le nombre total de voix obtenus par le candidats. On effectue alors 100 tirages successifs sans remise dans un ensemble contenant N_1 bulletins pour le candidat étudié et $N - N_1$ autres bulletins. Le nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N_1, N - N_1, 100)$
5. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. Cette expérience équivaut à simplement tirer une boule parmi les 128 uniformément au hasard. X suit alors une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, 128 \rrbracket)$.

Réponse de l'exercice 21.16

1. On effectue 5 tirages successifs sans remise dans un ensemble contenant 6 voyelles et 20 consonnes. X suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(6, 20, 5)$.
2. Chaque objet a une probabilité $\frac{1}{3}$ de se trouver dans le premier tiroir. En admettant que l'on range chaque objet indépendamment des autres, X suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{3}\right)$.
3. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne qui contient 6 boules vertes et 8 autres boules. X suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(6, 8, 10)$.
4. X correspond simplement à la position de l'as de cœur dans le paquet. Si le paquet est bien mélangé l'as de cœur a autant de chance de se trouver à n'importe quelle position du paquet. X suit alors une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, 32 \rrbracket)$
5. Deux modélisations sont ici possibles. Si l'on suppose un nombre infini de trèfles dans le monde alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0.01)$, si par contre on suppose un nombre fini N de trèfles dans le monde alors X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, 0.01, 100)$. Le cours nous dit que pour N grand les deux lois $\mathcal{H}(N, 0.01, 100)$ et $\mathcal{B}(100, 0.01)$ sont similaires. En pratique le nombre de trèfles dans le monde est inconnu mais est surement extrêmement grand, on utilisera alors plutôt la loi $\mathcal{B}(100, 0.01)$.

Réponse de l'exercice 21.17

1. Soit X une variable de loi uniforme sur $[\![0,a]\!]$. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{a} \frac{k}{a+1} = \frac{a(a+1}{2(a+1)} = \frac{a}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{a} \frac{k^2}{a+1} = \frac{a(a+1)(2a+1)}{6(a+1)} = \frac{a(2a+1)}{6}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{a(2a+1)}{6} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{4a^2+2a}{12} - \frac{3a^2}{12} \\ &= \frac{a^2+2a}{12} \\ &= \frac{(a+1)^2-1}{12}\end{aligned}$$

On a ici $\mathbb{V}(X) = 2$ d'où $\dfrac{(a+1)^2-1}{12} = 2$ ce qui nous donne $a = 4$.

2. Soit Y une variable de loi binomiale de paramètre n et p. On a $\mathbb{E}(Y) = 6 = np$ et $\sigma(Y) = 2 = \sqrt{np(1-p)}$. Déterminer la valeur de n.

On a ainsi

$$1 - p = \frac{np(1-p)}{np} = \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3}$$

D'où $p = \dfrac{1}{3}$ et, par suite, $n = \dfrac{6}{\frac{1}{3}} = 18$.

3. Soit Z une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on a $np = 24$ et $np(1-p) = 18$. Ainsi

$$1 - p = \frac{np(1-p)}{np} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

D'où $p = \dfrac{1}{4}$ et $n = 96$.

Réponse de l'exercice 21.18

On peut remarquer qu'il s'agit d'une situation similaire à celle de l'exercice 2 où l'on cherchait le rang d'apparition de l'as de cœur. Ici X va suivre une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Il est possible de retrouver cette loi autrement. La probabilité que X vaille 1 est la probabilité que notre premier tirage soit la boule noire, soit $\dfrac{1}{n}$, la probabilité que X vaille 2 est la probabilité que l'on tire d'abord une boule blanche : $\dfrac{n-1}{n}$ puis la boule noire : $\dfrac{1}{n-1}$ soit au final $\dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$. De même la probabilité que X vaille 3 est la probabilité que la première boule soit blanche, que la deuxième boule soit blanche puis que la troisième soit la boule noire ce qui nous donne une probabilité de $\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\dfrac{1}{n-2} = \dfrac{1}{n}$ et ainsi de suite.

L'espérance de X vaut alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1} n\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

et la variance de X vaut

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \sum_{k=1} n\frac{k^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.19

1. (a) On répète de manière indépendante 5 fois de suite une expérience aléatoire qui a une probabilité $\frac{2}{3}$ de succès. La loi du nombre X de penaltys marqués par l'équipe est donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \frac{2}{3}\right)$.

   (b) La probabilité pour que l'équipe réussisse exactement 3 penaltys est donc

   $$\mathbb{P}(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

   (c) On a $\mathbb{E}(X) = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

2. Dans une entreprise de 100 personnes dont 30 femmes, on choisit au hasard une équipe de 5 joueurs (ou joueuses) pour participer à une compétition de basket.

   (a) La loi du nombre Y de femmes dans l'équipe est une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(30, 70, 5)$.

   (b) La probabilité pour que l'équipe contienne exactement 2 femmes est

   $$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{\binom{30}{2}\binom{70}{3}}{\binom{100}{5}} = \frac{56695}{179256} \simeq 0.3163$$

   (c) On sait que quand la population totale N_1+N_2 est grande on peut approcher une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N_1, N_2, n)$ par une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$, ici cela donne une loi $\mathcal{B}\left(5, \frac{3}{10}\right)$.

   De plus, si Z suit une loi $\mathcal{B}\left(5, \frac{3}{10}\right)$ alors

   $$\mathbb{P}(Z=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{3087}{10000} = 0.3087$$

   La différence entre les deux probabilités est suffisamment faible pour juger que l'approximation est bonne.

   (d) On a $\mathbb{E}(Y) = 5 \times \frac{30}{100} = \frac{3}{2}$

Réponse de l'exercice 21.20

1. Y correspond au nombre de succès lors d'une répétition de 6 expériences de Bernoulli indépendantes de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{8}\right)$, Y suit donc une loi $\mathcal{B}\left(6, \frac{1}{8}\right)$. On a alors

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{V}(X) = 6 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} \simeq 0.65$$

2. Dans le cas d'un tirage sans remise notons Z le nombre de rois tirés. Z suit alors une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(4, 28, 6)$. On a alors

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{6 \times 4}{32} = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{V}(Z) = 6 \times \frac{4}{32} \times \frac{28}{32} \times \frac{32-6}{32-1} = \frac{273}{496} \simeq 0.55$$

Réponse de l'exercice 21.21

1. Commençons par déterminer la loi de T,

t_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(T = t_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On en déduit la loi du couple (X, Y)

$\mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)$		x_i	
		0	1
y_j	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$
	1	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$
	2	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$
	3	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$
	4	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$

2. On en déduit les lois marginales de X et de Y en sommant sur les colonnes et les lignes

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y_j	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$

3. X et Y ne sont pas indépendantes, en effet on a

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{36} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{36} \neq \frac{3}{36}$$

Réponse de l'exercice 21.22

1. X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, son espérance est

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n+1}{2}$$

et sa variance est

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

2. Sachant que $X=k$, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$
3. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![0,n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((X,Y)=(i,j)\big)&=\mathbb{P}(Y=j|X=i)\mathbb{P}(X=i)\\&=\begin{cases}\frac{1}{n}\binom{i}{j}p^j(1-p)^i & \text{si } j\leqslant i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.23

1. Soit X une v.a.r de loi uniforme sur $[\![1,20]\!]$.
   (a) Notons $A=\max(X,10)-1$, on a $A(\Omega)=[\![9,19]\!]$ et la loi de probabilité de A est donnée par le tableau suivant

a_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\mathbb{P}(A=a_i)$	0.5	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

   (b) Notons $B=21-X$, on a $B(\Omega)=[\![1,20]\!]$ et, pour $k\in[\![1,20]\!]$ on a

$$\mathbb{P}(B=k)=\mathbb{P}(21-X=k)=\mathbb{P}(X=21-k)=0.05$$

   Ainsi B suit également la loi uniforme sur $[\![1,20]\!]$.

2. Soit Y une v.a.r de loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{4}$:
   (a) Notons $C=\min(Y,1)$, on a $A(\Omega)=[\![0,1]\!]$ et

$$p(C=1)=1-\mathbb{P}(C=0)=1-\mathbb{P}(Y=0)=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

   C suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$
   (b) Notons $D=10-Y$, on a $D(\Omega)=[\![1,20]\!]$ et, pour $k\in[\![1,20]\!]$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=k)&=\mathbb{P}(10-Y=k)\\&=\mathbb{P}(Y=10-k)\\&=\binom{10}{10-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-(10-k)}\\&=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\end{aligned}$$

   Ainsi B suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(10,\dfrac{3}{4}\right)$

Réponse de l'exercice 21.24

N suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(8,8,8)$. On a alors

$$p(3 \leqslant N \leqslant 5) = \frac{\binom{8}{3}\binom{8}{5}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{8}{4}\binom{8}{4}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{8}{5}\binom{8}{3}}{\binom{16}{8}} = \frac{1862}{2145} \simeq 0.868$$

Si M suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$ alors

$$p(3 \leqslant M \leqslant 5) = \left(\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5}\right)\frac{1}{2^8} = \frac{91}{128} \simeq 0.710$$

Les deux résultats sont relativement éloignés, on peut donc en conclure que 16 n'est pas un assez grand nombre pour que l'assimilation de la loi hypergéométrique à la loi binomiale soit valable.

Réponse de l'exercice 21.25

On va supposer que les lancers d'Aurore ou Bastien sont indépendants. Notons G le gain d'Anselme, on a $G(\Omega) = \{-5, 1, 10\}$.

On note A le nombre de piles d'Aurore et B le nombre de piles de Bastien, A suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.5)$ et B suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, 0.5)$.

Déterminons la loi de G.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G = 10) &= \mathbb{P}(\{A = 2, B = 1\} \cup \{A = 2, B = 0\} \cup \{A = 1, B = 0\}) \\
&\text{Les événements sont deux à deux incompatibles} \\
&= \mathbb{P}(A = 2, B = 1) + \mathbb{P}(A = 2, B = 0) + \mathbb{P}(A = 1, B = 0) \\
&\text{Les lancers d'Aurore et Bastien sont indépendants} \\
&= \mathbb{P}(A = 2)\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(A = 2)\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(A = 1)\mathbb{P}(B = 0) \\
&= \binom{2}{2}\frac{1}{2^2}\binom{3}{1}\frac{1}{2^3} + \binom{2}{2}\frac{1}{2^2}\binom{3}{0}\frac{1}{2^3} + \binom{2}{1}\frac{1}{2^2}\binom{3}{0}\frac{1}{2^3} \\
&= \frac{3+1+2}{2^5} \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G = 1) &= \mathbb{P}(\{A = 2, B = 2\} \cup \{A = 1, B = 1\} \cup \{A = 0, B = 0\}) \\
&\text{Les événements sont deux à deux incompatibles} \\
&= \mathbb{P}(A = 2, B = 2) + \mathbb{P}(A = 1, B = 1) + \mathbb{P}(A = 0, B = 0) \\
&\text{Les lancers d'Aurore et Bastien sont indépendants} \\
&= \mathbb{P}(A = 2)\mathbb{P}(B = 2) + \mathbb{P}(A = 1)\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(A = 0)\mathbb{P}(B = 0) \\
&= \binom{2}{2}\frac{1}{2^2}\binom{3}{2}\frac{1}{2^3} + \binom{2}{1}\frac{1}{2^2}\binom{3}{1}\frac{1}{2^3} + \binom{2}{0}\frac{1}{2^2}\binom{3}{0}\frac{1}{2^3} \\
&= \frac{3+6+1}{2^5} \\
&= \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(G = -5) = 1 - \mathbb{P}(G = 10) - \mathbb{P}(G = 1) = \frac{1}{2}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(G) = (-5) \times \mathbb{P}(G = -5) + 1 \times \mathbb{P}(G = 1) + 10 \times \mathbb{P}(G = 10) = \frac{-40+5+30}{16} = -\frac{5}{16}$$

L'espérance du gain d'Aurore étant négative elle va en moyenne perdre de l'argent, il vaut donc mieux être Bastien.

Réponse de l'exercice 21.26

1. Notons X le nombre de boules blanches tirées. X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(10, 10, 5)$. On nous demande de déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)\\ &= \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{2}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{10}{1}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{10}{1}}{\binom{20}{5}}\\ &= \frac{7752}{15504}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. On se place désormais dans la situation d'un tirage avec remise. Notons Y le nombre de boules blanches tirées. Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$ et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geqslant 3) &= \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) + \mathbb{P}(Y = 5)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right)\\ &= \frac{10+5+1}{32}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   On aboutit au même résultat ce qui est ici plus lié à la question posée qu'au choix de tirages avec ou sans remise.

Réponse de l'exercice 21.27

1. Chaque erreur est repérée indépendamment des autres avec une probabilité 0.75. Le nombre d'erreurs détectées correspond donc aux nombre de succès lorsque que l'on répète k expériences de Bernoulli indépendante de même paramètre 0.75. Ainsi le nombre d'erreurs détectées suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k, 0.75)$. On a alors $\mathbb{E}(X) = k \times 0.75$ d'où $\mathbb{E}(k - X) = k - k \times 0.75 = \frac{k}{4}$. En moyenne un quart des erreurs sont non détectées.
2. Calculons la probabilité qu'une erreur reste indétectée au bout des 37 relectures. Il faut pour cela qu'elle soit indétectée par le premier lecteur, ce qui arrive avec une probabilité $\frac{1}{4}$ puis par le second lecteur, encore une probabilité $\frac{1}{4}$, etc. Au final la probabilité de non-détection d'une erreur après 37 relectures est de $\frac{1}{4^{37}}$. Le nombre moyen d'erreurs non détectées dans le texte après ces 37 relectures est donc de

$$\frac{k}{4^37} = \frac{k}{18889465931478580854784} \simeq k \times 5 \times 10^{-23}$$

Un professeur peut donc être sur que, si ses 37 élèves relisent avec attention ce qu'il écrit, aucune erreur ne passera inaperçue.

Réponse de l'exercice 21.28

1. X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5, 11, 4)$, on a alors

$$\mathbb{E}(X) = 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{4} \qquad \mathbb{V}(X) = 4 \times \frac{5}{16} \times \frac{11}{16} \times \frac{16-4}{16-1} = \frac{11}{16}$$

2. Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{5}{16}\right)$, on a alors

$$\mathbb{E}(Y) = 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{4} \qquad \mathbb{V}(Y) = 4 \times \frac{5}{16} \times \frac{11}{16} = \frac{55}{64}$$

3. (a) On a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, ce qui correspond au fait, vu en cours, que lors d'un tirage aléatoire, le nombre moyen de « succès »est le même que l'on ait remise ou non.

   (b) On a $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{4} \simeq 0.829$ et $\sigma(Y) = \frac{\sqrt{55}}{8} \simeq 0.927$ on obtient bien deux résultats différents comme prévu.

Réponse de l'exercice 21.29

1. On va calculer la probabilité p qu'un étudiant ayant révisé réussisse. Notons S (comme sérieux) le nombre de bonnes réponses obtenues par un étudiant ayant révisé. S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.8)$. Ainsi

$$p = \mathbb{P}(S \geqslant 8) = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{15-k} = \frac{30388191232}{30517578125} \simeq 0.996$$

Ce qui est plutôt rassurant pour les élèves sérieux.
Calculons également la probabilité q qu'un étudiant n'ayant pas révisé réussie. Notons C (comme cancre) le nombre de bonnes réponses obtenues par un étudiant n'ayant pas révisé. C suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$. Ainsi

$$q = \mathbb{P}(C \geqslant 8) = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{15-k} = \frac{422009}{4782969} \simeq 0.088$$

Ce qui doit vous inciter à réviser plutôt que vous fier au hasard.
Notons R l'événement « l'élève a révisé »et E l'événement « l'élève a échoué ». D'après la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R|E) &= \frac{\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(E)}\mathbb{P}(E|R) \\
&= \frac{\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(E|R)}{\mathbb{P}(E|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(E|\overline{R})\mathbb{P}(\overline{R})} \\
&= \frac{0.7 \times (1-p)}{(1-p) \times 0.7 + (1-q) \times 0.3} \\
&= \frac{1443991495859073}{134529928995859073}
\end{aligned}$$

$$\simeq 0.011$$

Le professeur peut donc être relativement sur de ne pas réaliser d'injustices en faisant échouer un élève sérieux.

2. M est le nombre moyen de bonnes réponses pour un étudiant ayant préparé l'examen, c'est à-dire

$$M = \mathbb{E}(S) = 15 \times \frac{4}{5} = 12$$

On a également

$$\mathbb{P}(S = 12) = \binom{15}{12}\frac{4^{12}}{5^{15}} = \frac{1526726656}{6103515625} \simeq 0.250 \qquad \mathbb{P}(C = 12) = \binom{15}{12}\frac{2^3}{3^{15}}\frac{3640}{14348907} \simeq 0.00025$$

Notons R l'événement « l'élève a révisé »et D l'événement « l'élève a eu 12 ». D'après la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{R}|12) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{R})}{\mathbb{P}(D)}\mathbb{P}(D|\overline{R}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\overline{R})\mathbb{P}(D|\overline{R})}{\mathbb{P}(D|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(D|\overline{R})\mathbb{P}(\overline{R})} \\ &= \frac{30517578125}{70244808608141} \\ &\simeq 0.00043\end{aligned}$$

Il est alors raisonnable de penser qu'un élève qui a eu 12 a révisé son examen.

Réponse de l'exercice 21.30

Un tirage correspond à répartir les r boules rouges parmi les n boules totales, ce qui nous donne $\binom{n}{r}$ tirages au total, tous les tirages sont équiprobables. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ on va compter les tirages pour lesquels la x-ième boules arrive au rang k.

Pour un tel tirage la position de la k-ième boule est fixé et il nous reste à déterminer la positions de $k-1$ boules parmi les $x-1$ premières boules puis de $r-k$ boules parmi les $n-x$ dernières boules, ce qui nous donne $\binom{x-1}{k-1}\binom{n-x}{r-k}$ tirages possibles (avec la convention habituelle que $\binom{m}{j} = 0$ si $j < 0$ ou $j > m$).

Ainsi on obtient

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{n-x}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{n-(x-1)}{r-(k-1)}}{\binom{n}{r}}\frac{r-(k-1)}{n-(x-1)}$$

Ce qui, et c'est une autre manière d'arriver à la solution, correspond à la probabilité de tirer $x-1$ boules rouges lors d'un tirage sans remise de $k-1$ boules puis de tirer ensuite une boule rouge quand il reste $r-(k-1)$ boules rouges parmi $n-x-1$ boules restantes.

Réponse de l'exercice 21.31

1. Le triplet (X, Y, Z) est tiré uniformément au hasard parmi tous les triplets possibles $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j < k$. Il y a autant de tels triplets que d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, 3\}$ dans $[\![1, n]\!]$ dont on a vu en début d'année qu'il y en a $\binom{n}{3}$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, on va déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) possibles où $Y = j$. Remarquons tout d'abord que si $j = 1$ ou $j = n$ il n'y a pas de triplet possible.
Si $Y = j \in [\![2, n-1]\!]$ alors on a $j-1$ choix possibles pour X et $n-j$ choix pour Z, ce qui nous donne $(j-1)(n-j)$ triplets possibles.
On obtient ainsi

$$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{(j-1)(n-j)}{\binom{n}{3}} = \dfrac{6(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \text{ si } j \in [\![2, n-1]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Un moyen de vérifier notre raisonnement est de vérifier que $\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1} \mathbb{P}(Y = j) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n-1} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{6(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=2}^{n-1} (-j^2 + (n+1)j - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-j^2 + (n+1)j - n) - (-1 + (n+1) - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + (n+1) \sum_{j=1}^{n-1} j - (n-1)n \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n+1)\frac{(n-1)n}{2} - (n-1)n \right) \\
&= \frac{6}{n-2} \left(-\frac{(2n-1)}{6} + \frac{n+1}{2} - 1 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calculons l'espérance de Y, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = &= \sum_{j=2}^{n-1} j\mathbb{P}(Y = j) \\
&= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{6j(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=2}^{n-1} (-j^3 + (n+1)j^2 - nj) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-j^3 + (n+1)j^2 - nj) - (-1 + (n+1) - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} j^3 + (n+1) \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - n \sum_{j=1}^{n-1} j \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + (n+1)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{n-2}\left(-\frac{(n-1)n}{4} + \frac{(n+1)(2n-1)}{6} - \frac{n}{2}\right)$$
$$= \frac{n^2-7n-2}{2n-4)}$$

On a utilisé ici le résultat suivant
$$\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

Réponse de l'exercice 21.32

1. La loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau à doubles entrées suivant

$\mathbb{P}\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big)$		x_i				
		-2	-1	0	1	2
y_j	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
	2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

On en déduit la loi de Y en sommant sur les lignes,

y_j	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. X et Y ne sont pas indépendantes, en effet on a
$$\mathbb{P}(X=0,Y=1)=0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{12}\neq 0$$
Pour calculer la covariance de X et Y on a besoin de l'espérance de X et de Y. On a
$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{6}\times(-2)+\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{6}\times 2=0$$
$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times 2=\frac{7}{6}$$
Puis
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,5]\!]\times[\![1,3]\!]} x_iy_j\mathbb{P}\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big) - 0\times\frac{7}{6}\\ &= \frac{1}{6}\times 0\times 0+\frac{1}{4}\times(-1)\times 1+\frac{1}{4}\times 1\times 1+\frac{1}{6}\times(-2)\times 2+\frac{1}{6}\times 2\times 2\\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi X et Y sont de covariance nulle mais ne sont pas indépendantes.

Réponse de l'exercice 21.33

1. X_i suit une loi de Bernoulli, déterminons son paramètre. X_i vaut 0 si la face i n'est jamais apparue, ce qui arrive avec probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. X_i suit donc une loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$
2. On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)\\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_4) + \mathbb{E}(X_5) + \mathbb{E}(X_6)\\ &= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\end{aligned}$$

3. (a) Soit $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, $i \neq j$, on a tout d'abord $\mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. De plus on peut remarquer que

$$\{X_i = 0\} = \{X_i = 0X_j = 1\} \cup \{X_i = 0, X_j = 0\}$$

et que les deux événements sus-mentionnés sont incompatibles. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 0X_j = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0)$$

D'où

$$P(X_i = 0, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) - \mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et de manière similaire

$$P(X_i = 1, X_j = 0) = \mathbb{P}(X_j = 0) - \mathbb{P}(X_j = 0, X_1 = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On obtient finalement la loi conjointe de (X_i, X_j)

$\mathbb{P}\big((X_i, X_j) = (a_k, b_l)\big)$		a_k	
		0	1
b_l	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
	1	$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$1 - 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Et, par suite

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2\\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\end{aligned}$$

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas de i et j.

(b) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= 6\mathbb{V}(X_1) + 15 \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right) \\
&= 6 \times \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + 15 \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right) \\
&= 6\left(\frac{5}{6}\right)^n - 21\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 15\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.34

1. X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
2. On a, pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\mathbb{P}(Y = j | X = i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On peut en déduire la loi de Y

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = j | X = i)\mathbb{P}(X = i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n(n-1)} = (n-1)\frac{1}{(n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

Ainsi Y suit également une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
X et Y ne sont pas indépendantes, en effet on a

$$p(X = 1, Y = 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{n^2} \neq 0$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \sum_{(i,j)\in \llbracket 1,n \rrbracket^2} ij\mathbb{P}(X = i, Y = j) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \sum_{(i,j)\in \llbracket 1,n \rrbracket^2} ij\mathbb{P}(Y = j | X = i)\mathbb{P}(X = i) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j\ =1 \\ j\neq i}}^{n} ij\frac{1}{n(n-1)} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{\substack{j\ =1 \\ j\neq i}}^{n} j - \frac{(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n(n+1)}{2} - i\right) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2\right) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)}{n-1} \times \frac{3n^2-n-2}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)}{n-1} \times \frac{(n-1)(3n+2)}{12} - \frac{3(n+1)^2}{12} \\
&= -\frac{n+1}{12}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.35

On a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\mathbb{E}(X^3) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n} = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}((X+1)^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2+2X+1) \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X) + 1 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + n + 1 + 1 \\
&= \frac{2n^2+9n+13}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X^3+2X^2+X) - \frac{n+1}{2}\frac{2n^2+9n+13}{6} \\
&= \mathbb{E}(X^3) + 2\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X) - \frac{(n+1)(2n^2+9n+13)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)^2}{4} + 2\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n^2+9n+13)}{12} \\
&= \frac{(n+1)\big(3n(n+1) + 4(2n+1) + 6 - (2n^2+9n+13)\big)}{12} \\
&= \frac{(n+1)\big(n^2+2n-3)\big)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)(n+3))}{12}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.36

1. On suppose que Z et T sont indépendantes, on a alors en particulier $\mathbb{E}(ZT) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))\,(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))$$

   D'où

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2$$

   Et donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{V}(Y)$$

2. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs $1, 2, 3$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$

3. (a) X et Y ont la même loi, elles ont donc la même variance.

   (b) Les lois de Z et T sont données par les tableaux suivants

z_i	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

t_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(T = t_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

   Z et T ne sont pas indépendantes, en effet

$$\mathbb{P}(Z = 6, T = 2) = \mathbb{P}(\{X = 3, Y = 3\} \cap \{X = 3, Y = 1\}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Z = 6)\mathbb{P}(T = 2) = \frac{1}{81} \neq 0$$

Réponse de l'exercice 21.37

1. La loi de Z est donnée par le tableau suivant

z_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

2. Z et X ne sont pas indépendantes, en effet on a

$$\mathbb{P}(Z = -3, X = 3) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 3, X = 3) = 0 \qquad \text{et } \mathbb{P}(Z = -3)\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{512} \neq 0$$

3. Comme X et Y sont indépendantes, on a, en particulier $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Z) &= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) \\
&= \mathbb{E}(X(X - Y)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X - Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{V}(X) \\
&= 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 21.38

1. Un individu de type AA a quatre « choix »pour ses parents : deux parents AA, un père AA et une mère Aa, un père Aa et une mère AA ou enfin deux parents Aa.
   Deux parents AA ont un enfant AA avec probabilité 1, un père AA et une mère Aa ont un enfant AA avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et deux parents Aa ont un enfant AA avec probabilité $\dfrac{1}{4}$. D'où
   $$p_{i+1} = p_i^2 + \frac{1}{2}p_iq_i + \frac{1}{2}q_ip_i + \frac{1}{4}q_i^2 = p_i^2 + p_iq_i + \frac{q_i^2}{4}$$
   De manière similaire on a
   $$r_{i+1} = r_i^2 + r_iq_i + \frac{q_i^2}{4}$$
   et
   $$\begin{aligned} q_{i+1} &= 1 - p_{i+1} - r_{i+1} \\ 1 - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= (p_i+q_i+r_i)^2 - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 + 2p_iq_i + 2q_ir_i + 2p_ir_i - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= \frac{q_i^2}{2} + p_iq_i + q_ir_i + 2p_ir_i \end{aligned}$$
   On peut aussi obtenir q_{i+1} de manière similaire à p_i et r_i en énumérant les situations menant à un enfant Aa.
2. D'après la question précédente on a
   $$p_1 = p^2+pq+\frac{q^2}{4} = \left(p+\frac{q}{2}\right)^2 \qquad q_1 = \frac{q^2}{2}+pq+qr+2pr = 2\left(p+\frac{q}{2}\right)\left(r+\frac{q}{2}\right) \qquad r_1 = r^2+qr+\frac{q^2}{4} = \left(r+\frac{q}{2}\right)^2$$
   Puis
   $$\begin{aligned} p_2 &= p_1^2 + p_1q_1 + \frac{q_1^2}{4} \\ &= \left(p+\frac{q}{2}\right)^4 + 2\left(p+\frac{q}{2}\right)^3\left(r+\frac{q}{2}\right) + \frac{4\left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(r+\frac{q}{2}\right)^2}{4} \\ &= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 + 2\left(p+\frac{q}{2}\right)\left(r+\frac{q}{2}\right) + \left(r+\frac{q}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)+\left(r+\frac{q}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2(p+q+r)^2 \\ &= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2 \\ &= p_1 \end{aligned}$$
   De manière similaire on obtient $q_2 = q_1$ et $r_2 = r_1$.

   On a donc prouvé la loi de Hardy-Weinberg et donc ses conséquences dont en particulier la non-disparation des allèles récessifs n'affectant pas le succès reproductif comme le groupe sanguin O, le facteur rhésus $-$ ou bien encore la rousseur.

Chapitre 22

Équations différentielles

Exercices

Exercice 22.1

Résoudre les problème de Cauchy suivants :

$(\mathcal{P}_1)$ $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_2)$ $\begin{cases} y'' + 5y' = y + 2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_3)$ $\begin{cases} y'' = 6 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_4)$ $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_5)$ $\begin{cases} y'' - 1 = 2y' + y \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_6)$ $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_7)$ $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$(\mathcal{P}_8)$ $\begin{cases} y'' + 12y' + 23y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 22.2

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + \cos(x)y = 0$
2. $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$
3. $y' + \cos^3(x)y = 0$
4. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
5. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 0.$

Exercice 22.3

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$
2. $y' + 2y = \cos(x)$
3. $y' + xy = x + 1$
4. $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$
5. $y' + y = \sin(x)$
6. $y' - e^x y = e^{e^x}$
7. $y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(x))$
8. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
9. $xy' + y = e^x$
10. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1.$
11. $y' - y = e^{2x}$
12. $y' - y = e^x$
13. $y' - y = xe^x$

Exercice 22.4

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$
2. $y'' + \omega^2 y = -2$, où $\omega > 0$,
3. $4y'' + 4y' + y = \cos(2t)$
4. $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$
5. $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$
6. $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x\cos(x) + e^{3x}$

Exercice 22.5

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Exercice 22.6

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1. $\begin{cases} y' - y\tan(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$ sur $]1, +\infty[$
3. $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\begin{cases} y' + y = 3\sin(x) \\ y(0) = C \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 22.7

Résoudre les équations homogènes suivantes sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

1. $(1+x^2)y' + xy = 0$
2. $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$
3. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$
4. $xy' + x^2y = 0$
5. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ à l'aide d'une solution évidente.

Exercice 22.8

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \qquad (1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$$

Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$ en trouvant une solution évidente.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E_2): \qquad \cos(x)y' + \sin(x)y = 1$$

Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$ en trouvant une solution évidente.

3. On considère l'équation différentielle

$$(E_3): \qquad (x+1)y' + y = x^2$$

Montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}$ puis résoudre (E_3) sur un intervalle à préciser.

Réponses

Réponse de l'exercice 22.1

$$(\mathcal{P}_1)\ \begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_1 \qquad y'' - y = 0$$

Cette équation est homogène. Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{E}_1$ est $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
P admet donc deux racines réelles distinctes 1 et -1.
On sait alors que les solutions de $\mathcal{E}_1$ sont de la forme

$$y : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B$$

$$y'(0) = A - B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (1, 0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^t$$

$$(\mathcal{P}_2)\ \begin{cases} y''+5y'=y+2 \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ admet une unique solution. Si on a de l'intuition on pourrait le trouver tout de suite et conclure que c'est la seule. On va faire comme si on n'avait aucune intuition à ce sujet.
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_2 \qquad y''+5y'-y=2$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_2 \qquad y''+5y'-y=0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_2$ est $P(x)=x^2+5x-1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $25+4=29$. P admet deux racines réelles distinctes

$$\lambda=\frac{-5-\sqrt{29}}{2} \qquad \mu=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\in}=\{y:t\mapsto Ae^{\lambda t}+Be^{\mu t}\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_2$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\in}=\{y+y_0\ ,\ y\in\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\in}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_2$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0:t\mapsto -2$ est une solution de $\mathcal{E}_2$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\in}=\{t\mapsto 2+Ae^{\lambda t}+Be^{\mu t}\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0)=A+B-2$$

$$y'(0)=\lambda A+\mu B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A+B-2=-2 \\ \lambda A+\mu B=0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B)=(0,0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ est la fonction

$$y:t\mapsto -2$$

$$(\mathcal{P}_3)\ \begin{cases} y''=6 \\ y(0)=8 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

Ce problème peut très bien être résolu de manière simple sans utiliser la méthode vue en cours.
On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ admet une unique solution. Soit y cette solution.

On a alors $y'' = 6$. Ainsi y' est un primitive de la fonction constante égale à 6. C'est donc une fonction de la forme $y' : t \mapsto 6t + K$, où K est une constante. On sait que $y'(0) = -1$, ainsi $K = -1$.
Par suite y est une primitive de la fonction $t \mapsto 6t - 1$. Elle est donc de la forme $y : t \mapsto 3t^2 - t + C$, où C est une constante. On sait que $y(0) = 8$, ainsi $C = 8$.
Finalement l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

Retrouvons ce résultat en appliquant la méthode du cours
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_3 \qquad y'' = 6$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_3 \qquad y'' = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_3$ est $P(x) = x^2$. P admet 0 comme racine double.
l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_3$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\ni} = \{y : t \mapsto Ae^{0t} + Bte^{0t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_3$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\ni} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_\ni}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_3$. On ne peut pas trouver de fonctions constante ou affine qui fonctionne. On essaye alors les polynômes de degré 2 et on voit alors que $t \mapsto 3t^2$ est une solution de $\mathcal{E}_3$ Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\ni} = \{t \mapsto 3t^2 + A + Bt \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (8, -1)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est la fonction

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

$$(\mathcal{P}_4) \begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_4 \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$$

Cette équation est homogène.
Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_4$ est $P(x) = x^2 - 6x + 13$.

Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $36-4\times 13=-16$. P admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = 3+2i \qquad \mu = 3-2i$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_4$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\triangle} = \{y : t \mapsto e^3 t\,(A\cos(2t)+B\sin(2t))\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0)=A$$

$$y'(0)=3A+2B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A=4 \\ 3A+2B=4 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B)=(4,-4)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^{3t}\,(4\cos(2t)-4\sin(2t))$$

On peut réutiliser ce que l'on a vu en trigonométrie pour mettre cette fonction sous une autre forme. Soit $t\in\mathbb{R}$ et soit $z=4-4i=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Alors

$$4\cos(2t)-4\sin(2t)=\mathrm{Re}(\overline{z}e^{2it})=4\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto 4\sqrt{2}e^{3t}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\mathcal{P}_5)\ \begin{cases} y''-1=2y'+y \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_5 \qquad y''-2y'-y=1$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_5 \qquad y''-2y'-y=0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_5$ est $P(x)=x^2-2x-1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 8. P admet deux racines réelles distinctes $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\nabla} = \{y : t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t}+Be^{(1+\sqrt{2})t}\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_5$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\nabla} = \{y+y_0\ ,\ y\in\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\nabla}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_5$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -1$ est une solution de $\mathcal{E}_5$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_\triangledown} = \{t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t} + Be^{(1+\sqrt{2})t} - 1 \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - 1$$

$$y'(0) = (1 - \sqrt{2})A + (1 + \sqrt{2})B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ (1 - \sqrt{2})A + (1 + \sqrt{2})B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1-\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t} - 1$$

C'est-à-dire

$$y : t \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t}\left(2e^{\sqrt{2}t} - 1\right) - 1$$

$$(\mathcal{P}_6) \ \begin{cases} y'' + y' - 2y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_6 \qquad y'' + y' - 2y = 3$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_6 \qquad y'' + y' - 2y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_6$ est $P(x) = x^2 + x - 2$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 9. P admet deux racines réelles distinctes -2 et 1.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_6$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_/} = \{y : t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_6$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_6$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_/} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_6$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -\dfrac{3}{2}$ est une solution de $\mathcal{E}_6$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_/} = \left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t} - \frac{3}{2} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - \frac{3}{2}$$

$$y'(0) = B - 2A$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{3}{2} \\ B - 2A = 2 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = \left(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{3}\right)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{t} - \frac{3}{2}$$

$$(\mathcal{P}_7) \begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Soit y l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$. Soit $z = y'$. Alors z vérifie

$$\begin{cases} z' + z = 1 \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

Ainsi $z : t \mapsto e^{-t} + 1$. y est alors une primitive de z. D'où

$$y : t \mapsto -e^{-t} + t + C$$

où C est une constante.
Comme $y(0) = 3$ on alors $C = 4$. Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$ est

$$y : t \mapsto -e^{-t} + t + 4$$

$$(\mathcal{P}_8) \begin{cases} y'' + 12y' + 23y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ admet une unique solution. On remarque aisément que la fonction $y : t \mapsto 0$ est une solution de $\mathcal{P}_8$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ est

$$y : t \mapsto 0$$

Réponse de l'exercice 22.2

1. $y' + \cos(x)y = 0$
   Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ en est une. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto Ke^{-\sin(x)} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{-\sin(x)}\right)$$

2. $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors
   $$\mathcal{S}_2 = \left\{x \mapsto Ke^{-\ln(\ln(x))}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{K}{ln(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$$
3. $y' + \cos^3(x)y = 0$
   Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$, pour cela on va linéariser $\cos^3(x)$
   $$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$$
   Un primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ est alors $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}$
   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors
   $$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto K\exp\left(-\frac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}\right)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(-\frac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}\right)\right)$$
4. $(1+x^2)y' - 2xy = 0$
   $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule jamais, notre équation différentielle est donc équivalente à l'équation
   $$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$.
   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors
   $$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{\ln(1+x^2)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto K(1+x^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto (1+x^2)\right)$$
5. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 0.$
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1-2x}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$.
   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors
   $$\mathcal{S}_5 = \left\{x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}+2\ln(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto Kx^2e^{\frac{1}{x}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto x^2e^{\frac{1}{x}}\right)$$

Réponse de l'exercice 22.3

1. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$
   La forme générale des solutions de l'équation homogène est $x \mapsto Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$ est
   $$\mathcal{S}_1 = \{x \mapsto \sin(x) + Ke^{-x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

2. $y' + 2y = \cos(x)$
La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + 2y = 0$ est

$$x \mapsto Ke^{-2x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + 2y = \cos(x)$.
On va ici utiliser la méthode de variation de la constante. On cherche donc une solution particulière de $y' + 2y = \cos(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-2x}$.
On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$cos(x) = y'(x) + 2y(x) = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-x} + 2K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-2x}$$

Il nous faut donc trouver une fonction K telle que $K'(x) = e^{2x}\cos(x)$, on va donc calculer $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t$ via deux intégrations par parties successives. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^x e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{2t}\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x 2e^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= e^{2x}\sin(x) - \int_0^x 2e^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= e^{2x}\sin(x) - \left(\left[-2e^{2t}\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 4e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 2 - 4K(x)
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 2}{5}$$

Une solution particulière de $y' + 2y = \cos(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)e^{-2x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{5} - \frac{2e^{-2x}}{5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = \cos(x)$ est ainsi

$$\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{5} + \left(K - \frac{2}{5}\right)e^{-2x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

3. $y' + xy = x + 1$
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + xy = 0$ a été déterminé dans l'exercice précédent, elles sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$. On détermine une solution particulière par la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a alors $K'(x) = (x+1)e^{\frac{x^2}{2}}$
On a

$$\int_0^x (t+1)e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = e^{\frac{t^2}{2}} + \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ ne se calcule pas (il n'existe pas d'expression de cette intégrale à partir des fonctions usuelles) on va la noter $\Phi(x)$. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + xy = x + 1$ est donc

$$y : x \mapsto 1 + \Phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = x + 1$ est donc

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ x \mapsto 1 + \Phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + Ke^{-\frac{x^2}{2}} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$
   Sur $]0, +\infty$ cette équation différentielle est équivalente à

$$y' + \frac{x-2}{x} y = \frac{x-2}{x}$$

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x-2}{x}$ est $x \mapsto x - 2\ln(x)$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-x+2\ln(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. La fonction constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$ est

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ x \mapsto Kx^2e^{-x} + 1 \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

5. $y' + y = \sin(x)$
   La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ est

$$x \mapsto Ke^{-x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

   On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + y = \sin(x)$.
   On va ici utiliser la méthode de variation de la constante, on cherche donc une solution particulière de $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-x}$.
   On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = y'(x) + y(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^x e^t \sin(t) \ \mathrm{d}t \\
&= \left[e^t \sin(t)\right]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t) \ \mathrm{d}t \\
&= e^x \sin(x) - \int_0^x e^t \cos(t) \ \mathrm{d}t \\
&= e^x \sin(x) - \left(\left[e^t \cos(t)\right]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t) \ \mathrm{d}t \right) \\
&= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + 1 - K(x)
\end{aligned}$$

   D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + 1}{2}$$

   Une solution particulière de $y' + y = \sin(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)e^{-x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \sin(x)$ est ainsi

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} + Ke^{-x} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

6. $y' - e^x y = e^{e^x}$
Une primitive de $x \mapsto -e^x$ est $x \mapsto -e^x$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - e^x y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-e^x}$, $K \in \mathbb{R}$
On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{e^x}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^{e^x} = e^{e^x}$.
La fonction $K : x \mapsto x$ convient.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - e^x y = e^{e^x}$ est donc
$$\mathcal{S}_6 = \left\{x \mapsto Ke^{e^x} + xe^{e^x} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

7. $y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(x))$
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1}$ est $x \mapsto 2\arctan(x)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-2\arctan(x)}$, $K \in \mathbb{R}$.
On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-2\arctan(x)}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^{-2\arctan(x)} = e^{-2\arctan(x)}$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(x))$ est donc
$$\mathcal{S}_7 = \left\{x \mapsto Ke^{-2\arctan(x)} + xe^{-2\arctan(x)} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

8. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
La fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, notre équation différentielle est alors équivalente à
$$y - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$$
Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{\ln(1+x^2)}$, i.e. $x \mapsto K(1+x^2)$, $K \in \mathbb{R}$.
On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-2\arctan(x)}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)(1+x^2) = 1+x^2$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ est donc
$$\mathcal{S}_8 = \left\{x \mapsto K(1+x^2) + x + x^3 \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

9. $xy' + y = e^x$
On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, sur cet intervalle notre équation différentielle est équivalente à
$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\ln(x)$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\ln(x)}$, i.e. $x \mapsto \dfrac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$.
On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto \dfrac{K(x)}{x}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $\dfrac{K'(x)}{x} = e^x$.

On va calculer $\int_0^x te^t \, \mathrm{d}t$ via une intégration par parties.

$$\int_0^x te^t \, \mathrm{d}t = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t \, \mathrm{d}t = xe^x - e^x + 1$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc $x \mapsto \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + y = e^x$ sur $]0, +\infty$ est alors

$$\mathcal{S}_9 = \left\{ x \mapsto \frac{xe^x - e^x + K + 1}{x} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

10. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$

On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle une primitive de $x \mapsto \dfrac{1-2x}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 0$ sont ainsi de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{1}{x} + 2\ln(x)}$, $K \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est ainsi

$$\mathcal{S}_{10} = \left\{ x \mapsto x^2 + Kx^2 e^{\frac{1}{x}} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

11. $y' - y = e^{2x}$

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = e^{2x}$ est

$$\mathcal{S}_{11} = \left\{ x \mapsto e^{2x} + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

12. $y' - y = e^x$

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. On va déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variations de la constante. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^x = e^x$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = e^x$ est

$$\mathcal{S}_{12} = \{ x \mapsto xe^x + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R} \}$$

13. $y' - y = xe^x$

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. On va déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variations de la constante. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^x = xe^x$. La fonction $K : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ convient. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = xe^x$ est

$$\mathcal{S}_{13} = \left\{ x \mapsto \frac{x^2 e^x}{2} + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

Réponse de l'exercice 22.4

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y' - 2y = 0$ est
$$\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, on la cherche sous la forme $t \mapsto Ke^{-t}$, ce qui revient à $K - K - 2K = 1$ d'où $K = -\dfrac{1}{2}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = e^{-t}$ est
$$\left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t - \frac{e^{-t}}{2} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est
$$\{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + \omega^2 y = -2$, on la cherche sous la forme $t \mapsto K$, ce qui revient à $K = -\dfrac{2}{\omega^2}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = -2$ est
$$\left\{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{2}{\omega^2} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation $4y'' + 4y' + y = 0$ est
$$\{t \mapsto Ae^{-\frac{t}{2}} + Bte^{-\frac{t}{2}} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $4y''+4y'+y = \cos(2t)$, on la cherche sous la forme $t \mapsto C\cos(2t) + D\sin(2t)$, ce qui revient à $(-16C + 8D + C)\cos(2t) + (-16D - 8C + D)\sin(2t) = \cos(2t)$ d'où $C = -\dfrac{15}{289}$ et $D = \dfrac{8}{289}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $4y'' + 4y' + y = \cos(2t)$ est
$$\left\{t \mapsto Ae^{-\frac{t}{2}} + Bte^{-\frac{t}{2}} + \frac{8\sin(2x) - 15\cos(2x)}{289} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

4. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ est
$$\{t \mapsto Ae^t + Bte^t \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' - 2y' + y = t^2$ et $y'' - 2y' + y = e^{2t}$
On cherche une solution à $y'' - 2y' + y = t^2$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $t \mapsto t^2 + at + b$, on aboutit alors à $t^2 + (a - 4)t + 2 - 2a + b = t^2$, ainsi $t \mapsto t^2 + 4t + 6$ est une solution de $y'' - 2y' + y = t^2$
On cherche une solution à $y'' - 2y' + y = e^{2t}$ sous la forme $t \mapsto Ke^{2t}$, on aboutit à $t \mapsto e^{2t}$.
Finalement l'ensemble des solution de $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$ est
$$\{t \mapsto Ae^t + Bte^t + t^2 + 4t + 6 + e^{2t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

5. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$ est
$$\{t \mapsto e^t(A\cos(t) + B\sin(t)) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t}$ et $y'' - 2y' + 2y = 4$

La fonction $t \mapsto 2$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = 4$.

On cherche une solution à $y''-2y'+2y = 25te^{-t}$ sous la forme $t \mapsto (at+b)e^{-t}$, on aboutit à $t \mapsto (5t+4)e^{-t}$

Finalement l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$ est

$$\{t \mapsto e^t(A\cos(t) + B\sin(t)) + 2 + (5t+4)e^{-t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

6. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$ est

$$\{t \mapsto Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x\cos(x) + e^{3x}$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' + 6y' + 9y = x^2$, $y'' + 6y' + 9y = e^x\cos(x)$ et $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$

On cherche une solution particulière à $y'' + 6y' + 9y = x^2$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, on trouve $x \mapsto \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{27}$.

On cherche une solution particulière à $y''+6y'+9y = e^x\cos(x)$ sous la forme $x \mapsto e^x(A\cos(x)+B\sin(x))$, on trouve $x \mapsto \dfrac{8e^x\ \sin(x) + 15e^x\ \cos(x)}{289}$.

Enfin on cherche une solution particulière à $y''+6y'+9y = e^{3x}$ sous la forme $x \mapsto Ke^{3x}$, on trouve $x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{36}$.

Finalement l'ensemble des solutions de $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x\cos(x) + e^{3x}$ est

$$\left\{t \mapsto Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + \frac{3x^2 - 4x + 2}{27} + \frac{8e^x\ \sin(x) + 15e^x\ \cos(x)}{289} + \frac{e^{3x}}{36}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Réponse de l'exercice 22.5

On va procéder par analyse-synthèse :

Soit (x, y) une solution du système. Alors

$$x' = 4x - 3y$$

D'où

$$x'' = 4x' - 3y' = 4x' - 3(2x - y) = 4x' - 6x + 3y = 4x' - 6x + (4x - x') = 3x' - 2x$$

Ainsi $x'' - 3x' + 2 = 0$.

Le polynôme caractéristique de cette équation est $P(t) = t^2 - 3t + 2$. Les racines de P sont 1 et 2. Ainsi il existe deux constantes réelles A et B telles que $x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$.

Par suite on a

$$y = \frac{4x - x'}{3}$$

D'où

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Ainsi, si x et y sont solutions du système alors il existe deux constantes A et B telles que

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Réciproquement il est facile de vérifier que, si x et y sont définies par

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

avec A et B deux constantes réelles, alors x et y sont solution de notre système.

Ainsi l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{ \left(t \mapsto Ae^t + Be^{2t}, t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3} \right) \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Réponse de l'exercice 22.6

1. $\begin{cases} y' - y\tan(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

   On travaille ici sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, une primitive de $x \mapsto -\tan(x)$ y est $x \mapsto \ln(\cos(x))$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = 0$ est donc

   $$x \mapsto Ke^{-\ln(\cos(x))} \qquad \text{i.e.} \qquad x \mapsto \frac{K}{\cos(x)} \ K \in \mathbb{R}$$

   La condition initiale impose $K = 1$. L'unique solution de notre problème de Cauchy est donc

   $$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

2. $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$ sur $]1, +\infty[$

   On travaille ici sur $]1, +\infty[$. On peut remarquer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est solution de ce problème de Cauchy et est donc l'unique solution. On va toutefois le retrouver par la méthode générale.
   Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$ est donc

   $$x \mapsto Ke^{\ln(\ln(x))} \qquad \text{i.e.} \qquad x \mapsto K\ln(x)$$

   La condition initiale impose $K = 1$. L'unique solution de notre problème de Cauchy est donc bien

   $$f_2 : x \mapsto \ln(x)$$

3. $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

   On va commencer par déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène. Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + xy = 0$ est donc

   $$x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y'+xy=2x$. La fonction constante $x \mapsto 2$ convient ici. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'+xy=2x$ est donc

$$x \mapsto 2 + Ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

La condition initiale impose $K=-1$. Ainsi l'unique solution de notre problème de Cauchy est

$$f_3 : x \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

4. $\begin{cases} y'+y = 3\sin(x) \\ y(0) = C \end{cases}$ $\quad C \in \mathbb{R}$ fixé.

La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y'+y=0$ est

$$x \mapsto Ke^{-x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y'+y=3\sin(x)$. Deux méthodes s'offrent à nous :

— On peut, comme le second membre est une somme de cosinus et de sinus, chercher une solution sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus de même période $x \mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$ avec A et B deux constantes réelles.

— On peut aussi utiliser la méthode de variation de la constante.

On va ici utiliser la méthode de variation de la constante qui est plus lente mais dont la maitrise est fondamentale. On cherche donc une solution particulière de $y'+y=3\sin(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-x}$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3\sin(x) = y'(x)+y(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}$$

Il nous faut donc trouver une fonction K telle que $K'(x) = 3e^x\sin(x)$, on va donc calculer $\displaystyle\int_0^x 3e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t$ via deux intégrations par parties successives. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^x 3e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[3e^t\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x 3e^t\cos(t)\ \mathrm{d}t \\ &= 3e^x\sin(x) - \int_0^x 3e^t\cos(t)\ \mathrm{d}t \\ &= 3e^x\sin(x) - \left(\left[3e^t\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 3e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t\right) \\ &= 3e^x\sin(x) - 3e^x\cos(x) + 3 - K(x) \end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{3e^x\sin(x) - 3e^x\cos(x) + 3}{2}$$

Une solution particulière de $y'+y=3\sin(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)e^{-x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{3\sin(x)-3\cos(x)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x}$$

La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'+y=3\sin(x)$ est ainsi

$$x \mapsto \frac{3\sin(x)-3\cos(x)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x} + Ke^{-x}$$

La condition initiale impose $K = C$. Ainsi l'unique solution de notre problème de Cauchy est

$$f_4 : x \mapsto \frac{3\sin(x) - 3\cos(x)}{2} + \left(C + \frac{3}{2}\right) e^{-x}$$

Réponse de l'exercice 22.7

1. $(1 + x^2)y' + xy = 0$
   La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, notre équation différentielle est alors équivalente à

   $$y + \frac{x}{1 + x^2}y = 0$$

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y + \dfrac{x}{1 + x^2}y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$, i.e. $x \mapsto \dfrac{K}{\sqrt{1 + x^2}}$, $K \in \mathbb{R}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $((1 + x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ est donc

   $$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1 + x^2}} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

2. $2y' - \dfrac{1}{1 + x}y = 0$
   On se place sur $] - 1, +\infty[$. Notre équation différentielle est équivalente à $y' - \dfrac{1}{2 + 2x}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 + x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1 + x)$
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2y' - \dfrac{1}{1 + x}y = 0$ sur $] - 1, +\infty[$ est alors

   $$\left\{x \mapsto K\sqrt{1 + x} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

3. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}y = 0$
   On se place sur $] - \infty, 1\}$. Sur cet intervalle, une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{1 - x}$
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}y = 0$ sur $] - \infty, 1\}$ est alors

   $$\mathcal{S}_3 = \left\{Ke^{-2\sqrt{1-x}} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

4. $xy' + x^2y = 0$
   On se place sur $]0, +\infty$, sur cet intervalle notre équation est équivalente à $y' + xy = 0$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + x^2y = 0$ sur $]0, +\infty[$ est alors

   $$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

5. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$
   On sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de degré 1 est un espace vectoriel de dimension 1. Il est donc engendré par n'importe lequel de ses éléments non-nuls. On peut remarquer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une solution de cette équation différentielle, ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ est
   $$\mathcal{S}_5 = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(x)) = \{x \mapsto K\cos(x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

Réponse de l'exercice 22.8

1. (E_1) : $\qquad (1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$
   Sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_1) est équivalente à
   $$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$$
   On sait, d'après l'exercice précédent que les solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$.
   De plus, la fonction $x \mapsto x$ est une solution évidente de l'équation avec second membre.
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) est
   $$\int_1 = \left\{x \mapsto x + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
2. (E_2) : $\qquad \cos(x)y' + \sin(x)y = 1$
   On sait, d'après l'exercice précédent que les solutions de l'équation homogène $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ sont de la forme $x \mapsto K\cos(x)$, $K \in \mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une solution évidente de l'équation avec second membre, ainsi l'ensemble des solutions de (E_2) est
   $$\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto \sin(x) + K\cos(x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$
3. (E_3) : $\qquad (x+1)y' + y = x^2$
   On va procéder par analyse-synthèse :
   Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3). On a alors
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x+1)(2ax+b) + ax^2 + bx + c = x^2$$
   C'est-à-dire
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 3ax^2 + (2a+2b)x + b + c = x^2$$
   Par unicité des coefficients d'un polynôme on a alors
   $$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
   Ainsi, si P est une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3) alors nécessairement P est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{3}$.

Réciproquement il est ainsi de montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-x+1}{3}$ est solution de (E_3).

Finalement la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-x+1}{3}$ est bien l'unique fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3).

On se place sur $]-1,+\infty[$ pour résoudre (E_3), sur cet intervalle (E_3) est équivalente à $y' + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Sur $x \in]-1,+\infty[$ une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est $x \mapsto \ln(x+1)$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ x \mapsto \frac{x^2-x+1}{3} + \frac{K}{x+1} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

Chapitre 23

Fonctions réelles de deux variables réelles

Exercices

Exercice 23.1

Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2xe^y$
2. $b : (x, y) \mapsto e^x + e^y - e^{xy}$
3. $c : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$
4. $d : (x, y) \mapsto \cos(x + y) + \sin(x - y)$
5. $e : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$
6. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{xy}}{\cos(xy) + 2}$
7. $g : (x, y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$
8. $h : (x, y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x^2}{1 + y^2}\right)$

Exercice 23.2

Tracer les lignes de niveau des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données par :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$.
2. $f_2 : (x, y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2 - y^2}$.
3. $f_3 : (x, y) \mapsto e^{x^2+2y^2}$.

Exercice 23.3

Les dérivées partielles interviennent de manière cruciale pour modéliser certains phénomènes naturels.

On regarde ici avec *l'équation d'une corde vibrante*. On considère une corde de longueur L que l'on suppose fixée entre les points $x = 0$ et $x = L$. On va écarter la corde de sa position initiale dans le plan Oxy, la lâcher et tenter de modéliser son mouvement au cours du temps.

Le paramètre x désigne donc la position le long de l'axe Ox, t désigne le temps. Au point x et au temps t, $y = y(x, t)$ désigne la position de la corde au dessus de x.

Ainsi, pour x fixé, $y = y(x, t)$ décrit le mouvement du point de la corde au dessus de x au cours du temps, et $\partial_2 y(x, t)$ désigne la vitesse de ce point et $\partial^2_{2,2} y(x, t)$ son accélération.

On peut démontrer (avec quelques hypothèses appropriées) que ce mouvement est décrit par une *équation aux dérivées partielles* donnée par

$$\partial^2_{2,2} y(x, t) = c^2 \partial^2_{1,1} y(x, t) \tag{23.1}$$

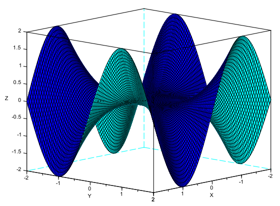
où c est une constante positive dépendant des caractéristiques physiques de la corde.

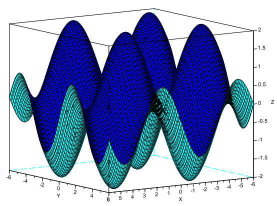
1. Montrer que $y(x,t) = \sin(x - ct)$ est une solution de l'équation.
2. Plus généralement, montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors les fonctions $y(x,t) = f(x+ct)$ et $y(x,t) = f(x-ct)$ satisfont l'équation.
3. Montrer que tout tout $\omega \in \mathbb{R}$, $y(x,t) = \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$ satisfait l'équation.
4. Montrer que si deux fonctions $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ satisfont l'équation, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires $\alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

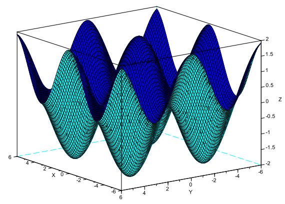
Exercice 23.4

Associer chacune des courbes 3D suivantes avec ses lignes de niveau.

Figure 23.4 – Courbes 3D


1)


2)


3)

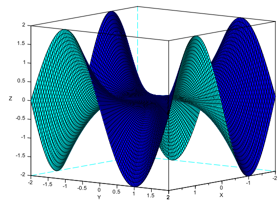
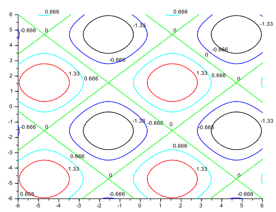
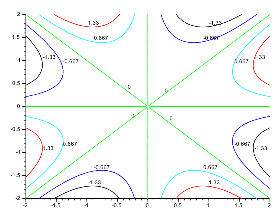
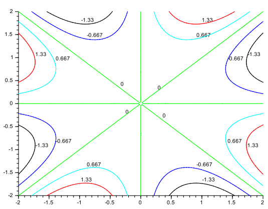
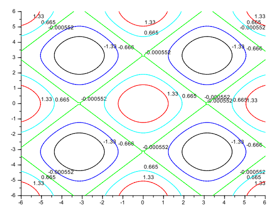

4)

Figure 23.5 – Lignes de niveau


A)


B)


C)


D)

Exercice 23.5

Déterminer les positions des éventuels extremums des fonctions $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$ et $g(x,y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23.6

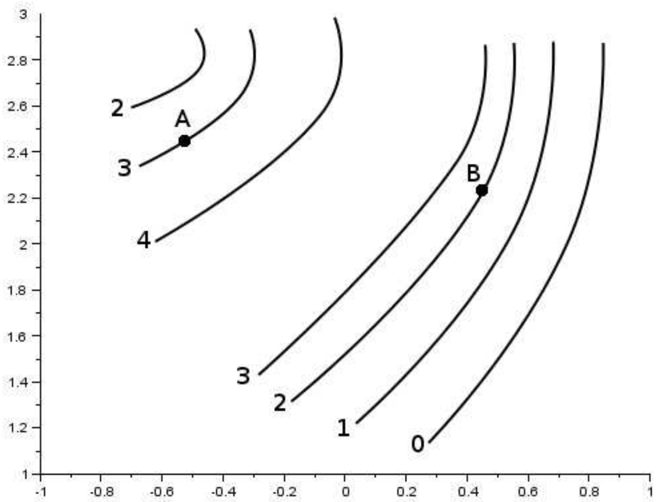
On s'intéresse à la température sur une fine plaque de métal, on note $T(x,y)$ la température au point (x,y). On suppose que la plaque occupe tout le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire la partie $x > 0, y > 0$ et que la fonction température est $T(x,y) = xy$. On appelle courbes isothermes les lignes de niveau de la fonction température, tous les points sur une même courbe isotherme sont à la même température.

1. Tracer les isothermes $T = 1$, $T = 2$ et $T = 3$
2. On dépose une fourmi au point $(1,4)$, cette fourmi se déplace de sorte que la température sur son chemin soit constante. Quel va être le chemin de la fourmi et quelle est la température le long du chemin

---

Exercice 23.7

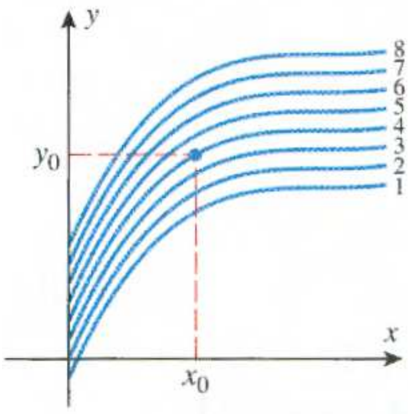
Les questions se rapportent aux courbes de niveau suivantes



1. Lequel des deux points A et B est le plus haut ?
2. Lequel des deux points A et B est sur la pente la plus raide ?
3. Partant de A et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va t'elle d'abord croître ou décroître ?
4. Partant de B et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va t'elle d'abord croître ou décroître ?
5. Partant de A et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va t'elle d'abord croître ou décroître ?
6. Partant de B et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va t'elle d'abord croître ou décroître ?

Exercice 23.8

La figure suivante représente les surfaces de niveau d'une fonction f. Conjecturez le signe des dérivées partielles $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 f(x_0, y_0)$ et expliquez votre raisonnement.



Exercice 23.9

On dit qu'une fonction f de classe C^2 à deux variables satisfait *l'équation de Laplace* si on a

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) + \partial^2_{2,2} f(x,y) = 0.$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles très importante intervenant dans la modélisation de beaucoup de phénomènes.

Montrer que les fonctions $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ et $f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$ satisfont cette équation.

sectes et leur habitat 23.10 (*Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement (Boularas, Fedon,*

Des espèces d'insectes ont été inventoriées dans plusieurs milieux sur une colline calcaire, selon une échelle de dynamique végétale ν depuis la pelouse sèche (valeur 1) jusqu'au sous-bois (valeur 6) et la hauteur h en cm de la végétation herbacée (entre 5 et 40 cm). Le nombre NBI d'espèces d'insectes est modélisé par la fonction

$$NBI = -0,466\nu^2 + 2,960\nu - 0,00655h^2 + 0,34625h + 1,08725.$$

1. Représenter cette fonction par un graphe en dimension 3.
2. Quelle est la valeur du milieu où l'on attend la plus grande richesse en espèce d'insectes ?
3. Quelle est cette richesse maximale ?
4. En un point quelconque $M(\nu, h)$, quelle est la direction dans laquelle la fonction NBI varie le plus vite ? Quelle est la valeur $f(\nu, h)$ de cette variation maximale ?
5. Étudier les positions des éventuels extremums de cette fonction f.

Exercice 23.11

Dans la suite, on considère un potentiel ϕ dans le plan (c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et on pose

$$\phi(x,y) = x^2 - y^2.$$

Les lignes de niveau $\phi =$ *constante* sont les équipotentielles. Si ϕ est un potentiel électrostatique, ϕ donne lieu au champ électrique $E = -\nabla\phi$. Si ϕ est la température, $\nabla\phi$ est le gradient de température.

1. Déterminer la direction et l'intensité du champ électrique au point $(2,1)$.
2. Déterminer la direction dans laquelle la température décroît le plus vite au point $(-3,2)$.
3. Calculer le taux de changement de la température en fonction de la distance au point $(1,2)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

Réponses

Réponse de l'exercice 23.1

1. $a : (x,y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2xe^y$

$$\partial_1 a(x,y) = 2xy + 2xy^2 + 2e^y \qquad \partial_2 a(x,y) = x^2 + 2x^2y + 2xe^y$$
$$\partial^2_{1,1} a(x,y) = 2y + 2y^2 \qquad \partial^2_{1,2} a(x,y) = \partial^2_{2,1} a(x,y) = 2x + 4xy + 2e^y \qquad \partial^2_{2,2} a(x,y) = 2x^2 + 2xe^y$$

2. $b : (x,y) \mapsto e^x + e^y - e^{xy}$

$$\partial_1 b(x,y) = e^x - ye^{xy} \qquad \partial_2 b(x,y) = e^y - xe^{xy}$$
$$\partial^2_{1,1} b(x,y) = e^x - y^2e^{xy} \qquad \partial^2_{1,2} b(x,y) = \partial^2_{2,1} b(x,y) = -e^{xy} - yxe^{xy} \qquad \partial^2_{2,2} b(x,y) = e^y - x^2e^{xy}$$

3. $c : (x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$

$$\partial_1 c(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} \qquad \partial_2 c(x,y) = \frac{4y^3 + 4x^2y}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3}$$
$$\partial^2_{1,1} c(x,y) = \frac{4y^2 + 2}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{\left(4xy^2 + 2x\right)^2}{\left(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3\right)^2}$$
$$\partial^2_{2,2} c(x,y) = \frac{12y^2 + 4x^2}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{\left(4y^3 + 4x^2y\right)^2}{\left(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3\right)^2}$$
$$\partial^2_{1,2} c(x,y) = \partial^2_{2,1} c(x,y) = \frac{8xy}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{\left(4xy^2 + 2x\right)\left(4y^3 + 4x^2y\right)}{\left(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3\right)^2}$$

4. $d : (x,y) \mapsto \cos(x+y) + \sin(x-y)$

$$\partial_1 d(x,y) = \cos(y-x) - \sin(y+x) \qquad \partial_2 d(x,y) = -\sin(y+x) - \cos(y-x)$$
$$\partial^2_{1,1} d(x,y) = \sin(y-x) - \cos(y+x) \qquad \partial^2_{2,2} d(x,y) = \sin(y-x) - \cos(y+x)$$
$$\partial^2_{1,2} d(x,y) = \partial^2_{2,1} d(x,y) = -\cos(y+x) - \sin(y-x)$$

5. $e : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$

$$\partial_1 e(x,y) = \frac{y\left(y^2 - x^2 + 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2} \qquad \partial_2 e(x,y) = -\frac{x\left(y^2 - x^2 - 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2}$$
$$\partial^2_{1,1} e(x,y) = -\frac{2xy\left(3y^2 - x^2 + 3\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^3} \qquad \partial^2_{2,2} e(x,y) = \frac{2xy\left(y^2 - 3x^2 - 3\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^3}$$
$$\partial^2_{1,2} e(x,y) = \partial^2_{2,1} e(x,y) = -\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4 - 1}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^3}$$

6. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{xy}}{\cos(xy)+2}$

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{ye^{xy}\left(\sin(xy)+\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{xe^{xy}\left(\sin(xy)+\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2}$$

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{2y^2e^{xy}\Big(\sin(xy)^2+\cos(xy)\sin(xy)+2\sin(xy)+\cos(xy)^2+3\cos(xy)+2\Big)}{\left(\cos(xy)+2\right)^3}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{2x^2e^{xy}\Big(\sin(xy)^2+\cos(xy)\sin(xy)+2\sin(xy)+\cos(xy)^2+3\cos(xy)+2\Big)}{\left(\cos(xy)+2\right)^3}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = {} & \frac{2xye^{xy}\sin(xy)^2}{\left(\cos(xy)+2\right)^3} + \frac{2xye^{xy}\sin(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} + \frac{e^{xy}\sin(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} \\ & + \frac{xye^{xy}}{\cos(xy)+2} + \frac{e^{xy}}{\cos(xy)+2} + \frac{xye^{xy}\cos(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2}\end{aligned}$$

7. $g : (x,y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$

$$\partial_1 g(x,y) = \cos(y) - y\sin(x) \qquad \partial_2 g(x,y) = \cos(x) - x\sin(y)$$

$$\partial^2_{1,1} g(x,y) = -y\cos(x) \qquad \partial^2_{1,2} g(x,y) = \partial^2_{2,1} g(x,y) = -\sin(x)-\sin(y) \qquad \partial^2_{2,2} g(x,y) = -x\cos(y)$$

8. $h : (x,y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x^2}{1+y^2}\right)$

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{2x\left(y^2+1\right)}{y^4+2y^2+x^4+1} \qquad \partial_2 h(x,y) = -\frac{2x^2y}{y^4+2y^2+x^4+1}$$

$$\partial^2_{1,1} h(x,y) = \frac{2\left(y^2+1\right)\left(y^4+2y^2-3x^4+1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2} \qquad \partial^2_{2,2} h(x,y) = \frac{2x^2\left(3y^4+2y^2-x^4-1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2}$$

$$\partial^2_{1,2} h(x,y) = \partial^2_{2,1} h(x,y) = -\frac{4xy\left(y^2-x^2+1\right)\left(y^2+x^2+1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2}$$

Réponse de l'exercice 23.2

Figure 23.1 – Lignes de niveau de f_1

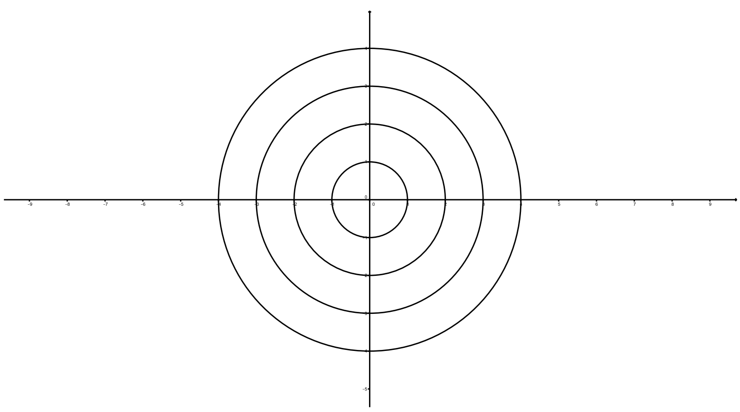


Figure 23.2 – Lignes de niveau de f_2

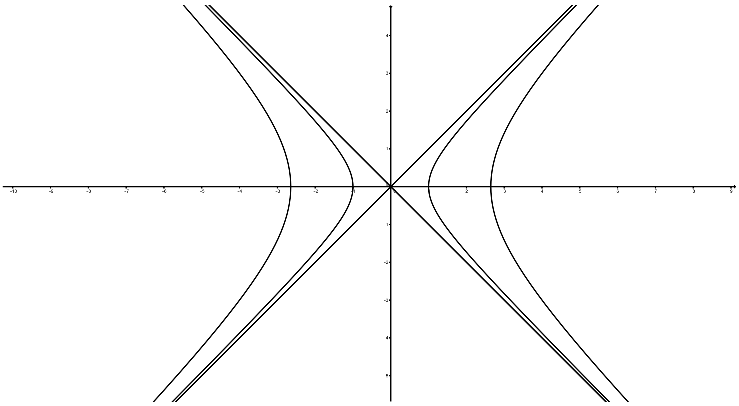
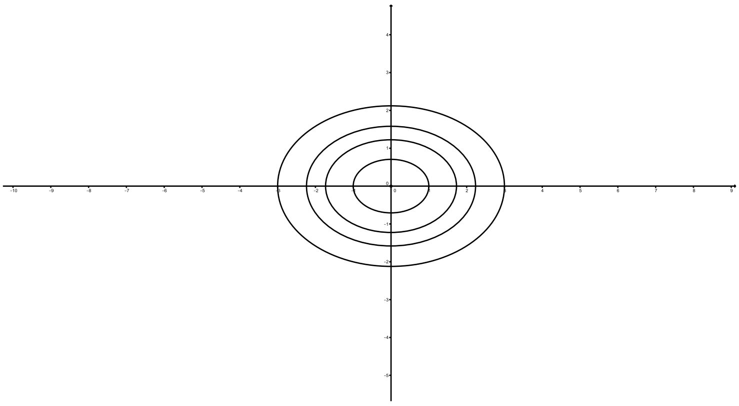


Figure 23.3 – Lignes de niveau de f_3



Réponse de l'exercice 23.3

1. Calculons les dérivées partielles $\partial^2_{2,2}y(x,t)$ et $\partial^2_{1,1}y(x,t)$

$$\partial_2 y(x,t) = -c\cos(x-ct) \qquad \partial^2_{2,2}y(x,t) = -c^2\sin(x-ct)$$
$$\partial_1 y(x,t) = \cos(x-ct) \qquad \partial^2_{1,1}y(x,t) = \sin(x-ct)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2}y(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y(x,t)$$

C'est à dire $y(x,t) = \sin(x-ct)$ est une solution de l'équation.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $y_1(x,t) = f(x+ct)$ et $y_2(x,t) = f(x-ct)$. Calculons les dérivées partielles au second ordre de y_1 et y_2.
Pour y_1 on a

$$\partial_2 y_1(x,t) = cf'(x+ct) \qquad \partial^2_{2,2}y_1(x,t) = c^2 f''(x+ct)$$
$$\partial_1 y_1(x,t) = f'(x+ct) \qquad \partial^2_{1,1}y_1(x,t) = f''(x+ct)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2}y_1(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y_1(x,t)$$

De même pour y_2 on a

$$\partial_2 y_2(x,t) = -cf'(x-ct) \qquad \partial^2_{2,2}y_2(x,t) = c^2 f''(x-ct)$$
$$\partial_1 y_2(x,t) = f'(x-ct) \qquad \partial^2_{1,1}y_2(x,t) = f''(x-ct)$$

Et donc

$$\partial^2_{2,2}y_2(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y_2(x,t)$$

En conclusion $y_1 : (x,t) \mapsto f(x+ct)$ et $y_2 : (x,t) \mapsto f(x-ct)$ satisfont l'équation.

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On va, comme aux questions précédentes calculer les dérivées secondes de y.

$$\partial_2 y(x,t)c\omega\cos(c\omega t)\sin(\omega x) \qquad \partial^2_{2,2}y(x,t) = -c^2\omega^2\sin(c\omega t)\sin(\omega x)$$
$$\partial_1 y(x,t) = \omega\sin(c\omega t)\cos(\omega x) \qquad \partial^2_{1,1}y(x,t) = -\omega^2\sin(c\omega t)\sin(\omega x)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2}y(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y(x,t)$$

Donc $y : (x,t) \mapsto \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$ satisfait l'équation.

4. Soit deux fonctions $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ qui satisfont l'équation. Soit α_1 et α_2 deux réels. On pose $z(x,t) = \alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$.
Calculons les dérivées secondes de z.

$$\partial_2 z(x,t) = \alpha_1\partial_2 y_1(x,t) + \alpha_2\partial_2 y_2(x,t) \qquad \partial^2_{2,2}z(x,t) = \alpha_1\partial^2_{2,2}y_1(x,t) + \alpha_2\partial^2_{2,2}y_2(x,t)$$
$$\partial_1 z(x,t) = \alpha_1\partial_1 y_1(x,t) + \alpha_2\partial_1 y_2(x,t) \qquad \partial^2_{1,1}z(x,t) = \alpha_1\partial^2_{1,1}y_1(x,t) + \alpha_2\partial^2_{1,1}y_2(x,t)$$

Or, on sait que $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ satisfont l'équation. Ainsi

$$\partial^2_{2,2}y_1(x,t) = c^2\partial^1_{1,1}y_1(x,t)$$

$$\partial^2_{2,2}y_2(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y_2(x,t)$$

On a alors

$$\partial^2_{2,2}z(x,t) = \alpha_1\partial^2_{2,2}y_1(x,t) + \alpha_2\partial^2_{2,2}y_2(x,t) = \alpha_1 c^2\partial^1_{1,1}y_1(x,t) + \alpha_2 c^2\partial^2_{1,1}y_2(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}z(x,t)$$

La fonction $z(x,t) = \alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$ satisfait donc l'équation.

Réponse de l'exercice 23.4

La courbe 3D 1) a les lignes de niveau B), la courbe 3D 2) a les lignes de niveau A), la courbe 3D 3) a les lignes de niveau D) et la courbe 3D 4) a les lignes de niveau C)

Réponse de l'exercice 23.5

On veut déterminer les points critique de $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$. Pour cela on calcule d'abord ses dérivées partielles

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + 3y - 6 \qquad \partial_2 f(x,y) = 3x + 6y + 3$$

Déterminons maintenant les points où $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$
On obtient le système

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 6y = -3 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -x = -15 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -24 \\ -x = -15 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = 15 \end{cases}$$

Ainsi $(15, -8)$ est l'unique point critique de f (il s'agit ici d'un minimum mais les outils pour le prouver ne sont pas au programme).

On veut ensuite déterminer les points critique de $g(x,y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$. Pour cela on calcule d'abord ses dérivées partielles

$$\partial_1 g(x,y) = 2xy - 6x \qquad \partial_2 g(x,y) = x^2 - 12y$$

Déterminons maintenant les points où $\partial_1 g(x,y) = \partial_2 g(x,y) = 0$
On obtient le système

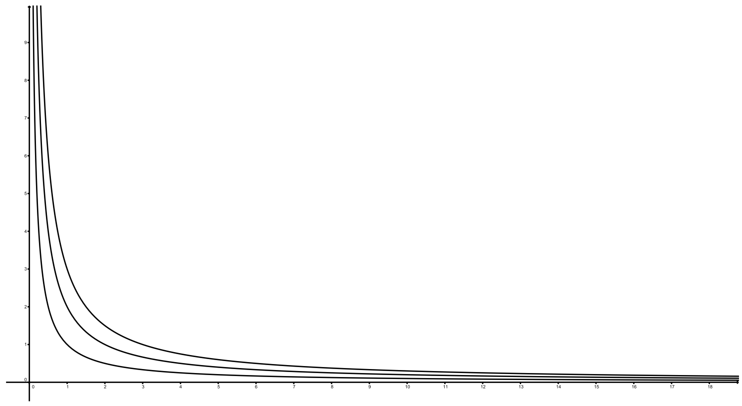
$$(S) \quad : \quad \begin{cases} 2xy - 6x = 0 \\ x^2 - 12y = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y-3) = 0 \\ x^2 = 12y \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors, comme $y = \dfrac{x^2}{12}$, $y = 0$. Si $x \neq 0$ alors nécessairement $y = 3$ et $x = 6$ ou $x = -6$.
Ainsi g admet trois points critiques qui sont $(0,0)$, $(-6,3)$ et $(6,3)$.

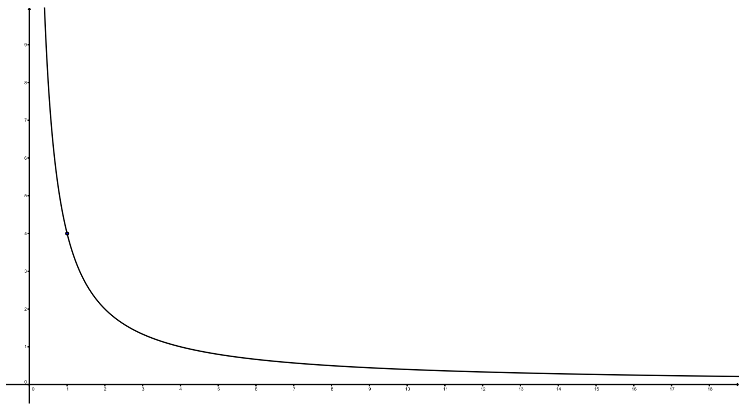
Réponse de l'exercice 23.6

Figure 23.6 – Isothermes

1. 

2. La fourmi va se déplacer à température constante donc sur une courbe isotherme, en particulier elle se déplace sur la courbe isotherme $T = 4$, la température le long de son chemin sera donc de 4.

Figure 23.7 – Chemin de la fourmi



Réponse de l'exercice 23.7

1. Le point A est le plus haut.
2. Le point B est sur la pente la plus raide.
3. Partant de A et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va d'abord croître.
4. Partant de B et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va d'abord décroître.
5. Partant de A et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va d'abord croître.
6. Partant de B et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va d'abord décroître.

Réponse de l'exercice 23.8

La dérivée partielle selon la première coordonnée $\partial_1 f(x_0, y_0)$ représente la variation de f lorsque l'on fait varier uniquement x.

Ici on voit sur le graphe que, si x augmente, alors la valeur prise par $f(x, y_0)$ diminue (on passe de la valeur 4 à une valeur comprise entre 4 et 3). Ainsi $\partial_1 f(x_0, y_0)$ est négative.

De même la dérivée partielle selon le seconde coordonnée $\partial_2 f(x_0, y_0)$ représente la variation de f lorsque l'on fait varier uniquement y.

Ici on voit sur le graphe que si y augmente, alors la valeur de $f(x_0, y)$ augmente (on passe de la valeur 4 à une valeur comprise entre 4 et 5). Ainsi $\partial_2 f(x_0, y_0)$ est positive.

Réponse de l'exercice 23.9

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$. On veut montrer que f vérifie l'équation de Laplace. Calculons les dérivées partielles de f

$$\partial_1 f = 2x + 2y \qquad \partial_2 f = -2y + 2x$$
$$\partial^2_{1,1} f = 2 \qquad \partial^2_{2,2} f = -2$$

Ainsi

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) + \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2 + (-2) = 0$$

f vérifie donc l'équation de Laplace

Soit $f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$. On veut montrer que f vérifie l'équation de Laplace. Calculons les dérivées partielles de f

$$\partial_1 f = e^x \sin(y) - e^y \sin(x) \qquad \partial_2 f = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$
$$\partial^2_{1,1} f = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) \qquad \partial^2_{2,2} f = -e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$$

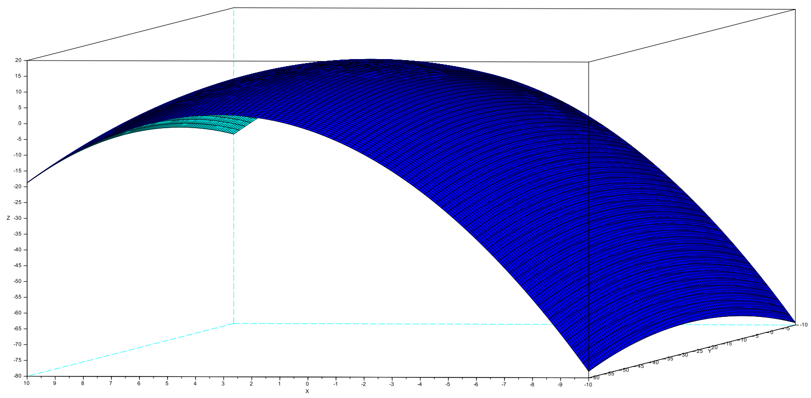
Ainsi

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) + \partial^2_{2,2} f(x,y) = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) - e^x \sin(y) + e^y \cos(x) = 0$$

f vérifie donc l'équation de Laplace.

Réponse de l'exercice 23.10

Figure 23.8 – Graphe 3D de NBI



1.

2. On cherche les points critiques de la fonction $NBI(\nu, h)$, c'est à dire les points où son vecteur gradient est nul. On a

$$\nabla NBI(\nu, h) = \begin{pmatrix} -0.932\nu + 2.96 \\ -0.0131h + 0.34625 \end{pmatrix}$$

Ainsi le seul point critique est le point $\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) \simeq (3.17597, 26.4313)$. Si la richesse en espèces d'insectes atteint un maximum, ce sera forcement en ce point. Vérifions toutefois qu'il s'agit bien d'un maximum.
La courbe nous incite à penser qu'il s'agit bien d'un maximum local.

3. La richesse maximale vaut $NBI\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) = \frac{5061249433}{488368000} \simeq 10.363598$

4. On sait que la direction dans laquelle NBI varie le plus vite est la direction du vecteur gradient, c'est à dire

$$\frac{1}{\|\nabla NBI\|}\nabla NBI = \frac{1}{\sqrt{(-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2}} \begin{pmatrix} -0.932\nu + 2.96 \\ -0.0131h + 0.34625 \end{pmatrix}$$

La valeur de cette variation maximale correspond à la norme du vecteur gradient, à savoir $f(\nu, h) = \sqrt{(-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2}$

5. On rappelle qu'étudier les extrema d'une fonction de la forme $f = \sqrt{g}$ est équivalent à étudier les extrema de la fonction g. Ici on pose donc $g(\nu, h) = (-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2$. Calculons ∇g

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2 \times (-0.932) \times (-0.932\nu + 2.96) \\ 2 \times (-0.0131) \times (-0.0131h + 0.34625) \end{pmatrix}$$

∇g ne s'annule qu'au point $\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) \simeq (3.17597, 26.4313)$ qui est donc le seul point où f atteint éventuellement un extremum (il s'avère ici que f admet un minimum local en ce point)

Réponse de l'exercice 23.11

1. On sait que la direction du champ électrique est la direction du vecteur gradient, c'est à dire

$$\frac{1}{\|\nabla \phi\|}\nabla \phi = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Au point $(2, 1)$ on obtient

$$\frac{1}{\|\nabla \phi\|}\nabla \phi(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La valeur de cette variation maximale correspond à la norme du vecteur gradient, à savoir $2\sqrt{5}$.

2. La direction dans laquelle la température décroît le plus vite au point $(-3, 2)$ est la direction opposée au vecteur gradient, c'est à dire

$$-\frac{1}{\|\nabla \phi\|}\nabla \phi = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Au point $(-3, 2)$ on obtient

$$\frac{1}{\|\nabla \phi\|}\nabla \phi(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Le taux de changement de la température en fonction de la distance au point $(1, 2)$ dans la direction $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ est défini par

$$\langle (3, -1); \nabla \phi(2, 1) \rangle = 3 \times 2 + (-1) \times (-4) = 10$$