Devoir maison : Équations différentielles et « pêche responsable »

Problème :

On cherche à analyser mathématiquement et interpréter certains modèles de dynamique des populations, au delà des seuls modèles discrets étudiés en début d'année en informatique.
On notera $N(t)$ le nombre d'individus d'une espèce donnée présents à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$. La répartition spatiale des individus ne sera pas prise en compte ici. Les modèles considérés seront donc des équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} N'(t) &= F(N(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) &= N_0 \end{cases}$$

où $N_0 \geq 0$ représente le nombre d'individus à l'instant initial et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ devra contenir certaines caractéristiques biologiques naturelles pour une population.

Pour fixer les idées, nous considérerons par la suite qu'il s'agit d'une population de poissons dont $N(t)$ désigne la quantité évaluée en tonnes à l'instant t donné en années.
F étant connue, l'objectif est d'étudier le comportement sur le temps long de la fonction N.

I/ Modèle malthusien

Nous supposons dans un premier temps que la population de poissons croit de façon proportionnelle à la population existante en l'absence de pression du milieu (démographique, trophique, de compétition, de prédation...) selon un taux r de croissance *per capita* qui ne dépend que du taux de fécondité et du taux de mortalité, indépendant de l'effectif.
Le modèle associé devient :

$$\begin{cases} N'(t) &= r \cdot N(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) &= N_0 \end{cases}$$

① Quelle est l'unité de r ?

② Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 et de t.
Si $r \in \mathbb{R}_+^*$, que peut-on dire de la limite en l'infini de $N(t)$?

③ Écrire une fonction `evolPopulation1(r, n, N0, h)` qui permet, à l'aide de la méthode d'Euler explicite ($h = 0.01$), de simuler sur $n = 14$ années l'évolution de la population lorsque $r = 1/2$ et $N_0 = 2.10^5 T$.

On retiendra que ce modèle présente un ajustement satisfaisant avec les croissances de populations dont les effectifs sont faibles. Il illustre l'aptitude à proliférer, comportement biologique présent par exemple chez les espèces *pionnières*, dans le cadre d'invasions biologiques liées à la conquête d'un territoire.
On signale par ailleurs que, d'un point de vue historique, il tient une grande place dans l'introduction par Darwin de la notion de sélection naturelle.

II/ Modèle logistique ou modèle de « Verhulst »

Le modèle exponentiel n'est pas satisfaisant puisque l'effectif de la population ne dépend en rien des ressources disponibles et plus généralement de la capacité d'accueil du milieu. L'idée est de faire dépendre le taux de croissance *per capita* de la population de l'effectif même de cette population. Si cette population est de faible effectif, alors elle adopte un comportement malthusien et le taux d'accroissement *per capita* est maximum tandis que, lorsque l'effectif augmente et ce rapproche de la capacité de charge de l'environnement, ce taux tend vers 0.
L'idée la plus simple est, comme dans le modèle discret, d'imaginer une dépendance linéaire entre le taux de croissance *per capita* et l'effectif de la population, lui affectant la valeur 0 lorsque N atteint le potentiel d'accueil du milieu.

Soit K, r et N_0 trois réels strictement positifs. On considère maintenant le modèle suivant :

$$\begin{cases} N'(t) & = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) & = N_0 \end{cases}$$

① On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, $y(0) = y_0$. Identifier la fonction F dans ce cas.
On définit la fonction ρ par $\rho(N) = r(1 - \dfrac{N}{K})$ dans laquelle le terme $1 - \dfrac{N}{K}$ est classiquement interprété comme **la part de la capacité biotique encore disponible**. Préciser le signe de $\rho(N)$ en fonction des valeurs de N.

② La constante K est appelée « capacité de charge » ou « potentiel d'accueil ». Commenter cette appellation et donner son unité.

③ Reprendre la fonction Python `evolPopulation1()` pour simuler grâce à la méthode d'Euler explicite ($h = 0.1$) quatorze années d'évolution de la population de poissons pour laquelle $r = 0.5an^{-1}$, $N_0 = 2.10^5 T$ et $K = 2.10^6 T$.
Donner la représentation graphique de l'évolution de population dans ce cas précis puis vers varier la taille de la population initiale en prenant successivement $N_0 = K$, $N_0 > K$, $N_0 < K/2$ et $k/2 < N_0 < K$. Tracer sur un même graphe l'évolution pour chacun de ces cas et justifiez les résultats obtenus.

④ Montrer que 0 et K (en tant que fonctions constantes) sont les états **stationnaires** (ou encore **solutions constantes**) du modèle. Les commenter.

⑤ Résolution analytique de l'équation logistique :

a) Sachant que $N_0 > 0$ (sans quoi il n'y a pas de population à étudier...), justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall t \in [0, a],\ N(t) > 0$$

b) Montrer que la fonction y définie sur $[0, a]$ par $y(t) = 1/N(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre qu'on résoudra.

c) En déduire que la solution du modèle de Verhulst peut s'écrire :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}$$

d) Tracer son graphe sur la même figure que la simulation Python et valider la méthode d'Euler dans ce cas.

⑥ **Ajustement du modèle de Verhulst.** Considérons l'évolution du nombre des éléphants africains dans le parc Kruger, ouvert en 1903 à la frontière entre l'Afrique du Sud et le Mozambique pour sauver de la disparition cet espèce (*loxodonta africana*) qui ne compte alors plus que quelques représentants. En 1905, 10 éléphants sont repérés et, suite à des mesures de protections strictes, on a recensé au fil des années les effectifs suivants :

années	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
effectif	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310

a) Donner une représentation graphique de ces effectifs et proposez une valeur de K.

b) On considère la fonction auxiliaire h définie par : $h(t) = \ln \dfrac{N(t)}{K - N(t)}$.
Montrer qu'elle permet de réécrire la solution du système logistique sous la forme

$$h(t) = r(t - t^*) \text{ où } N(t^*) = K/2$$

c) En déduire un moyen statistique pour estimer r et confrontez votre réponse aux effectifs observés.

III/ Prélèvements constants

Nous cherchons désormais à décrire l'impact de la pêche sur notre population de poissons. On imagine un modèle pour lequel le taux de prélèvement $P \in \mathbb{R}_+$ est constant au cours des années et ne dépend pas de l'état de la population.
Le modèle devient le suivant :

$$\begin{cases} N'(t) & = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right) - P, \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) & = N_0 \end{cases}$$

en supposant que f reste nulle dès qu'elle devient nulle pour la première fois.

① On suppose à nouveau que le taux de croissance maximum vaut $r = 0.5/an$, que la capacité d'accueil vaut $K = 2.10^6 T$ et on pose $P = 2.10^5 T/An$ le taux de prélèvement dû à la pêche.
Compléter la fonction Python `verhulstAvecPrelevements()` ci-dessous et donner l'évolution de la population sur trente années en fonction de différentes populations initiales prises dans $\{1e6, 0.5e6, 0.56e6, 1.56e6\}$.

```python
r = 0.5 # 1 / an
K = 2e6 # tonnes
P = 2e5 # Prélèvement dû à la pèche en tonnes / an
tps_final = 30 # années
h = 0.1 # années

f = lambda x:\# A compléter

def verhulstAvecPrelevement(N0,h,tps_final):
    nbe_pas = int(tps_final / h)
    poisson = np.zeros(nbe_pas + 1) # tonnes
    poisson[0] = N0
    for pas in range(nbe_pas):
        Stock=poisson[pas]+h*f(poisson[pas])
        if Stock>0:
            poisson[pas+1]=\# ...
        else:
            poisson[pas+1]=\#...
    return poisson
```

```python
def graphes():
    temps = h*np.arange(nbe_pas+1)
    for N0 in [1.56e6,1e6,0.56e6,0.55e6,0.5e6]:
        poisson = croissance_logistique(N0)
        plt.plot(temps,poisson,label='N0 = '+str(int(N0)))
    plt.title("Evolution de la population en fonction de N0 ($P=2.10^5T$)")
    plt.grid(True)
    plt.legend(loc = 'best')
    plt.xlabel('Temps en année')
    plt.ylabel('Quantité de poissons en tonnes')
    plt.show()

graphes()
```

② Déterminer les états stationnaires de ce modèle. On pourra les visualiser en traçant simultanément grâce à *Geogebra* l'allure de la fonction f définie par $f(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$ et la fonction constante $y = P$ mais aussi utiliser les fonctions `np.poly1d()` et la méthode `r` qui permet d'obtenir les racines d'un polynôme. Interpréter les résultats obtenus.

③ **Définition** : On dit qu'un état stationnaire N_∞ est **stable** lorsque toute solution ayant pour condition initiale un N_0 proche de N_∞ tend vers N_∞ lorsque t tend vers l'infini. Un état stationnaire qui n'est pas stable au sens de cette définition est dit **instable**.
Dire, à l'aide du graphe précédent, quels sont les états qui sont stables parmi les états stationnaires obtenus précédemment et justifier les comportements observés à la question 1.

④ Justifier pourquoi on parle pour $P = 2e5T/an$ de *Prélèvement Maximum Supportable*.

IV/ Les modèles proies, prédateurs et l'impact de la pêche

On s'intéresse désormais à l'influence de la présence d'un prédateur sur une population de proies et, en retour, on imagine que la réduction des effectifs des proies agit sur la dynamique des populations des prédateurs.
Appelons $N_1(t)$ et $N_2(t)$ l'effectif respectif des proies et des prédateurs.

Lotka et Voltera émettent l'hypothèse qu'isolément, les populations de proies comme de prédateurs, évoluent selon des modèles malthusiens.
En conséquence, en l'absence de tout prédateur, l'effectif des proies suit l'équation :

$$N_1'(t) = aN_1(t) \text{ avec } a > 0$$

Et en présence de prédateurs, la population décroît proportionnellement au nombre de rencontres qui donnent lieu à des capture. On choisit de modéliser le nombre de rencontres par le produit $N_1(t) \times N_2(t)$ (plus le nombre de proies et de prédateur est important et plus les chances de rencontres sont grandes...) et de le pondérer par un réel b strictement positif appelé constante de *capturabilité*. La croissance de la population est alors :

$$N_1'(t) = aN_1(t) - bN_1(t)N_2(t) = (a - bN_2(t))N_1(t)$$

① Proposer une relation similaire reliant $N_2'(t)$ à $N_1(t)$ et $N_2(t)$ grâce à deux paramètres c et d strictement positifs, d désignant une constante de prédation.

② On considère une population de poissons pour laquelle le taux de croissance maximum vaut $r1 = 0.5/an$. On imagine par ailleurs que l'espérance de vie des prédateurs, en l'absence de ces proies, est de cinq ans. En supposant le phénomène constant au cours du temps, on dira que sous ces conditions un cinquième de la population de prédateurs disparaît chaque année.
Après des échantillonnages répétés au fil des ans dans chacune des populations, on supposera enfin que l'équilibre est atteint à $5e6$ tonnes de proies et $1e6$ tonnes de prédateurs.
Déterminer a, b, c et d sous ces conditions.

③ Écrire une fonction Python permettant de simuler par la méthode d'Euler explicite l'évolution des populations respectives des proies et des prédateurs sur cinquante années en supposant que $N_1(0) = 4e6$ T et $N_2(0) = 0.9e6$ T.
Donner une représentation graphique de cette évolution et la commenter.

④ Les fonctions N_1 et N_2 sont périodiques de même période qu'on notera T. On définit les moyennes de N_1 et de N_2 sur une période $[0, T]$ comme :

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt$$

a) Montrer que $\bar{x} = \dfrac{c}{d}$ et $\bar{y} = \dfrac{a}{b}$.

b) On imagine un prédateur commun aux deux espèces (chasse ou pêche) qui prélève chaque année une proportion e et f respectivement de proies et de prédateurs. Adapter le système d'origine pour tenir compte de cette prédation et montrer que, sous cette condition, la moyenne des proies augmente alors que la moyenne des prédateurs diminue.