

Devoir surveillé 3 : Probabilités et équations différentielles

Le sujet se compose de trois extraits de problèmes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer. On pourra, à titre indicatif, consacrer une heure à chacun d'entre eux (en réservant toutefois 10 mn à la relecture!).

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice **est** autorisé au cours de l'épreuve.

Problème 1 : Epreuve Agro-véto A 2019

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n -ème lancer on obtient un face »

On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

- ① Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(T = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- ② On rappelle que $\mathbb{E}(X)$ existe si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument et, sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si elle existe.
- ③ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$.
- ④ Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $(T > n + m) \subset (T > n)$ puis comparer $P_{(T > n)}(T > n + m)$ et $P(T > m)$. Donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc S est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \mathbb{P}(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^n p_k$.

- ① Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4 .
- ② Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathbb{P}(S > n) = q_n$.
- ③ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in]0, 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- ④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.
- ⑤ En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en donner une interprétation.

On dit que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.

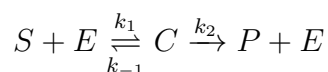
Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

- ⑥ En pensant au système complet d'événements $\{\overline{F_1}, F_1\}$ montrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}$.
- ⑦ Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
- ⑧ Justifier qu'il existe des réels A et B tels que :
- $$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 &= q_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 &= q_2 \end{cases}$$
- ⑨ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
- ⑩ Donner un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$. Cet équivalent pourra faire intervenir a , B , r_1 , r_2 et n .

Problème 2 : Epreuve Agro-véto B 2018

L'équation de Michaelis-Menten permet de décrire la cinétique d'une réaction catalysée par une enzyme agissant sur un substrat unique pour donner un produit. Elle relie la vitesse de la réaction à la concentration de substrat et à des paramètres constants, caractéristiques de l'enzyme.

D'après les travaux de Michaelis et Menten, lors d'une réaction chimique, un substrat, noté S , est catalysé par une enzyme, notée E , pour obtenir un produit, noté P . Plus précisément, le substrat se fixe sur l'enzyme pour former un complexe transitoire appelé « enzyme-substrat », noté C , qui se décompose ensuite pour donner le produit et l'enzyme, selon la réaction suivante :



On considère que la vitesse de chacune des réactions est proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Les constantes k_1 , k_{-1} et k_2 désignent les constantes de vitesse associées aux différentes réactions et sont supposées strictement positives. Dans la suite, et pour simplifier les écritures, on notera les différentes concentration (exprimées en $mol.L^{-1}$) par des lettres minuscules :

$$s = [S], e = [E] \text{ et } p = [P],$$

en remarquant que les concentrations sont des fonctions dépendant du temps.

On complète cette introduction en précisant les conditions initiales, à savoir :

$$s(0) = s_0, e(0) = e_0, c(0) = 0 \text{ et } p(0) = 0 \text{ avec } s_0 > 0 \text{ et } e_0 > 0.$$

L'objectif de cette partie est d'étudier la vitesse $\frac{dp}{dt}$ à laquelle le produit se forme en admettant que :

$$\frac{dp}{dt}(t) = \frac{v_{max}s(t)}{K_M + s(t)} \text{ où } K_M = \frac{k_2 + k_{-1}}{k_1} > 0 \text{ et } v_{max} = k_2e_0 > 0.$$

1.1. Étude du modèle

On considère l'équation suivante, appelée équation de Michaelis-Menten :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

Pour étudier cette équation, on définit sur \mathbb{R}_+ la fonction de Michaelis-Menten, notée f , par :

$$f(s) = \frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

- ① Montrer que la fonction f est croissante et déterminer ses limites aux bords du domaine de définition.
- ② Pour quelle valeur de s a-t-on $f(s) = \frac{v_{max}}{2}$?
- ③ Tracer la courbe représentative de f et y faire figurer des informations pertinentes (comme par exemple la tangente en 0).

1.2. Identification expérimentale des paramètres

Dans la suite, la quantité $\frac{dp}{dt}(t)$ est notée $v(t)$. On note par ailleurs v_i la vitesse initiale et on obtient :

$$v_i = \frac{v_{max}s_0}{K_M + s_0}$$

On utilise dorénavant une approche, mise au point par Lineweaver et Burk, afin de déterminer expérimentalement K_M et v_{max} .

- ① Établir une relation de la forme $\frac{1}{v_i} = \alpha \cdot \frac{1}{s_0} + \beta$ où les constantes α et β sont à déterminer.
- ② Expliquer comment on peut déterminer graphiquement les paramètres K_M et v_{max} à partir des données expérimentales.

On se propose d'appliquer l'approche précédente sur des résultats expérimentaux de Michaelis et Menten concernant l'hydrolyse de saccharose sous l'action d'une enzyme, l'invertase. Le tableau suivant donne les vitesses initiales en fonction des concentrations initiales en saccharose pour 7 expérimentations, ainsi que leurs inverses arrondis à l'unité.

N° d'expérience	s_0 (en $mol.L^{-1}$)	v_i (en $mol.L^{-1}.min^{-1}$)	s_0^{-1}	v_i^{-1}
1	0.330	$3.636.10^{-3}$	3	275
2	0.1670	$3.636.10^{-3}$	6	275
3	0.0833	$3.236.10^{-3}$	12	309
4	0.0416	$2.666.10^{-3}$	24	375
5	0.0208	$2.114.10^{-3}$	48	473
6	0.0104	$1.466.10^{-3}$	96	682
7	0.0052	$0.866.10^{-3}$	192	1155

- ③ Reporter sur le graphique de l'annexe 1 les couples (s_0^{-1}, v_i^{-1}) .
- ④ Proposer des valeurs approchées de K_M et v_{max} avec une précision en accord avec l'approche utilisée.

1.3. Étude informatique de données expérimentales

☞ *Remarque* : Les extraits de code matérialisés par des `---` correspondent à des portions à compléter. Dans cette partie, on suppose que le fichier Python débute par l'importation du module `matplotlib.pyplot` et par la définition des deux listes `Ls` et `Lv`, de la façon suivante :

```
import matplotlib.pyplot as plt
Ls = [0.333,0.167,0.0833,0.0416,0.0208,0.0104,0.0052]
Lv = [3.636,3.636,3.236,2.666,2.114,1.466,0.866]
```

- ① a) Écrire une fonction `inv` qui prend en entrée une liste de nombres (supposés non nuls) `L` et qui renvoie la liste composée des inverses de ces nombres.
- b) Écrire une version améliorée `inv_ex` de la fonction `inv` qui prend en entrée une liste de nombres `L`, puis : si un de ces nombres est nul, alors elle renvoie le booléen `False`, sinon elle renvoie la liste composée des inverses de ces nombres.
- c) Quelle ligne de code écrire en Python afin qu'elle effectue le tracé demandé en question 3 de la partie 1.2 (les points seront représentés par des petits cercles et ne seront pas reliés entre eux).
- ② a) On suppose écrites deux fonctions `moyenne(X)` et `variance(X)` qui prennent en entrée une liste `X` et qui renvoient respectivement sa moyenne et sa variance ainsi qu'une fonction `cov(X, Y)` qui renvoie la valeur de la covariance de `X` et `Y` si elle existe et le booléen `False` sinon.
Si on note $X = [x_1, \dots, x_n]$ et $Y = [y_1, \dots, y_n]$, rappeler la définition de \bar{X} , s_X^2 et $s_{X,Y}$.
- b) On considère les fonctions `Coef` et `Trace` suivantes :

```
def Coef(X,Y):
    a = cov(X,Y)/variance(X)
    b = moyenne(Y)-cov(X,Y)/variance(X)*moyenne(X)
    return([a,b])
```

```
def Trace(X,Y):
    [a,b] = Coef(X,Y)
    xmin = min(X) ; xmax = max(X)
    plt.plot(X,Y,"*")
    plt.plot( ----- )
    plt.plot([moyenne(X)], [moyenne(Y)], "s")
    plt.grid()
    plt.show()
```

- i. Compléter la fonction `Trace` afin de tracer le segment d'extrémités $(x_{\min}, a \cdot x_{\min} + b)$ et $(x_{\max}, a \cdot x_{\max} + b)$.
- ii. Donner l'équation de la droite qui passe par ces deux points.
- iii. Quel nom porte cette droite.
- iv. On exécute la fonction `Trace` pour des listes `X` et `Y` quelconques de taille 5. Pour chacun des trois tracés suivants, indiquer s'il peut être ou non le résultat de `Trace` ?

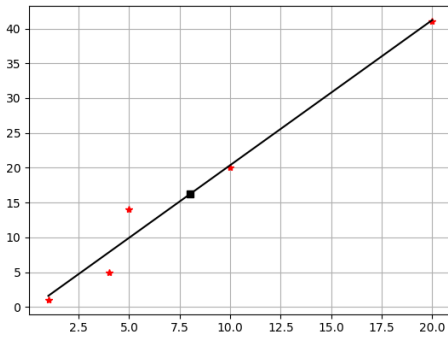


FIGURE 1 – Tracé 1

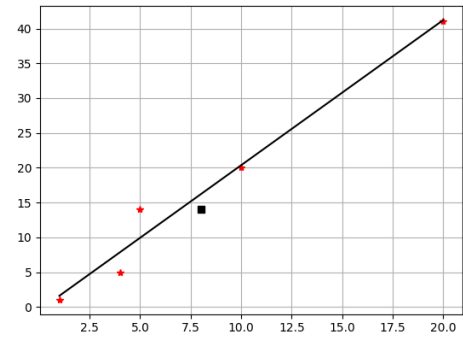


FIGURE 2 – Tracé 2

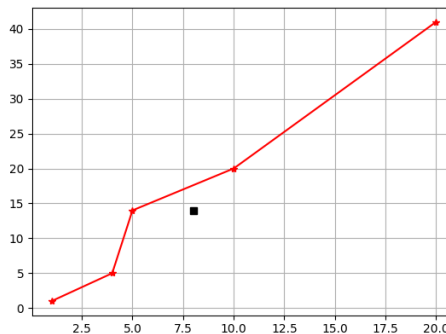


FIGURE 3 – Tracé 3

- c) i. En utilisant les fonctions et variables qui précèdent, proposer un code qui calcule les valeurs de K_M et v_{max} en suivant la démarche de la partie 1.2
- ii. Pour ces données, le coefficient de corrélation linéaire vaut 0.9995. Qu'en déduire ?

1.4. Analyse de l'équation de Michaelis-Menten par Schnelle et Mendoza

Les parties précédentes ont permis de déterminer expérimentalement les constantes K_M et v_{max} . Dans cette partie, on s'intéresse à la dépendance de s par rapport au temps, sous l'hypothèse de l'Approximation des Etats Quasi Stationnaires (AEQS) selon laquelle la variation de la concentration en complexe « enzyme-substrat » est nulle (car il est consommé par la réaction juste après sa création), à l'exception d'une très courte phase initiale de durée $\delta > 0$. On considère que la concentration en S ne varie pas au cours de cette phase initiale.

Sous cette hypothèse, pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, on a $\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{dp}{dt}(t) = -\frac{v_{max}s(t)}{K_M + s(t)}$.

On s'intéresse désormais à l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_{max}s}{K_M + s} \quad [E_1]$$

avec pour condition initiale $s(\delta) = s_0$.

- ① **Méthode d'Euler** : On rappelle que pour toute fonction f dérivable sur un intervalle I , on approche $f'(t)$ par $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ pour h suffisamment petit.
 En déduire pour toute solution s de $[E_1]$ une expression de $s(t+h)$ en fonction de $s(t)$, ou $t \in [\delta, +\infty[$ et écrire une fonction Python `resolutionE(Vmax, Km, tf, s0, h)` permettant, une fois appelée, de tracer une approximation numérique de la solution de $[E_1]$ sur l'intervalle $[\delta, t_f]$
- ② Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = xe^x$.
- Démontrer que g est strictement croissante.
 - En déduire que la fonction h , réciproque de g , est bien définie et donner son domaine de définition.
 - Tracer la courbe représentative de la fonction h en expliquant la méthode graphique utilisée.
- ③ On définit $y(t) = g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)$. Écrire une équation différentielle du premier ordre satisfaite par la fonction y et donner la condition initiale correspondante.
- ④ Déduire des questions précédentes une expression de $y(t)$ puis de $s(t)$ en fonction de t , K_M , v_{max} et s_0 (et faisant appel à la fonction h).
- ⑤ Proposer une méthode numérique permettant d'approcher les valeurs de la fonction h .

Problème 3 : Epreuve Agro-véto A 2023

Ce sujet s'intéresse au phénomène de sélection en biologie. La première partie consiste à démontrer des résultats qui seront utilisés dans la suite du sujet. La partie II est consacrée à l'étude probabiliste du devenir d'une stratégie évolutive en temps discret.

Dans tout le sujet, λ est un **réel strictement positif** et, pour tout réel x , on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Partie I. Quelques résultats utiles

- Justifier l'existence de $S(x)$ pour tout réel x et en donner une expression simple.

Étude du nombre de points fixes d'une fonction

On rappelle que λ est un réel strictement positif ; on considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

- Déterminer le signe sur \mathbb{R}_+ de la fonction $g : x \mapsto xe^{-x} - 1$.
- Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.
Indication : On pourra dériver deux fois la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$.

4. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ a exactement deux solutions sur $[0, 1]$.

Indication : On pourra prouver que la dérivée de $\phi : x \mapsto f(x) - x$ s'annule en un seul point α sur $[0, 1]$ dont on ne cherchera pas l'expression.

Dans la suite du sujet, on notera x_λ la plus petite de ces deux solutions.

Autour d'une loi de probabilité appelée « loi de Poisson »

On dira qu'une variable aléatoire T suit une loi de Poisson de paramètre λ si

$$T(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{P}(T = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \forall i \in \mathbb{N}$$

5. Vérifier qu'on a bien défini ainsi une loi de probabilité, autrement dit que

$$\forall i \in \mathbb{N}, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \geq 0, \sum_{i \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \text{ converge de somme égale à } 1$$

6. Démontrer que $\mathbb{E}(T)$ existe et vaut λ .

Indication : On se rapportera à la définition de l'espérance donnée à la question 2. du PB 1.

On suppose désormais que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** telle que, pour tout entier n , T_n suit une loi de Poisson de paramètre t_n .

7. On cherche à déterminer la loi de $T_1 + T_2$.

a) Déterminer $(T_1 + T_2)(\Omega)$

b) En considérant le système complet d'événement $\{(T_1 = i), i \in \mathbb{N}\}$, montrer que

$$\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(T_1 = i) \mathbb{P}(T_2 = k - i)$$

c) En déduire, en faisant apparaître un binôme de Newton, que $T_1 + T_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$.

8. Montrer que ($n \in \mathbb{N}^*$) la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$.

Résultats sur les équations différentielles »

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : y'(t) = a(t)y(t)$$

9. Donner, sans justification, les solutions de l'équation différentielle (E_1) .

10. En déduire que, si f est une solution de (E_1) s'annulant sur I , alors f est la fonction nulle sur l'intervalle I .

Soit b une fonction continue sur \mathbb{R} , C une constante réelle et g **une** solution sur un intervalle I de l'équation différentielle : $(E_2) : y'(t) = b[y(t)](y(t) - C)$

11. Montrer que $g - C$ est solution sur I de :

$$(E_3) : y'(t) = b[g(t)]y(t)$$

12. En déduire que, s'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors g est constante sur I .

Partie II. Probabilité d'extinction d'une stratégie

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution en temps discret de la population qui suit une certaine stratégie de reproduction. On se donne un réel $\lambda > 0$ et on introduit une suite de variables aléatoires réelles $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui représente le nombre d'individus qui suivent la stratégie étudiée à chaque génération. On construit la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récursivement de la façon suivante :

- Z_0 est la variable aléatoire constante égale à 1 (initialement, un seul individu suit la nouvelle stratégie).
- Z_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ .
- Si l'on note z_1 la réalisation de Z_1 , alors Z_2 est la somme de z_1 variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre λ indépendantes entre elles et indépendantes de Z_1 . Ces variables aléatoires représentent les descendants de la génération précédente.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n , si z_n est la réalisation de Z_n , alors Z_{n+1} est la somme de z_n variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre λ indépendantes entre elles et indépendantes de Z_n , on notera

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{z_n} X_{n,k}$$

avec $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre λ indépendantes entre elles et indépendantes de Z_n . De nouveau, ces variables aléatoires représentent les descendants de la génération précédente.

On rappelle que, par convention, toute somme vide est nulle. Par exemple, $\sum_{k=1}^0 u_k$ est nulle.

Pour tout entier n , on introduit l'évènement $A_n = (Z_n = 0)$ et on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

13. Exprimer p_0, p_1 et p_2 en fonction de λ .
14. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle converge.
 Pour tout couple d'entiers naturels (k, n) , on admet que, sachant que $(Z_1 = k)$ est réalisé, Z_{n+1} est la somme de k variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que Z_n . Ainsi, $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) = p_n^k$.
15. En déduire que, pour tout entier n , on a $p_{n+1} = S(p_n)$.
16. En utilisant les résultats et les notations de la première partie, prouver que :

- si $\lambda \leq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$;
- si $\lambda > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = x_\lambda$.

17. Donner une interprétation du résultat obtenu.