8 T.D. Espaces vectoriels.

- **Structure vectorielle** : Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs ; sous-espaces vectoriels, intersection finie de ssev ; ssev engendré par une famille fini de vecteurs
  Famille génératrice fini d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence) ; Famille libre, famille liée finie ; Base finie d'un espace vectoriel et coordonnées d'un vecteur dans une base.
  Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.
- **Dimension** : De toute famille génératrice fini d'un ev E on peut extraire une base.
  Dans un ev de dimension n : Toute famille libre a au plus n éléments, une famille libre ayant n éléments est une base ; toute famille génératrice a au moins n éléments , une famille génératrice ayant n éléments est une base.
  Si F est ssev de E alors $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales alors $F = E$.

Exercice 1 ✶ : Dire dans chacun des cas suivants si les ensembles F sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E donnés.

① $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ($n = 2$, 3 ou 4) :

① $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 1\}$
② $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$
③ $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = 0\}$
④ $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y \geq 0\}$
⑤ $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
⑥ $F_6 = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = (a + b, 2a + b, -a + 2b)\}$

② $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = \mathbb{R}_n[X]$:

① $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(3) = 0\}$
② $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(3) = 0\}$
③ $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(-1) = P(1) = 0\}$
④ $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \geq 2\}$
⑤ $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P = (X - 1)P'\}$
⑥ $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(X) = (X - 1)(bX + a + b)\}$.

③ $E = \mathbb{R}^I$ ou $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, ($n \in \mathbb{N}$)

① $F_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est impaire }\}$
② $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ décroissante sur } \mathbb{R}\}$
③ $F_3 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / f(0) = f(\pi)\}$
④ $F_4 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
⑤ $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) - f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}\}$
⑥ $F_6 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

④ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N})$

① $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = -M\}$
② $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
③ $F_3 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$
④ $F_4 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda \cdot X\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 ✶ : Familles libres

❶ Déterminer dans chaque cas si les familles considérées sont libres et préciser leur rang.
Lorsque c'est le cas, dire si ce sont des bases des espaces vectoriels E.

① $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(1,-1,2),(3,1,1),(-3,-5,4)\}$
② $E = \mathbb{R}^3$, $F_2 = \{(0,1,3),(-1,1,0),(4,5,6)\}$
③ $E = \mathbb{R}^4$, $F_3 = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0)\}$
④ $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F_4 = \{1, X, X^2, (X-3)(X+1)\}$
⑤ $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F_5 = \{X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\}$
⑥ $E = \{y / y'' - 2y' + y = 0\}$, $F = \{x \longmapsto e^x, x \longmapsto xe^x\}$
⑦ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{x \longmapsto e^{kx}, k \in [\![0,n]\!]\}$

❷ Déterminer les vecteurs (x,y,z) de $E = \mathbb{R}^3$ tels que la famille ci-dessous soit libre dans E :

$$\mathcal{F} = \{(1,0,0),(0,1,1),(x,y,z)\}$$

En déduire l'équation du plan vectoriel engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$.

❸ Montrer que les vecteurs suivant engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ dont on donnera la dimension :

$$u = (1,-1,0,2,1),\ v = (2,1,1,3,-1),\ w = (0,1,1,2,1) \text{ et } t = (4,-2,0,5,0)$$

Exercice 3 ✶✶ : Bases

① Donner une base de chacun des SEV suivants, abordés dans **l'exercice 1** sous les numéros suivants :

1.2),3),5),6) ; **2.**1),2),3) et 6) ; **3.**6)

ainsi que **4.** 4), selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ en considérant successivement :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

② Montrer que les familles suivantes sont des bases de $E = \mathbb{R}_n[X]$:

✦ $\mathcal{F}_1 = (1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ où $a \in \mathbb{R}$.
✧ $\mathcal{F}_2 = (1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)\cdots(X-n+1))$
★ $\mathcal{F}_3 = (X^n, X^{n-1}(1+X), \cdots, (1+X)^n)$

Exercice 4 ✶ : rang d'une famille de vecteurs

En utilisant l'écriture matricielle d'une famille de vecteurs, déterminer le rang des familles finies suivantes :

① $\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1),(4,2,2)\}$
② $\mathcal{F}_2 = \{(1,-1,0,2,1),(2,1,1,3,-1),(0,1,1,2,1),(4,-2,0,5,0)\}$
③ $\mathcal{F}_3 = \{1-X+2X^2, 3+X+X^2, -3-5X+4X^2\}$
④ $\mathcal{F}_4 = \{X+3X^2, -1+X, 2+X^2, 4+5X+6X^2\}$

Exercice 5 ✶ :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in E/P(1) = 0 = P(2)\}$ et $G = \{P \in E/P(3) = 0 = P(4)\}$.

① Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et en donner une base.

② Déterminer leur intersection.

③ Montrer que la juxtaposition des bases de F et de G obtenues à la question 1. forme une base de E.

Exercice 6 ✶ :

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$. A est-elle inversible ?

② Montrer que la famille (A, A^2) est une famille libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

③ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}$ tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

④ **a.** Montrer que : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $\forall n \geq 1$.
b. En déduire la forme explicite de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
c. Donner l'expression de A^n en fonction de A et A^2 pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ✶✶✶ : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ n nombres réels distincts. On définit des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i},\ k \in [\![1, n]\!]$$

① Calculer $L_k(a_j)$ pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$

② Montrer que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

③ Exprimer la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$

④ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Quel est le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i$?
Donner la matrice des coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$