

6

Nombres complexes et polynômes.



Rappels (BCPST1 - Trigonométrie et nombres complexes)

- **Nombres complexes** : Écriture algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Représentation géométrique. Propriétés des conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe. Linéarisation de $\cos^p(x) \sin^q(x)$.
Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des solutions. Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.
- **trigonométrie** : Définition, périodicité et symétrie des fonctions cos, sin et tan.
Formules de trigonométrie $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
Résolution d'équations trigonométrique du type : $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$ et $\tan(x) = t$.
Notations arccos, arcsin et arctan.
Transformation : $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = R \cos(\theta + \phi)$.

1 Nombres complexes

Exercice 1 * : Linéariser les expressions suivantes

$$A_1 = \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta), \quad A_2 = \cos^2(\theta) \cdot \sin^4(\theta)$$

Exercice 2 : formules usuelles

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- ① Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.
- ② Calculer $\frac{1}{\tan(\theta)} - \frac{2}{\tan(2\theta)}$ en précisant l'ensemble de validité.
- ③ En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^n 2^k \tan(2^k)$.

Exercice 3 * : Formes algébriques et trigonométriques

Soit $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de a , b et ab .
En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 4 ** : Étude de conjugaison et de module

- ① Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = 1 = |z_2|$. Montrer que $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.
- ② Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.
✍ *Remarque* : On pourra utiliser la forme trigonométrique de $1 + z$ et de $1 + z^2$ et montrer que $|1 + z|^2 + |1 + z^2|^2 \geq 2$.

Exercice 5 ★ : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

① $z^2 - z + 1 = 0$

② $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$. ☞ On montrera qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.

③ $(1 + \cos(2\theta))z^2 - 2\sin(2\theta)z + 2 = 0$ où $\theta \in [0, 2\pi[$. ☞ On déterminera un argument de chaque solution.

④ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Exercice 6 ★★ :

On pose $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

① Que vaut z^7 ? En déduire que S et T sont des nombres complexes conjugués.

② Calculer $S + T$ et $S \cdot T$.

③ Montrer que S et T sont racines d'un trinôme qu'on déterminera. En déduire les valeurs de S et de T après avoir déterminé le signe de la partie imaginaire de S .

2 Polynômes

Exercice 7 * : Factoriser sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les polynômes suivants

$$P(X) = X^3 - 8, Q(X) = X^6 - 3X^2 - 2, R(X) = X^4 + X^2 + 1 \text{ et } S(X) = (2X + 1)^4 - (X - 1)^4$$

Exercice 8 * : Racines et degré d'un polynôme

Soient deux réels a et b tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme :

$$P_{2n+1}(X) = (X + a + b)^{2n+1} - X^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$$

- ① Quel est le degré de P_{2n+1} ?
- ② Montrer que P_{2n+1} est divisible par P_3 , c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{2n+1} = P_3 \cdot Q$.

Exercice 9 * : racines et coefficients d'un polynôme

On cherche à déterminer tous les triplets de nombres complexes (z_1, z_2, z_3) de même module 1 tels que : $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ et $z_1 z_2 z_3 = 1$.

- ① Soit $P = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. Exprimer les coefficients de P en fonction de ses racines dans \mathbb{C} .
- ② De quel polynôme z_1, z_2 et z_3 sont les racines ?
- ③ Conclusion. Dire notamment quel est le nombre de solutions.

Exercice 10 * : Ordre de multiplicité

- ① Soit $P(X) = 2X^{35} + \sqrt{2}X - 3$. Montrer que P n'a qu'une racine réelle et que celle-ci est simple et positive.
- ② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$. Montrer que P_n n'a aucune racine multiple.
✎ On pourra montrer que toute racine multiple de P_n est racine de $P'_n - P_n$.

Exercice 11 ** :

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2, P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$$

- ① Calculer P_2, P_3 et P_4 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
- ② Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

- ③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le réel :

$$\alpha_k = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right)$$

est racine de P_n . Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 12 ** :

Soit $n \in \mathbb{N}$. A tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$, on associe le polynôme :

$$Q_P(X) = (3X + 8)P(X) + (X^2 - 5X)P'(X) - (X^3 - X^2)P''(X)$$

- ① Comparer, lorsque P est non nul, le degré de P et celui de Q_P .
- ② Que vaut P lorsque Q_P est le polynôme nul ?
- ③ Trouver tous les couples (λ, P) où $\lambda \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme réel non nul, tel que $Q_P = \lambda P$.

Planche 13 : oral Agro 2018

Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$.

- ① On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnée par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par $[0, 1, 0, 2, 1]$.
 - a. Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme dérivé P' .
 - b. Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme XP .
 - c. En déduire une fonction retournant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P .
- ② On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.
- ③ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n . Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n + 1$.
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?
- ④ On considère l'équation $(E) : \Phi(P) = 9P$.
 - a. Le polynôme nul est-il solution ?
 - b. On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solution de (E) .
Montrer que ceux-ci sont de degré 9.
Montrer qu'ils sont solution d'une équation différentielle du premier ordre et en déduire qu'on peut les mettre sous la forme : $\lambda(X + 1)^9$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.