$\boxed{\text{Exercice 10}}$

$N \in \mathbb{N}^*$

$n=0$: une seule personne possède l'info et la trouve intéressante.

X_n = Nb de personnes ayant reçu l'info à l'instant n et qui l'on trouvé intéressante.

(1)

```
def X(n, N, p):
    x = 1   # 1 personne trouve l'info intéressante
    for i in range(n)
        nI_int = 0
        for j in range(x):
            for k in range(N):
                if rdm.random() < p:
                    nI_int += 1
        x = nI_int
    return x
```

(2) A l'instant $n=1$, on a N personnes qui ont reçu l'information.

X_1 dénombre les succès "trouver cette information intéressante" au cours de N épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Conclusion $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)}$; $\boxed{E(X_1) = Np}$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P(X_n = 0)$

Si $(X_n=0)$ est réalisé, plus personne ne trouve l'information intéressante et la transmet.

Dès lors $(X_{n+1}=0)$ est réalisé.

D'où $(X_n=0) \subset (X_{n+1}=0)$ et donc $u_n \leq u_{n+1}$.

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l}(u_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante} \\ \text{et } u_n = P(X_n=0) \leq 1 \ \forall n \geq 1. \\ \text{Donc } (u_n) \text{ converge.}\end{array}}$

(4) a) Sachant que $(X_1=k)$ est réalisé, tout se passe comme si les k personnes qui ont trouvé l'info intéressante n'arrivaient pas à susciter l'intérêt au terme de n transmissions.

Les k diffusions étant indépendantes:

$$\boxed{P_{(X_1=k)}(X_{n+1}=0) = u_n^k}$$

b) $X_1(\Omega) = [\![0, N]\!]$ donc $\{(X_1 = k), k \in [\![0, N]\!]\}$ est un syst. complet d'événements.

Donc, d'après la F.P.T : $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{N} P_{(X_1 = k)}(X_{n+1} = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} u_n^k \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (p \cdot u_n)^k q^{N-k} = (q + p \cdot u_n)^N$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = (1 - p + p u_n)^N}$

(on rappelle que $q = 1 - p$)

5 $N = 2$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1 - p + p u_n)^2$

a) la fonction $x \mapsto (1 - p + p x)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, si $\exists \ell \in \mathbb{R}_+ \ / \ \lim_{\infty} u_n = \ell$

alors $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow (1 - p + p\ell)^2 = \ell$

$$\Leftrightarrow p^2 \ell^2 + 2(1-p)p\ell - \ell + (1-p)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 \ell^2 + [2p(1-p) - 1]\ell + (1-p)^2 = 0$$

$\ell = 1$ est racine évidente... car

$$\underbrace{p^2 + 2p(1-p) - 1 + (1-p)^2}_{=0} = \cancel{p^2} + \cancel{2p} - \cancel{2p^2} - 1 + 1 - \cancel{2p} + \cancel{p^2}$$

d'où

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow p^2 \left[\ell^2 + \frac{2p(1-p) - 1}{p^2} \ell + \frac{(1-p)^2}{p^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 (\ell - 1) \left(\ell - \frac{(1-p)^2}{p^2}\right) = 0$$

Conclusion $\boxed{\text{les seules limites possibles de } (u_n) \text{ sont } \ell = 1 \text{ et } \ell = \frac{(1-p)^2}{p^2}}$

b) On suppose ici que $p \leq 1/2$

- On peut noter que, pour $p = 1/2$, $\ell = 1 = \frac{(1-p)^2}{p^2}$
- Sinon, $0 < p \leq 1/2 \Leftrightarrow 0 < p^2 \leq 1/4 \Leftrightarrow 4 \leq \frac{1}{p^2}$

$\rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - p < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq (1-p)^2 < 1$

D'où $\boxed{1 \leq \frac{(1-p)^2}{p^2}}$ [Note : En notant $0 < p \leq 1 - p \Leftrightarrow 0 < p \leq 1/2$ on a immédiatement $\frac{1-p}{p} \geq 1$ ...]

il suffit de noter que $u_1 = P(X_1 = 0) = \binom{2}{0} p^0 q^2 = q^2 < 1$
(puisque $0 < p < 1 \Rightarrow 0 < 1 - p < 1$)
et que $I_1 = [0, 1]$ est un intervalle stable par f
(puisque $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < f(0) < f(x) < f(1) = 1$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

Donc
$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in [0, 1]}$ et (u_n) croissante d'après ③

Conclusion $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$

$\rightarrow$ l'information finit par perdre son intérêt pour tout le monde à partir d'un certain temps...

c) $p > 1/2$ et dans ce cas : $0 < \frac{(1-p)^2}{p^2} < 1$

On nous demande de montrer que $I_2 = \left[0, \frac{(1-p)^2}{p^2}\right]$ est stable par f, ce qui est immédiat puisque f est croissante sur I_2 et $f\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2\right) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$ ...

Par ailleurs :

$u_1 = q^2 = (1-p)^2 < \frac{(1-p)^2}{p^2}$ car $0 < p < 1 \Rightarrow \frac{1}{p^2} > 1$
(et $(1-p)^2 > 0$ ...)

Donc (Récurrence) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in I_2$

or (u_n) est croissante. Elle converge vers $\ell \in I_2$

Conclusion $\boxed{\lim_{n \to \infty} u_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 < 1}$

$\rightarrow$ la probabilité que l'information finisse par perdre de son intérêt n'a plus rien de certain...

⚠ On peut vérifier la probabilité de $\left(\frac{1-p}{p}\right)^2$ à l'aide de la fonction Python de la question ① ...