Devoir surveillé 3 : Probabilités et équations différentielles

Problème 1 : Épreuve Agro-véto A 2019

Lu dans le rapport de jury : *« L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'**aider les futurs candidats dans leur préparation**.*
De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Les candidats pourraient augmenter sensiblement leurs résultats en justifiant leurs calcules (événements incompatibles, indépendants,... »

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n-ème lancer on obtient un face »
On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

① *Justifions que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(T = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:* Il faut faire au moins un lancer pour obtenir un premier succès... donc le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un premier face est un entier supérieur ou égale à 1. D'où $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k)$.
Or les épreuves (lancers de la pièce) sont indépendants donc les événements associés (obtenir Pile ou Face) sont mutuellement indépendants. D'où :

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(\overline{F_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{F_{k-1}})\mathbb{P}(F_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Conclusion : $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \mathbb{P}(T = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ pour tout } k \in X(\Omega)}$

Lu dans le rapport de jury : *« La loi de T a souvent été obtenue mais il a rarement été justifié que l'indépendance des lancers était nécessaire. »*

② On commence par prouver que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge (absolument). ✐ On note que c'est une série à termes positifs donc il revient au même de parler de convergence absolue et de convergence...
Or $\displaystyle\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée convergente puisque ici $q = \dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$ de somme $S = \dfrac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 4$.

Donc $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge car la multiplication par $\lambda = \frac{1}{2}$ ne change pas la nature de la série.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut : } \frac{1}{2}\cdot 4 = 2}$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$. *Calculons $P(T > n)$:*Plusieurs méthodes sont possibles (cf. TD) mais la plus rapide consiste à dire que l'événement $(T > n)$ est l'événement : « les n premiers lancers n'ont donnés que des Pile ».
Soit

$$(T > n) = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap \overline{F_n}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (indépendance des événements)

✐ *Rappel :* Pour une autre méthode, on pourra calculer

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) \text{ ou } \mathbb{P}(T > n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)...$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le résultat est souvent juste mais rarement justifié. On pouvait sommer les probabilités des événements **disjoints** « (T=k) » avec $k > n$ ou calculer la probabilité de l'intersection des événements **indépendants** $\overline{F_k}$ avec $k \leq n$.* »

④ Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. *Justifions que $(T > n + m) \subset (T > n)$ puis comparons $P_{(T>n)}(T > n + m)$ et $P(T > m)$:*
Si $(T > n + m)$ est réalisé le premier Face est arrivé après le $n + m$-ième lancer et donc, nécessairement, après le n-ième lancer.
Autrement dit $\boxed{(T > n + m) \subset (T > n)}$
On utilise ensuite la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(T>n)}(T > n + m) &= \frac{\mathbb{P}((T > n + m) \cap (T > n))}{\mathbb{P}(T > n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T > n + M)}{\mathbb{P}(T > n)} \text{ car } (T > n + m) \subset (T > n) \\
&= \frac{(\frac{1}{2})^{n+m}}{(\frac{1}{2})^n} = (\frac{1}{2})^m = \mathbb{P}(T > m)
\end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le résultat découle de la question précédente.* »

Interprétation : On peut dire que la loi proposée est « sans mémoire » puisque, le fait de savoir qu'il y a eu n échecs ne change par la probabilité que les m tentatives suivantes soient des échecs...
✐ Cette loi s'appelle la « loi géométrique » et elle figure au programme, ainsi que cette dernière propriété qui s'appelle officiellement l'« invariance temporelle de la loi géométrique ».

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc S est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \mathbb{P}(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

① *Déterminons p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4 :*

— On a $p_1 = 0$ puisque le premier double face ne peut arriver avant le deuxième lancer.
— On a $p_2 = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \dfrac{1}{4}$ puisque les lancers sont indépendants.
— On a $p_3 = \mathbb{P}(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ pour la même raison.
— Il faut considérer ici deux issues possibles pour le premier lancer (le système complet d'événements $\{F_1, \overline{F_1}\}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} p_4 &= \mathbb{P}((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) \\ &= \mathbb{P}((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) + \mathbb{P}((\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \text{ car événements incompatibles} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : « *A l'exception de p_4 les calculs sont souvent justes mais trop peu justifiés (indépendance des lancers, incompatibilité des événements)* »

Pour les valeurs de q demandées, on calcule les sommes $\sum_{k=1}^{n} p_k$ successivement pour n variant de 1 à 4. on trouve successivement 0, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{q_1 = 1,\ q_2 = \dfrac{3}{4},\ q_3 = \dfrac{5}{8},\ q_4 = \dfrac{1}{2}}$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Justifions que $\mathbb{P}(S > n) = q_n$:* Il suffit d'écrire que

$$\mathbb{P}(S > n) = 1 - \mathbb{P}(S \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k = q_n$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question simple et bien traitée.* »

③ Il en découle immédiatement que $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0, 1]$ puisque q_n est une probabilité d'après la question précédente.
Par ailleurs $(S > n+1) \subset (S > n)$ puisque, si le premier double Face arrive après le $n+1$-ième lancer, alors il arrive après le n-ième lancer... dès lors $\mathbb{P}(S > n+1) \leq \mathbb{P}(S > n)$ ou encore $q_{n+1} \leq q_n$.
La suite (q_n) est donc décroissante et minorée par 0 (c'est une probabilité...)
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Le théorème sur les suites monotones est globalement connu.*
Signalons qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$)
On ne pouvait pas utiliser ici l'argument $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k = 1$ car, à ce stade, on ne sait pas que la série converge... »

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Prouvons que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$:*

— On rappelle que $(S > n)$ est l'événement : « n'obtenir aucun double Face au cours des n premiers lancers ». Dès lors :

$$p_{n+3} = \mathbb{P}(S = n+3) = \mathbb{P}((S > n) \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3})$$

Par indépendance des lancers, on a :

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(S = n+3) = \mathbb{P}(S > n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} q_n}$

— On a $q_{n+3} - q_{n+2} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n+3} p_k\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{n+2} p_k\right) = -p_{n+3}$.
Soit $q_{n+3} - q_{n+2} = -q_n/8$.
Conclusion : $\boxed{q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8}$

Lu dans le rapport de jury : « *Très peu de candidats ont su justifier la première égalité. Certains tentent de tromper le correcteur avec une récurrence, ce type de tentative est à proscrire.*
Néanmoins les étudiants ont su rebondir et en déduire la seconde égalité. Il serait agréable pour les correcteurs qu'il soit clairement écrit que la première égalité est admise. »

⑤ En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \in N^*}$: D'après la question 3, on sait que la suite (q_n) converge.
Dès lors $\exists L \in [0, 1]$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} q_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} q_{n+3}$ et par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient la relation :

$$L = L - L/8 \Leftrightarrow L = 0$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Le passage à la limite n'a pas posé de difficulté mais le vocabulaire probabiliste « quasi impossible » ou « quasi certain » n'est que trop peu vu.* »

Interprétation : Si on note D l'événement « ne jamais obtenir de double Face », alors on peut remarquer que D est inclus dans l'événement : « les n premiers lancers n'ont pas donné de double Face ». Ou encore :
$R \subset (S > n)$ et par passage aux probabilités : $\mathbb{P}(R) \leq q_n$.
En utilisant le théorème d'encadrement des limites, on a : $\mathbb{P}(D) = 0$ ou encore
$\boxed{\text{l'événement « Ne jamais obtenir de double Face » est quasi-impossible}}$

On dit que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.
Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

⑥ *En pensant au système complet d'événements $\{\overline{F_1}, F_1\}$ montrons que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}$:* Utilisons les indications de l'énoncé et appliquons la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} q_{n+2} = \mathbb{P}(S > n+2) &= \mathbb{P}((S > n+2) \cap \overline{F_1}) + \mathbb{P}((S > n+2) \cap F_1) \\ &= \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(S > n+2)\mathbb{P}(\overline{F_1}) + \mathbb{P}_{F_1}(S > n+2)\mathbb{P}(F_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(S > n+2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{F_1}(S > n+2) \end{aligned}$$

Or
— $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(S > n+2) = \mathbb{P}(S > n+1)$ car tout se passe comme si on recommençait à compter à partir du 2nd lancer et qu'on n'obtenait aucun double Face à l'issue de n lancers compté à partir de ce deuxième lancer.

— $\mathbb{P}_{F_1}(S > n+2) = \mathbb{P}(\overline{F_2} \cap (S > n)$ car obtenir Face au premier lancer impose d'avoir Pile au second puis de n'obtenir aucun double Face au cours des n lancers qui suivent...

Conclusion : $\boxed{q_{n+2} = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S > n+1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathbb{P}(S > n) = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}}$

Lu dans le rapport de jury : « *La plupart des candidats fait un raisonnement par récurrence (encore quelques tentatives d'arnaque dans l'hérédité) mais il est rarement abouti.*
Un raisonnement probabiliste particulièrement élégant a été réussi dans quelques très rares cas. »

⑦ *Déterminons les racines du polynôme* $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ *:*
Le **discriminant** vaut $\Delta = (1/)^2 + 4/4 = 5/4$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les racines sont } r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ pour avoir } r_1 < r_2}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussie par* 80% *des candidats, ce qui est peu vu sa facilité. On a souvent vu des fractions non simplifiées ou mal simplifiées. Par exemple :*
$\dfrac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ »

⑧ Le système $\begin{cases} A\,r_1 + B\,r_2 &= q_1 \\ A\,r_1^2 + B\,r_2^2 &= q_2 \end{cases}$ a son **déterminant** qui vaut $r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2(r_2 - r_1) \neq 0$.
Il est non nul.
Conclusion : $\boxed{\text{Le système admet une unique solution}}$

Lu dans le rapport de jury : « *La question portait sur l'existence de A et de B... Beaucoup se sont lancés dans une résolution fastidieuse, infructueuse et non justifiée. Il fallait utiliser* r_1 *et* r_2 *étaient nulles et distinctes.*
Plus généralement, avant de diviser par une quantité, il faut s'assurer qu'elle est non nulle.
Très peu ont pensé à calculer le déterminant de la matrice associée au système, alors que cela permettait de conclure rapidement.
L'attendu du programme sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme de la suite. Néanmoins les étudiants ayant utilisé un résultat de cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux pour obtenir l'existence de A et B ont été valorisés pour peu qu'ils cites les hypothèses (deux racines réelles distinctes). »

⑨ *Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$:*

a) *Rédaction 1 :* puisque $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$, on utilise le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
L'équation caractéristique est $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$ et elle admet deux racines réelles r_1 et r_2.
D'après le cours, nous pouvons assurer que :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } q_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Il reste à montrer que $\alpha = A$ et $\beta = B$.
Il suffit d'évaluer la relation précédente pour obtenir que : $\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 & = q_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = q_2 \end{cases}$.
L'unicité des solutions de ce système, obtenue à la question précédente, permet d'obtenir $\alpha = A$ et $\beta = B$.
Conclusion : $\boxed{q_n = Ar_1^n + Br_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

b) *Rédaction 2 :* Raisonnons donc par récurrence (sur deux rangs) :
— *Initialisation :* Elle a été faite à la question précédente.
— *Hypothèse :* On suppose que $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$ **et** $q_{n+1} = Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}$
— *Hérédité :*

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4} \\ &= \frac{Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}}{2} + \frac{Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}}{2} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= Ar_1^n\left(\frac{r_1}{2} + \frac{1}{4}\right) + Br_2^n\left(\frac{r_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= Ar_1^n \times r_1^2 + Br_2^n \times r_2^2 \text{ car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont racines de } X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} \\ &= Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+2} \end{aligned}$$

— ***Conclusion*** : $\boxed{q_n = Ar_1^n + Br_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question a déstabilisé les candidats.
Le résultat de cours sur la forme d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est généralement bien connu, mais peu ont pensé à vérifier qu'il s'agissait des réels A et B de la question précédente.
L'ordre des quantificateurs n'est pas toujours correct pour donner l'expression du terme général de la suite.
Ceux qui ont cherché à prouver le résultat par récurrence n'ont pas réussi. Il s'agissait d'une récurrence double et il fallait utiliser que r_1 et r_2 étaient racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$* »

⑩ *Donnons un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$:* On a $|r_1| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} < |r_2|$.
On va montrer que $q_n \underset{n\to\infty}{\sim} Br_2^n$:

$$\frac{q_n}{Br_2^n} = \frac{Ar_1^n + Br_2^n}{Br_2^n} = \frac{A}{B}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n + 1 \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

car $|\frac{r_1}{r_2}| < 1$ donc le premier terme tend vers 0. On a donc :

$$q_n \underset{n\to\infty}{\sim} Br_2^n$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0 \text{ puisque } 0 < r_2 < 1}$

Lu dans le rapport de jury : « *Très peu d'équivalents corrects et encore moins de justifications.* »

Problème 2 : Epreuve Agro-véto B 2018

Lu dans le rapport de jury : « *Le sujet abordait de nombreux sujets : équations différentielles, probabilités et statistiques, analyse et informatique. Dans l'ensemble, les résultats ont ét satisfaisants. Les parties* 1 *et* 2 *ont été globalement bien réussies. Notamment, alors que l'an dernier les candidats avaient été nombreux été très nombreux à omettre l'explication de leur code dans la partie informatique, ils ont cette année majoritairement pensé à l'inclure. Les parties 3, 4 et 5, plus difficiles, ont été moins bien réussies. Malgré la longueur du sujet, presque tous les candidats ont abordé les 5 parties, même si la partie 5 a quasiment toujours été survolée.* »

Lu dans le rapport de jury : « ***Difficultés mathématiques notables.***

1. *De nombreux étudiants ont des difficultés à appréhender les équations différentielles. Certains mélangent les constantes et les variables. Souvent, les étudiants se raccrochent à l'interprétation physique du problème pour pallier leur incompréhension des équations différentielles. C'est un piège, puisque le coeur du sujet consistait justement à donner des preuves mathématiques de principes chimiques bien connus.*
2. *L'interprétation du coefficient de corrélation linéaire est souvent incorrecte. De nombreux candidats essayent de relier sa valeur avec le nombre de points par lequel passe la droite de régression linéaire.*
3. *Peu de candidats savent que la droite de régression linéaire passe par le point de coordonnées (moyenne des x, moyenne des y). Très peu sont capables de donner l'équation de la droite, alors même qu'elle était écrite dans le script fourni.*
4. *Il y a beaucoup d'erreurs sur le théorème de la bijection. Les hypothèses ne sont pas, ou mal, vérifiées (en particulier la continuité est souvent oubliée, de même que la stricte monotonie). Les limites de la fonction initiale ne sont pas calculées pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction réciproque. Le tracé du graphe de la réciproque sont souvent incorrect : la fonction est représentée décroissante alors qu'elle devrait être croissante, elle est représentée avec une asymptote alors qu'elle tend vers l'infini, etc.*
5. *De manière générale, peu de soin est accordé aux représentations graphiques, qui devraient pourtant être des questions « cadeaux ».*

»

Lu dans le rapport de jury : « ***Difficultés informatiques notables****.*

1. *De nombreux candidats effectuent des opération entre les données de types différents, comme une liste et un nombre. La surcharge de l'opération + n'y est probablement pas étrangère, mais une réflexion rapide sur le type des objets en jeu dans une expression permettrait souvent d'éviter des erreurs manifestes.*
2. *Souvent, les candidats pensent pouvoir effectuer des opérations sur les listes comme sur des vecteurs (par exemple* `2*L` *pour multiplier une liste par 2).*

»

1.1. Étude du modèle

On considère l'équation suivante, appelée équation de Michaelis-Menten :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

Pour étudier cette équation, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction de Michaelis-Menten, notée f, par :

$$f(x) = \frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

① *Montrons que la fonction f est croissante et déterminer ses limites aux bords du domaine de définition :*
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet K_M est supposé strictement positif). On obtient :

$$f'(s) = \frac{v_{max}(K_M + s) - v_{max}s}{(K_M + s)^2} = \frac{K_M v_{max}}{(K_M + s)^2} > 0, \, \forall s \in \mathbb{R}_+$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$

Quant aux limites aux bornes :

$$\boxed{f(0) = 0} \text{ et } f(s) \underset{s\to\infty}{\sim} \frac{v_{max}s}{s} = v_{max} \text{ donc } \boxed{\underset{s\to+\infty}{lim} f(s) = v_{max}}$$

② *Pour quelle valeur de s a-t-on $f(x) = \dfrac{v_{max}}{2}$?* Il suffit de résoudre l'équation :

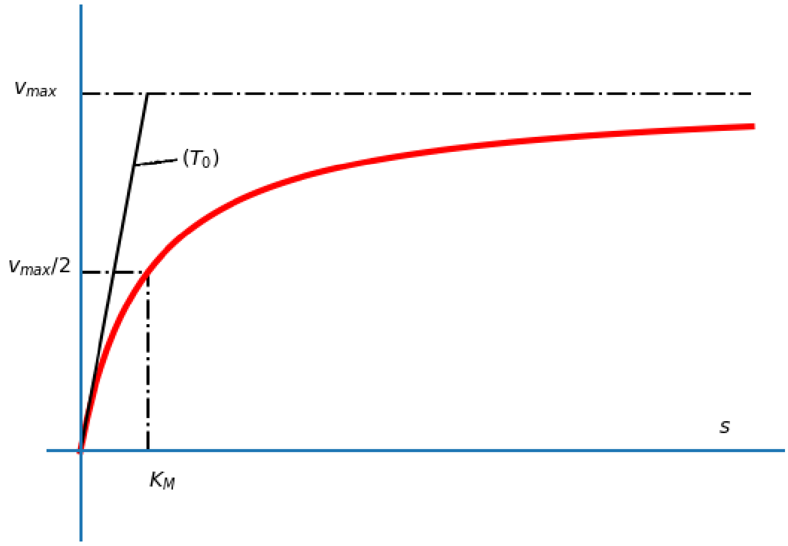
$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \; f(s) = \frac{v_{max}}{2} \Leftrightarrow \frac{v_{max}s}{K_M + s} = \frac{v_{max}}{2} \Leftrightarrow \frac{s}{K_M + s} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow s = \frac{K_M}{2} + \frac{s}{2} \Leftrightarrow s = K_M$$

Conclusion : $\boxed{f(K_M) = \dfrac{v_{max}}{2}}$

③ *Traçons la courbe représentative de f en y faisant figurer des informations pertinentes :*
On choisit de représenter les informations suivantes :

— L'asymptote horizontale d'équation $(y = v_{max})$.
— Le point $\left(K_M, \frac{v_{max}}{2}\right)$.

— La tangente en 0 d'équation $y = f'(0)s + f(0) = \frac{v_{max}}{K_M}s$ qui coupe l'asymptote au point d'abscisse K_M.



1.2. Identification expérimentale des paramètres

Dans la suite, la quantité $\dfrac{dp}{dt}(t)$ est notée $v(t)$. On note par ailleurs v_i la vitesse initiale et on obtient :

$$v_i = \frac{v_{max}s_0}{K_M + s_0}$$

① *Établissons une relation de la forme $v_i^{-1} = \alpha s_0^{-1} + \beta$ où les constantes α et β sont à déterminer :*
En inversant la relation (après avoir noté que v_i n'est jamais nul), on obtient :

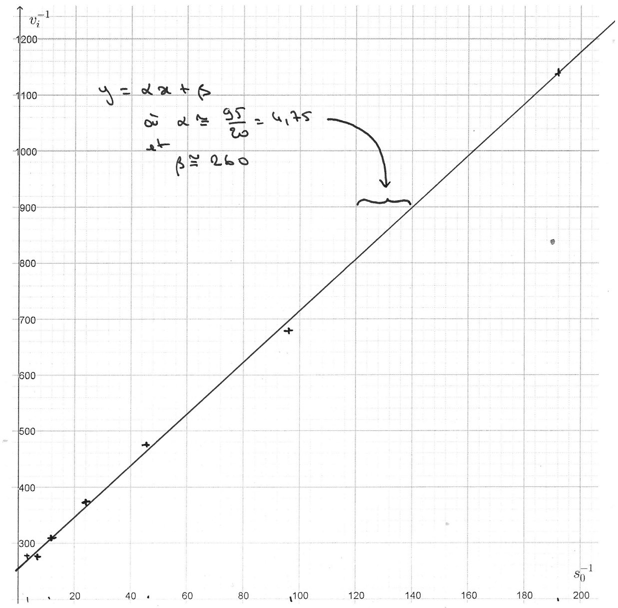
$$\frac{1}{v_i} = \frac{K_M + s_0}{v_{max}s_0} = \frac{K_M}{v_{max}} \cdot \frac{1}{s_0} + \frac{1}{v_{max}}$$

Conclusion : $\boxed{v_i^{-1} = \alpha s_0^{-1} + \beta, \text{ avec } \alpha = \dfrac{K_M}{v_{max}} \text{ et } \beta = \dfrac{1}{v_{max}}}$

② *Expliquons comment on peut déterminer graphiquement les paramètres K_M et v_{max} à partir des données expérimentales :*
On réalise plusieurs expériences permettant de mesurer v_i et s_0.
On place les points (s_0^{-1}, v_i^{-1}) dans le plan. Si le modèle est valide, aux erreurs de mesures près, ces points sont alignés sur une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$. La détermination graphique de α et β permet de déterminer : $v_{max} = \dfrac{1}{\beta}$ et $K_M = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

On se propose d'appliquer l'approche précédente sur des résultats expérimentaux de Michaelis et Menten concernant l'hydrolyse de saccharose sous l'action d'une enzyme, l'invertase. Le tableau suivant donne les vitesses initiales en fonction des concentrations initiales en saccharose pour 7 expérimentations, ainsi que leurs inverses arrondis à l'unité.

③ *Reportons sur le graphique de l'annexe* 1 *les couples* (s_0^{-1}, v_i^{-1}) *:*



④ *Proposons des valeurs approchées de K_M et v_{max} avec une précision en accord avec l'approche utilisée :*
L'impression du papier millimétré n'est pas d'excellente qualité... on estime donc

$$\alpha = 4.75 \text{ et } \beta = 260$$

Dès lors, $\boxed{v_{max} = \dfrac{1}{260} = 3,84 \cdot 10^{-3} mol.L^{-1}.min^{-1}) \text{ et } K_M = \dfrac{4,75}{260} = 0,018 mol.L^{-1}}$

1.3. Étude informatique de données expérimentales

① a) *Écrivons une fonction* ***inv*** *qui prend en entrée une liste de nombres (supposés non nuls)* `L` *et qui renvoie la liste composée des inverses de ces nombres :*
Une écriture possible est :

```
def inv(L):
   return [1/k for k in L]
```

b) *Écrivons une version améliorée* ***inv_ex*** *de la fonction* ***inv*** *qui prend en entrée une liste de nombres* `L`*, puis : si un de ces nombres est nul, alors elle renvoie le booléen* `False`*, sinon elle renvoie la liste composée des inverses de ces nombres.*

```
def inv_ex(L):
    Linv = []
    for k in L:
        if k == 0:
            return False
        else:
            Linv.append(1/k)
    return Linv
```

c) les lignes de codes suivantes effectuent le tracé demandé en question 3 de la partie 1.2 (les points sont représentés par des petits cercles et ne seront pas reliés entre eux) :
On rappelle que les données dont il s'agit de calculer les inverses sont disponibles dans les listes `La` et `Lv`.
Il suffit donc d'écrire :

```
plt.plot(inv(Ls),inv(Lv),"o")
plt.show()
```

② a) On rappelle que, si les éléments de la liste X sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$, alors

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \text{ et } s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{X}^2$$

Enfin

$$s_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \overline{XY}$$

b) On considère les fonctions `Coef` et `Trace` suivantes :

```
def Coef(X,Y):
   a = cov(X,Y)/variance(X)
   b = moyenne(Y)-cov(X,Y)/variance(X)*moyenne(X)
   return([a,b])

def Trace(X,Y):
   [a,b] = Coef(X,Y)
   xmin = min(X) ; xmax = max(X)
   plt.plot(X,Y,"*")
   plt.plot( ------- )
   plt.plot([moyenne(X)],[moyenne(Y)],"s")
   plt.grid()
   plt.show()
```

i. *Complétons la fonction* `Trace` *afin de tracer le segment d'extrémités* `(xmin,a*xmin+b)` *et* `(xmax,a*xmax+b)` *:*
Il suffit de créer la liste des abscisses `[xmin,xmax]` et la liste des ordonnées `[a*xmin+b,a*xmax+b]` et de tracer le segment qui les relie.
Le code attendu pour compléter la fonction `Trace(X,Y)` est donc :

```
plt.plot([xmin,xmax],[a*xmin+b,a*xmax+b])
```

ii. La droite qui passe par ces deux points a pour équation $y = ax + b$ avec, d'après la fonction `Coef()`, $a = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

iii. *Quel nom porte cette droite :* Il s'agit de la droite de régression ou de la droite des moindres carrés.

iv. On exécute la fonction `Trace` pour des listes `X` et `Y` quelconques de taille 5. *Pour chacun des trois tracés suivants, indiquons avec justification s'il peut être ou non le résultat de* `Trace` *?*

La droite de régression passe par le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ qui, sur les graphes proposés, est représenté par une carré. Les figures (b) et (c) sont donc exclues et seule reste plausible le tracé (a).

c) i. *Proposons un code qui calcule les valeurs de K_M et v_{max} en suivant la démarche de la partie 1.2 :*
On récupère les coefficients de la droite de régression grâce à la fonction `coef()` puis on utilise le fait que, d'après 1.2.2) :

$$v_{max} = \frac{1}{b} \text{ et } K_M = \frac{a}{b}$$

Un écriture possible est :

```
def Constantes(X,Y):
    [a,b] = Coef(inv(La),inv(Lb)
    v_max = 1/b
    K_M = v_max*a
    return K_M,v_max
```

ii. Pour ces données, le coefficient de corrélation linéaire vaut 0.9995. *Qu'en déduire ?*
Ce coefficient très proche de 1 pour un nombre de données réduit prouve la relation linéaire qui existe entre s_0^{-1} et v_i^{-1}.

On peut dès lors conclure que $v_i = \dfrac{v_{max} s_0}{K_M + s_0}$

✐ L'utilisation des fonctions Python à partir des données fournies permet d'obtenir : $K_M = 0.0183$ et $v_{max} = 3,95 \cdot 10^{-3}$, valeurs finalement assez proches de celles obtenues graphiquement en 1.2.3)

1.4. Analyse de l'équation de Michaelis-Menten par Schnelle et Mendoza

Les parties précédentes ont permis de déterminer expérimentalement les constantes K_M et v_{max}. Dans cette partie, on s'intéresse à la dépendance de s par rapport au temps, sous l'hypothèse de l'Approximation des Etats Quasi Stationnaires (AEQS) selon laquelle la variation de la concentration en complexe « enzyme-substrat » est nulle (car il est consommé par la réaction juste après sa création), à l'exception d'une très courte phase initiale de durée $\delta > 0$. On considère que la concentration en S ne varie pas au cours de cette phase initiale.

Sous cette hypothèse, pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, on a $\dfrac{ds}{dt}(t) = -\dfrac{dp}{dt}(t) = -\dfrac{v_{max}s(t)}{K_M + s(t)}$.
On s'intéresse désormais à l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

avec pour condition initiale $s(\delta) = s_0$.

① **Méthode d'Euler :**

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x$.

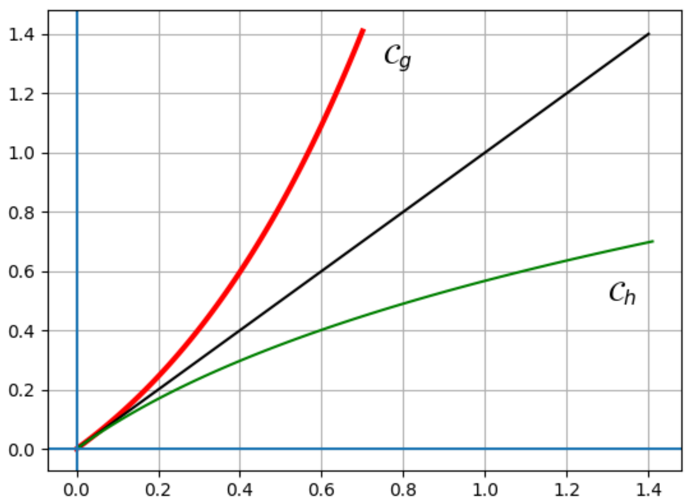
a) *Démontrons que g est strictement croissante :*
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Dès lors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

b) *Déduisons-en que la fonction h, réciproque de g, est bien définie et donnons son domaine de définition :*
g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
Elle admet donc une application réciproque, $\boxed{h \text{, bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

c) *Traçons la courbe représentative de la fonction h en expliquant la méthode graphique utilisée :*
On utilise le fait que la courbe représentant h est symétrique de celle de g par rapport à la première bissectrice d'équation $(y = x)$.
Si on note que $g'(0) = 1$, on obtient que $y = x$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$ en $(0, 0)$.
Par ailleurs, $g(x) - x = xe^x - x = x(e^x - 1) > 0$, $\forall x > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0.



③ On définit $y(t) = g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)$. *Écrivons une équation différentielle du premier ordre satisfaite par la fonction y et donnons la condition initiale correspondante :*

On applique les règles de dérivation et on obtient :

$$\begin{aligned} y'(t) &= g'\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)\frac{s'(t)}{K_M} \\ &= e^{\frac{s(t)}{K_M}}\left(\frac{s(t)}{K_M}+1\right)\frac{1}{K_M}\frac{-v_{max}s(t)}{K_M+s(t)} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}}\frac{s(t)+K_M}{K_M}\frac{s(t)}{K_M+s(t)} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}}\frac{s(t)}{K_M} = a\frac{s(t)}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}} = ay(t) \text{ où } a = -\frac{v_{max}}{K_M} \end{aligned}$$

La condition initiale est $y(\delta) = g\left(\frac{s(\delta)}{K_M}\right) = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ y'(t) = ay(t) \text{ avec } a = -\frac{v_{max}}{K_M} \text{ et } y(\delta) = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)}$

④ *Déduisons des questions précédentes une expression de $y(t)$ puis de $s(t)$ en fonction de t, K_M, v_{max} et s_0 (et faisant appel à la fonction h) :*

Nous savons que les solutions des équations différentielles de la forme $y'(t) = ay(t)$ sont de la forme

$$y(t) = \lambda e^{at} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dès lors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}/y(t) = \lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}t}$$

Par ailleurs,

$$y(\delta) = \lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}\delta} = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)$$

D'où

$$\lambda = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)e^{\frac{v_{max}}{K_M}\delta} = \frac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0+v_{max}}{K_M}\delta}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ y(t) = \frac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0}{K_M}-\frac{v_{max}}{K_M}(t-\delta)}}$

Par ailleurs, $y(t) = g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)$ donc $\frac{s(t)}{K_M} = h(y(t))$ puisqu'on rappelle que h est la fonction réciproque de g...

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ s(t) = K_M \cdot h\left(\frac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0}{K_M}}e^{-\frac{v_{max}}{K_M}(t-\delta)}\right)}$

⑤ *Proposons une méthode numérique permettant d'approcher les valeurs de la fonction h :*
Le problème est, effectivement, que nous connaissons $g : x \longmapsto xe^x$ mais que nous ne savons pas exprimer sa réciproque h... Il s'agit donc de trouver une méthode numérique permettant d'approcher la solution de l'équation :

$$g(x) = xe^x = y \Leftrightarrow xe^x - y = 0$$

On rappelle que g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et que c'est donc le cas également de h.
On note que $g(0) = 0 < y$ donc $h(0) = 0 < h(y)$.
De même $g(y) = ye^y > y$ et donc $y > h(y)$.

En conséquence, la fonction $x \longmapsto g(x) - y$ s'annule sur $[0, y]$ et, cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la méthode de dichotomie ou la méthode de Newton pour déterminer où elle s'annule.
✐ Dans la pratique, c'est assez compliqué car les valeurs de y sont grandes et le calcul de `np.exp(y)` pose problème. Il faut en fait trouver le moyen de réduire l'intervalle de départ, ce qui est largement possible au regard de la croissance rapide de g...

Problème 3 : Epreuve Agro-véto A 2023

Ce sujet s'intéresse au phénomène de sélection en biologie. La première partie consiste à démontrer des résultats qui seront utilisés dans la suite du sujet. La partie II est consacrée à l'étude probabiliste du devenir d'une stratégie évolutive en temps discret.

Dans tout le sujet, λ est un **réel strictement positif** et, pour tout réel x, on note :

$$\boxed{S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'set ps difficile d'acquérir en s'entraînant.*
Il faut faire attention aux objets manipulés. La phrase « $f(t)$ est continue » n'a pas de sens ; tout comme « Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ » ; On n'écrit pas $g(x)'$ mais $g'(x)$.
Lors de l'utilisation d'un théorème ou d'un résultat démontré dans une question précédente, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. Il est tout à fait possible d'utiliser un résultat d'une question précédente même si l'on n'a pas réussi à la traiter, mais il est souhaitable de préciser de façon explicite à quelle question on fait référence. Évidemment, il convient de mettre des majuscules aux noms propres.
On ne peut que conseiller aux candidats de bien lire les questions et de prendre le temps de justifier et rédiger les questions traitées plutôt que de se lancer dans un grappillage très rarement fructueux.
Le jury note cette année une chute du niveau et un écart qui se creuse entre le niveau des candidats et celui attendu. Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité de l'épreuve (qui est longue pour couvrir une large partie du programme) »

Partie I. Quelques résultats utiles

.

1. *Justifions l'existence de $S(x)$ pour tout réel x et en donner une expression simple :*
   Par linéarité, il suffit de montrer la convergence de la série $\sum \frac{(\lambda x)^k}{k!}$, qui est une série exponentielle convergente.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $S(x)$ est bien définie, et $\boxed{S(x) = e^{\lambda x - \lambda}}$

   Lu dans le rapport de jury : *« La plupart des candidats font le lien avec l'expression qui suit mais la justification est souvent fausse. Il ne suffit pas de justifier que le terme général est bien défini pour justifier la convergence. Il s'agit de la première question, il est donc souhaitable de préciser qu'il s'agit d'une série exponentielle. Attention également à la maîtrise des propriétés de l'exponentielle. »*

   Étude du nombre de points fixes d'une fonction
   On rappelle que λ est un réel strictement positif ; on considère la fonction d'une variable réelle $f : x \longmapsto e^{\lambda(x-1)}$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

2. *Déterminons le signe sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $g : x \longmapsto xe^{-x} - 1$:* La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geqslant 0$,
$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$
   Ainsi, la fonction g est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.
   Elle atteint donc un maximum en 1, qui vaut $e^{-1} - 1 < 0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement négative sur } \mathbb{R}_+.}$

   Lu dans le rapport de jury : *« Les variations de g sont souvent obtenues. Il n'était pas nécessaire de déterminer $g(0)$ ni $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. A peine la moitié des copies obtiennent tous les points à cette question ? »*

3. *Montrons que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$:*
   Supposons donc $\lambda \leqslant 1$.
   La fonction ϕ est dérivable deux fois sur $[0, 1]$, de dérivées
$$\forall x \in [0, 1],\ \phi'(x) = \lambda f(x) - 1, \text{et} \phi''(x) = \lambda^2 f(x).$$
   Ainsi, comme ϕ'' est strictement positive, la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0, 1]$.
   Or $\phi'(1) = \lambda - 1 \leqslant 0$, donc la fonction ϕ' est strictement négative sur $[0, 1[$.
   Par suite, la fonction ϕ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
   On a donc $\phi(1) = 0$, et donc $\forall x < 1,\ \phi(x) > 0$. On peut donc dire, par application du théorème de la bijection :

   Conclusion : $\boxed{1 \text{ est donc bien l'unique solution de } f(x) = x}$

   Lu dans le rapport de jury : *« On pouvait utiliser le théorème de la bijection ou le corollaire des valeurs intermédiaires. Dans les deux cas, il faut en vérifier les hypothèses. La justification de la stricte monotonie n'est quasiment jamais correcte (en l'occurrence dérivée négative ne s'annulant qu'en au plus un point). »*

4. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ a exactement deux solutions sur $[0, 1]$.
   De même que précédemment, la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0, 1]$. On a de plus $\phi'(1) = \lambda - 1 > 0$ et $\phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 < 0$ par la question 2.

   La fonction ϕ' étant continue, par le théorème de la bijection, elle s'annule donc exactement une fois sur $[0, 1]$, en α.

   La fonction ϕ est donc strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$.

   On a toujours $\phi(1) = 0$, et donc nécessairement, $\phi(\alpha) < 0$. Comme $\phi(0) > 0$, par continuité de ϕ et théorème de la bijection, on a bien un unique zéro x_λ de ϕ entre 0 et α.

   Finalement, on a bien exactement deux solutions pour l'équation $f(x) = x$: $\boxed{x_\lambda \text{ et } 1}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Cette question nécessitait de la rigueur. Notamment, justifier que ϕ s'annule sur $[0, \alpha]$ et sur $[\alpha, 1]$ ne prouve pas l'existence de deux zéros ; Il faut prouver que $\phi(0) \neq 0$. Certaines copies cherchent l'expression du réel α mais ne vérifient pas qu'il appartient à $[0, 1]$* »

Autour d'une loi de probabilité appelée « loi de Poisson »

5. *Vérifions qu'on a bien défini une loi de probabilité, autrement dit que*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \geq 0,\ \sum_{i\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \text{ converge de somme égale à } 1$$

Puisque les λ sont des réels strictement positifs, il va de soit que $e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \geq 0$.
Par ailleurs, on vient de voir en 1. que

$$\sum_{i\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \text{ converge de somme égale à } S(1) = e^{\lambda-\lambda} = e^0 = 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{Il s'agit bien d'une loi de probabilité. } T \text{ suit une loi de Poisson}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question de cours réussi à* 80% »

6. *Démontrons que* $\mathbb{E}(T)$ *existe et vaut* λ *:*
On étudie $\sum k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$
Par linéarité, il suffit de montrer la convergence de

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \sum_{i\geq 0}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

cette dernière série converge et sa somme vaut $S(1) = 1$
On en déduit la convergence (absolue) de $\sum k\mathbb{P}(X=k)$, ce qui assure l'existence de $\mathbb{E}(T)$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(T) \text{ existe et } \mathbb{E}(T) = \lambda S(1) = \lambda}$

On suppose désormais que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** telle que, pour tout entier n, T_n suive une loi de Poisson de paramètre t_n.

7. On cherche à déterminer la loi de $T_1 + T_2$.
   a) *Déterminons* $(T_1+T_2)(\Omega)$ *:* L'univers image de T_1+T_2 est $\mathbb{N}$ puisque T_1 et T_2 prennent leur valeur dans $\mathbb{N}$.
   b) On considère le système complet d'événement $\{(T_1 = i), i \in \mathbb{N}\}$ et on utilise la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_1+T_2=k) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}((T_1+T_2=k)\cap(T_1=i)) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}((T_2=k-i)\cap(T_1=i))$$

   et les variables T_1 et T_2 étant indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(T_1+T_2=k) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_2=k-i)\mathbb{P}(T_1=i)$$

On note que l'événement $(T_2 = k - i)$ est impossible si $k - i < 0 \Leftrightarrow i > k$. D'où :

$$\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(T_2 = k - i)\mathbb{P}(T_1 = i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 = k - i)\mathbb{P}(T_1 = i)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(T_2 = k - i)\mathbb{P}(T_1 = i)}$

c) En déduire, en faisant apparaître un binôme de Newton, que T_1+T_2 suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(T_1 = i)\mathbb{P}(T_2 = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-t_1 - t_2} \frac{t_1^i}{i!} \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(t_1+t_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} t_1^i t_2^{k-i} \\
&= e^{-(t_1+t_2)} \frac{(t_1 + t_2)^k}{k!} \quad \text{par binôme de Newton}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T_1 + T_2 \text{ qui suit une loi de Poisson de paramètre } t_1 + t_2}$

Lu dans le rapport de jury : « *Il s'agit d'une question rarement bien traitée. Il faut préciser le système complet d'événement utilisé, utiliser l'indépendance, expliquer le passage à une somme finie, puis utiliser le binôme de Newton. Il n'est pas bien vu de forcer les choses afin d'obtenir le résultat attendu.* »

8. On raisonne par récurrence et on nomme $P(n)$: « La variable $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k$ ».
— La propriété $P(1)$ est triviale.
— Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$.
On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} T_k = \sum_{k=1}^{n} T_k + T_{n+1}$.
Par $P(n)$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)$, et est indépendante de T_{n+1} car les variables aléatoires $T_1, \cdots, T_n, T_{n+1}$ étant indépendantes, la somme des n premières est indépendante de la $(n+1)$-ième (lemme de coalition).
Ainsi, par la question précédente, on a bien $P(n+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Par récurrence, on a donc bien le résultat voulu.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Il s'agissait de tester la capacité des candidats à rédiger une récurrence. Ce n'est pas une compétence acquise : on note par exemple des incohérences* *entre l'initialisation et l'hérédité (il s'agissait d'une récurrence sur $\mathbb{N}^*$). Beaucoup de candidats refont les calculs précédents dans l'hérédité plutôt que d'utiliser la question précédente en vérifiant évidemment les hypothèses. L'indépendance est indispensable ici ; elle est malheureusement peu citée et encore moins justifiée en utilisant le lemme de coalition. »*

Résultats sur les équations différentielles »

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : y'(t) = a(t)y(t)$$

9. La fonction a est continue sur I donc admet une primitive A.
   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } t \longmapsto Ke^{A(t)}, K \in \mathbb{R}}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Plus de la moitié des candidats donnent un résultat faux. Le signe dans l'exponentielle est inversé ; il y a aussi des confusions entre le résultat lorsque a est constante, d'où des résultats comme $t \longmapsto Ce^{A(t)t}$. A noter que certaines copies donnent un résultat correct en notant A une primitive de ... « -a ».*
   Peu de copies justifie l'existence d'une primitive de a.
   Enfin, il est difficile d'avoir une phrase correcte grammaticalement et mathématiquement. On demandait un ensemble de solutions, ce qui a posé problème notamment dans la gestion des quantificateurs. Il y a une différence entre « les solutions sont de la forme ... » et « les solutions sont les fonctions de la forme... » »

10. Soit f une solution de (E_1) qui s'annule sur I. Comme $e^{-A(t)}$ est toujours strictement positive, on a donc $K = 0$, et
    Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est nulle sur } I.}$

    Lu dans le rapport de jury : « *Ce raisonnement simple sur la constante est trop rarement réussi. Certains candidats ne comprennent pas, s'agissant d'une fonction, la différence entre « s'annuler » et « être nulle » »*

Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C une constante réelle et g **une** solution sur un intervalle I de l'équation différentielle : $(E_2) : y'(t) = b[y(t)](y(t) - C)$

11. La fonction $g - C$ est dérivable sur I, et pour tout $t \in I$:

    $$(g - C)'(t) = g'(t) = b(g(t))(g(t) - C).$$

    Conclusion : $\boxed{g - C \text{ est bien solution de } (E_3)}$

    Lu dans le rapport de jury : « *Une question assez facile car il suffisait de constater que $(g - C)' = g'$. Les candidats ont du mal à bien rédiger un raisonnement direct ou une équivalence. A noter que certains ont cru (à tord) qu'il fallait utiliser la fonction g de la question 2. »*

12. Supposons qu'il existe t_0 tel que $g(t_0) = C$.
    Alors $(g - C)(t_0) = 0$, et par la question 10, $g - C$ est la fonction nulle :
    Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est donc constante égale à } C}$

Lu dans le rapport de jury : *« Trop nombreuses sont les copies qui affirment que la nullité de $g'(t_0)$ implique que g est constante. »*

Partie II. Probabilité d'extinction d'une stratégie

13. *Exprimons p_0, p_1 et p_2 en fonction de λ :*
Z_0 étant constante égale à 1, on a donc $\boxed{p_0 = 0}$.

On a $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $\boxed{p_1 = e^{-\lambda}}$.

L'ensemble $\{[Z_1 = n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, donc par formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{Z_1} X_{1,k} = 0\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{1,k} = 0\right) \mathbb{P}(Z_1 = n) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{par la question 8} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}} \quad \text{par série exponentielle} \end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Le calcul de p_0 et p_1 est réussi par la majorité. Néanmoins on attend des candidats qu'ils terminent leurs calculs : on voit des conclusions du type $0 \times \lambda$ ou $\dfrac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$. Le calcul de p_2 nécessitait plus d'autonomie ; le résultat ne peut aps dépendre de z_1, paramètre non défini. Là encore, lors de l'utilisation de la formule des probabilités totales, il faut préciser le système complet d'événements utilisé. »*

14. *Montrons que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déduisons-en qu'elle converge :*
On a clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[Z_n = 0] \subseteq [Z_{n+1} = 0]$, et donc par croissance de la probabilité, $p_n \leqslant p_{n+1}$.

Ainsi, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1, par théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ converge}}$.

Lu dans le rapport de jury : *« Une large majorité pensent au théorème de la limite monotone et justifient que la suite est bornée. Très peu voient que la monotonie est reliée à une inclusion d'événements. »*

Pour tout couple d'entiers naturels (k, n), on admet que, sachant que $(Z_1 = k)$ est réalisé, Z_{n+1} est la somme de k variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que Z_n. Ainsi, $\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) = p_n^k$.

15. *Déduisons-en que, pour tout entier n, on a $p_{n+1} = S(p_n)$:* La famille $\{[Z_1 = k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ est

un système complet d'événements, et donc par formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1}=0)\mathbb{P}(Z_1=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_n^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= S(p_n) \end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : « *L'utilisation de la formule des probabilités totales a été trop peu identifiée et encore moins justifiée.* »

16. Notons ℓ la limite de (p_n).
    Par la question précédente et continuité de S, on a donc $\ell = S(\ell)$.
    — si $\lambda \leqslant 1$, on a vu en question 3 que l'unique point fixe de S était 1, et donc $\ell = 1$.
    — si $\lambda > 1$, par la question 4, on a donc $\ell = x_\lambda$ ou $\ell = 1$.
    On note que $p_0 \leqslant x_\lambda$; par croissance de la fonction S, on a donc $p_1 \leqslant S(x_\lambda) = x_\lambda$.
    Une rapide récurrence permet alors de montrer que pour tout entier n, $p_n \leqslant x_\lambda$, ce qui exclut le cas $\ell = 1$.
    On a donc dans ce cas $\lim p_n = x_\lambda$.

    Lu dans le rapport de jury : « *La continuité de S est trop peu évoquée. Une fois encore, il faut vérifier les hypothèses des résultats de cours utilisés. On voit des raisonnements qui n'ont pas de sens comme $p_{n+1} \lim_{n\to\infty} p_n$ ou $p_{n+1} \underset{n\to p_n}{\sim}$ ou, à partir d'un certain rang $p_{n+1} = p_n$ donc $S(p_n) = p_n$.* »

17. Ainsi, si $\lambda \leqslant 1$, la population s'éteindra presque sûrement.
    Si $\lambda > 1$, elle s'éteindra avec probabilité x_λ, et donc pourra avec une probabilité non nulle se développer indéfiniment.

    Lu dans le rapport de jury : « *De très très rares candidats ont vu que λ représentait le nombre moyen d'enfants de chaque individu suivant la nouvelle stratégie. Il était donc cohérent de constater que si $\lambda < 1$, la probabilité que la population s'éteigne à la génération n tend vers 1* »