Devoir maison : Analyse et probabilités

Problème :

Partie I :

Pour tout p réel dans l'intervalle $]0,1[$, on considère la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_{n+1} = 1 - p + pv_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } v_0 \in]0,1[$$

① Écrire une fonction Python `calculV(p, n)` d'arguments un réel $p \in]0,1[$ et un entier n, qui demande à l'utilisateur de rentrer le premier terme v_0 de la suite et retourne la valeur de v_n.

② Soit $f : x \longmapsto 1 - p + px^2$ telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Montrer que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$ avec éventuellement $1 = \dfrac{1-p}{p}$ pour une valeur de p qu'on précisera.

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $v_n \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (on écrira complètement la récurrence).

③ On suppose que $p \leq 1/2$. Montrer que $\dfrac{1-p}{p} \geq 1$ et donner le graphe de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé bien choisi. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et convergente vers une limite qu'on déterminera.

④ On s'intéresse au cas $p > 1/2$. Tracer le graphe de f après avoir comparé $\dfrac{1-p}{p}$ à 1.
Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) en précisant pourquoi il est nécessaire de distinguer les cas $0 < v_0 < \dfrac{1-p}{p}$ et $\dfrac{1-p}{p} < v_0 < 1$.

Partie II : Application

On considère une population de bactéries pour laquelle une bactérie a une probabilité p de donner 2 cellules filles avant de mourir, et une probabilité $q = 1 - p$ de mourir sans se reproduire.
Toutes les bactéries suivent la même loi et leurs reproductions sont considérées comme indépendantes les unes des autres.

Soit X_n la taille de la population a la n-ième génération. On suppose qu'il n'y a qu'une bactérie au début de l'expérience et donc que X_0 vaut 1 de façon certaine.

① Première génération :

a) Justifier que $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ et déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in X_1(\Omega)$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
✐ On rappelle que, par définition, pour une variable aléatoire X discrète finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k)\,;\ \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X=k) \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

② On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter u_n. Expliciter u_0 et u_1.

③ On souhaite écrire une fonction Python `simulPopulation(p, n)` permettant de simuler l'évolution de cette population au cours de n générations, p et n étant fournis en paramètres d'entrée.
Le corps de cette fonction est le suivant :

```
1   def simulPopulation(p,n):
2       nB = 1
3       P = [0]*(n+1)
4       P[0] = nB
5       for k in range(...):
6           if nB > 0:
7               for i in range(nB):
8                   if ...: # la bactérie se dédouble
9                       nB += ...
10                  else:
11                      nB -= ...
12              P[k]=nB
13      return P
```

a) Commenter les lignes 2 à 4.

b) Justifier la structure conditionnelle en ligne 6. Pourquoi l'absence d'un `else` ?

c) Compléter les lignes 5, 8, 9 et 11 en le justifiant.
✐ On pourra faire appel à la fonction `random()` de la bibliothèque `random` dont on rappelle qu'elle retourne un nombre réel pris au hasard entre 0 et 1 selon une loi uniforme.

④ Justifier que que : $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1}=0) = \mathbb{P}(X_n=0)^2$.

⑤ A l'aide du système complet d'événements $\{(X_1=0),(X_1=2)\}$ établir grâce à la formule des probabilités totales que

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2 = f(u_n)$$

⑥ On se place dans le cas $p \leq 1/2$.

a) Justifier pourquoi on peut être certain que la population de bactéries va s'éteindre.

b) En vous inspirant de la fonction `simulPopulation()`, écrire une fonction `tempsJusquAExtinction(p)` qui retourne le nombre de générations nécessaire pour que la population s'éteigne.

c) Écrire une fonction `ListeTpsExtinction(p,m)` qui répète un nombre m de fois (supposé grand) la fonction précédente et retourne une liste `L` formée des temps nécessaires à l'extinction de la population pour chacune de m répétition.

d) En exécutant `L.count(1)/m` on obtient successivement pour $p = 0.4$ et $m = 1000$ les valeurs 0.592 et 0.604. Cela vous semble-t-il cohérent ?

e) Comment feriez-vous, connaissant L, pour estimer la valeur de u_2 ?

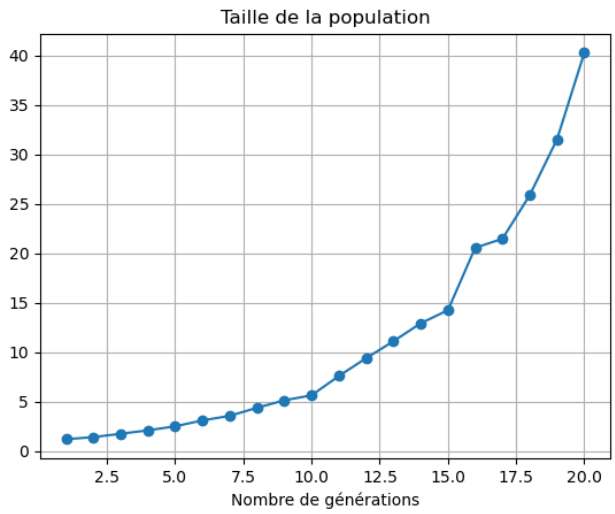
f) Écrire, sans recours à la bibliothèque `numpy` une fonction `moyenne(L)` et `ecartType(L)` retournant respectivement la moyenne et l'écart-type d'une liste `L`.
Lequel de ces deux résultats vous semble le plus probable lorsque $p = 0.4$? $moy1 = 2.35$ et $s1 = 2.67$ ou $moy2 = 14.25$ et $s2 = 3.24$? Justifier votre choix.

Partie III : Le cas particulier $p > 1/2$

Nous nous plaçons désormais exclusivement dans le cas $p > 1/2$. Sous cette condition, on peut imaginer que la population peut converger vers un état stable ou bien tendre vers l'infini. Les questions suivantes ont pour objectif d'exclure l'un de ces deux cas.
Nous introduisons pour ça la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)t^k \text{ (avec } 0^0 = 1 \text{ par convention)}$$

① Écrire une fonction python `tailleMoyenne(n, p, m)` permettant de calculer en fonction de p le nombre moyen d'individu à la génération n lors de la répétition un nombre m de fois (supposé grand) du processus de reproduction à partie d'une bactérie.
Ecrire une fonction permettant de représenter graphiquement l'évolution de cette taille moyenne pour n allant de 1 à 20, p étant fixé. Ci dessous, un graphe représentant l'évolution des tailles moyennes de population quand $p = 0.6$. Construire un graphe équivalent pour $p = 0.55$ et $p = 0.7$. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?



② a) Montrer que $g_{X_1} = f$. Que vaut $g'_{X_1}(1)$?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires et peut s'exprimer sous la forme : $X_n(\Omega) = \{2j, j \in [\![0, 2^{n-1}]\!]\}$.

c) Donner la valeur de $g_{X_n}(1)$. Justifier la dérivabilité de g_{X_n} et le fait que $g'_{X_n}(1) = \mathbb{E}(X_n)$.

d) Montrer que $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) = 0$ si j impair ou k impair et que, sinon :

$$\mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k) = \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 2j$$

e) En déduire que $g_{X_{n+1}}(t) = g_{X_n}(g_{X_1}(t))$ (✐ Ce résultat pourra être admis).

f) Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_1)$.

g) Conclure sur l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En quoi avons-nous désormais une idée du comportement de la population bactérienne dans les cas où elle ne s'éteint pas ?

③ On reprend les notations de la question II.2 en notant $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et on rappelle que :

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2,\ \forall n \geq 1$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

b) On note pour tout n entier naturel, D_n l'événement : « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ».
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(D_n) = u_n - u_{n-1}$.

c) Soit R l'événement : « la population de bactéries finit par s'éteindre ».
Justifier le fait que $R = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} D_n$.
Déterminer alors la probabilité que la population de bactérie s'éteigne.