5 Révisions Équations différentielles.

⚠ Ce TD est associé au notebook d'exercices, disponible sur le site de la classe, sur lequel on mettra en pratique la méthode d'Euler afin de valider les réponses obtenues.

Exercice 1 ✶ : Équations différentielles du premier ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ supposée dérivable sur I.

① $y' + y = \cos(t)$, $I = \mathbb{R}$, $y(0) = 1$
(✐ On pourra chercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$)

② $y' - 2y + e^x = 0$, $I = \mathbb{R}$, $y(0) = 0$

③ $xy' - 2y + x = 0$, $I = \mathbb{R}_+^*$. $y(1) = 2$

④ $(1 - x^2)y' + 2xy - 4x = 0$, $I =]1, +\infty[$, $y(2) = -1$

⑤ $y' - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x$, $I =]1, +\infty[$, $y(2) = 2$

⑥ $xy' - y + \ln(x) = 0$, $I = \mathbb{R}_+^*$, $y(1) = 0$

⑦ $y' - y\tan(x) = \sin(2x)$, $I =] - \pi/2, \pi/2[$, $y(0) = 1/3$

Exercice 2 ✶ : Equations différentielles du second ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

① $y'' + y = e^x$

② $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$
✐ On cherchera une solution particulière de la forme $y : x \longmapsto a\sin x + b\cos x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

③ $y'' - 3y' + 2y = xe^x$. ✐ On cherchera une solution particulière de la forme : $(ax^2 + bx + c)e^x$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

④ $y'' - 3y' + 2y = xe^{-2x}$. ✐ On cherchera une solution particulière de la forme : $(\alpha x + \beta)e^x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

⑤ $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$

Exercice 3 ✶✶ : Équations autonomes d'ordre 1

On donne les concentrations d'un réactif en solution à différents instants :

Temps / s	0	60	108	162	230	326	363	449	527	612	709	822	947
c(t) / $mmol.L^{-1}$	5,00	4,73	4,46	4,19	3,92	3,66	3.4	3,14	2,88	2,63	2,38	2,13	1,89

Temps / s	1088	1234	1678	1974
c(t) / $mmol.L^{-1}$	1,64	1,40	1,16	0,93

On suppose qu'on a une évolution vérifiant une équation différentielle du type $c'(t) = -kc^n(t)$ [*]. On cherche à déterminer l'ordre n de la réaction et la constante k de vitesse de réaction.

① Méthode différentielle :

a. Écrire une fonction Python permettant d'évaluer les vitesses de réactions à partir des données ci-dessus. Tracer dans deux fenêtres distinctes la courbe représentant c en fonction de T et celle représentant c' en fonction de T.

b. Expliquer pourquoi le tracé de $\ln(-c')$ en fonction de $\ln(c)$ permet d'estimer l'ordre de la réaction.

c. Proposer une fonction Python `dteRegression()` qui, pour X et Y donnés en entrée, renvoie les coefficients a et b de la droite de régression de la série statistique (X, Y).

✐ : On rappelle que son équation est $y = ax + b$, avec $a = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$.

En déduire deux valeurs possibles pour l'ordre n de la réaction.

② Méthode d'intégration :

a. Intégrer l'équation différentielle ci-dessus pour les valeurs de n envisagées à l'issue de la méthode différentielle.

b. Proposer dans chaque cas un changement de variable qui permette de décider quel est l'ordre de la réaction.

c. Déterminer la constante k de vitesse de réaction.