3 Équations différentielles.

Objectif

L'objectif est de reprendre par la pratique le cours sur les équations différentielles de BCPST1 en insistant sur le lien avec l'informatique (méthode d'Euler (toujours rappelée dans un énoncé) mais nous apprendrons aussi à traiter des équations différentielles autonomes du type $y'(t) = F(y(t))$ où F est une fonction continue sur un intervalle à valeurs réelles.

1 L'algorithme d'Euler explicite.

1.1 Introduction

Voici des exemples d'équations différentielles du premier ordre, certains élémentaires, d'autres glanés dans les sujets du concours Agro-Véto :

$$\begin{cases} y'(t) & = y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) & = -3y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 2 \end{cases} ; \begin{cases} (1+t)y'(t) + y(t) & = 0, t \in]-1, +\infty[\\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) & = \dfrac{1}{1+e^t}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = \ln(2) \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) - \dfrac{y(t)}{4} & = \cos(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) & = 2y(t) - y^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

Toutes peuvent se mettre, selon les cas, sous la forme générale

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) & = F(y(t)), t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}} (E_1) \text{ ou } \boxed{\begin{cases} y'(t) & = F(t, y(t)), \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}} (E_2)$$

où $y_0 \in J$ représente la condition à l'origine et $F \in \mathcal{C}(J)$ pour (E_1), $F \in \mathcal{C}(I \times J)$ pour (E_2), est spécifique à chaque équation. On dira que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times J$, $y : I \to \mathbb{R}$ est une **solution** sur I de l'équation différentielle si y est dérivable sur I et $y'(t) = F(y(t))$ ou $y'(t) = F(t, y(t))$ selon les cas, avec $y(t_0) = y_0$.

On admettra que la solution au problème ainsi posé existe en tant que fonction définie sur I et qu'elle est unique. Des techniques au programme existent pour obtenir cette solution (cf cours de BCPST1) mais ce n'est pas toujours le cas (cf. l'ED n°6 ci-dessus). Commençons donc par mettre en place une méthode numérique qui nous permettra, quel que soit le cas de figure, d'approcher la solution des équations d'ordre 1.

1.2 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = F(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Cette méthode repose sur l'idée simple que, puisque la solution cherchée est dérivable sur I, on a pour h « suffisamment » petit :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \cong y'(t) \text{ ou encore } y(t+h) \cong y(t) + h \cdot y'(t)$$

Certains énoncés introduisent également cette approximation en disant que y étant dérivable sur I, elle admet un développement limité à l'ordre 1 qui permet d'écrire :

$$\forall t \in I,\ y(t+h) \underset{0}{=} y(t) + h \cdot y'(t) + \circ(h)$$

et sous cette condition, on peut écrire $\boxed{y(t+h) \cong y(t) + h \cdot F(y(t))}$ pour h suffisamment petit.

Supposons vouloir résoudre l'équation sur un intervalle $[t_0, t_f]$ avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$. Pour faire le lien avec ce qui précède, on commence par définir une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ en précisant sont « pas », $h = (t_f - t_0)/n$ où n est le nombre de « segments » dont nous aurons besoin.
On retiendra qu'ainsi $(t_k)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison h, soit :

$$\boxed{t_k = t_0 + kh \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!], \text{ avec } t_n = t_f}$$

La méthode d'Euler consiste à calculer pas à pas des valeurs approchées de tous les réels $y(t_k)$ en approchant la courbe sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par sa tangente en t_k. Précisons cette phrase :

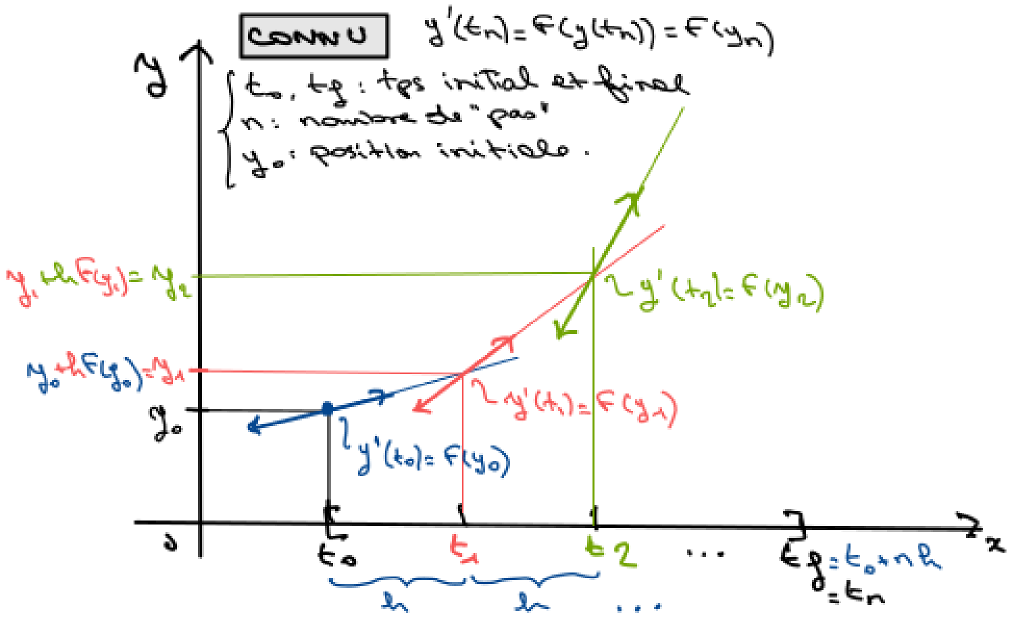
- En partant du point (t_0, y_0), on suit la droite de pente $y'(t_0) = F(y_0)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.
  On a alors :

$$\begin{cases} t_1 & = t_0 + h \\ y_1 & = y_0 + h \cdot F(y_0) \end{cases}$$

- En partant du point (t_1, y_1), on suit la droite de pente $y'(t_1) = F(y_1)$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. A cette étape, $t_2 = t_1 + h$, $y_2 = y_1 + hF(y_1)$.
- On construit ainsi une suite de points de façon récurrente en posant :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \begin{cases} t_{k+1} & = t_k + h \\ y_{k+1} & = y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}$$

La ligne brisée joignant les points $\{(t_k, y_k), k \in [\![0, n]\!]\}$ donne une solution approchée de l'ED.



Mise en oeuvre : Si $y' = F(y(t))$ où $y(t_0) = y_0$ admet une solution sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour avoir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, au pas de temps h, on commence par déterminer le nombre n de pas nécessaire pour la subdivision de $I_+ = [t_0, t_f]$, à savoir : $n = \dfrac{t_f - t_0}{h}$.
On construit la suite $(t_k, y_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par son premier terme (t_0, y_0) (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} t_{k+1} & = t_k + h \\ y_{k+1} & = y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}$$

Algorithme d'Euler : Écrire une fonction `eulerExplicite_v1(F, t0, tf, y0, h)` permettant, connaissant la fonction F, le temps initial et final t_0 et t_f, la position à l'origine y_0 et le pas de temps h, de renvoyer à la fois la liste `T = [t0, t0+h, ..., t0+nh]` et de la liste des valeurs estimées de y, à savoir `Y = [y0, y1, ..., yn]`.

```python
def eulerExplicite_v1(F, t0, tf, y0, h):
    n = ... # nombre de pas
    T = ...
    Y = ... ... # initialise la solution approchée
    T[0] = ...
    Y[0] = ...
    for k in range(......):
        T[k+1] = ...
        Y[k+1] = ... ... ... #  y'(t) = F[y(t)]
    return T,Y
```

Application 1 : On considère cette fois l'équation différentielle (ED_1) : $y' = -3y$ et $y(0) = 2$.

① Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$. Tracer le graphe de sa solution et préciser sa limite en l'infini.

② On cherche une solution approchée grâce à la méthode d'Euler. Montrer qu'elle est donnée par une suite géométrique $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on précisera la raison et le premier terme. Dans quel intervalle doit se situer h pour assurer la stabilité de la solution, autrement dit pour que la solution numérique approchée conserve la même limite en l'infini que la solution y de (E_1) ?

③ Le vérifier en utilisant la fonction `eulerExplicite_v1()` sur l'intervalle $I = [0, 2]$.

1.3 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

On généralise la méthode précédente en écrivant que pour obtenir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, on considère la suite (y_k) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{cases} t_{k+1} & = t_k + h \\ y_{k+1} & = y_k + h \cdot F(t_k, y_k) \end{cases}}$$

Algorithme d'Euler (version 2) : Écrire une fonction `eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h)` qui renvoie sous forme de liste la subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ ainsi que la valeur estimée de la solution en chaque point de cette subdivision.

```python
def eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h):
    n = ... # nombre de pas
    T = ...
    Y = ... ... # initialise la solution approchée
    T[0] = ...
    Y[0] = ...
    for k in range(......):
        T[k+1] = ...
        Y[k+1] = ... ... ... #  y'(t) = F[t, y(t)]
    return T,Y
```

Application 2 : On considère cette fois l'équation différentielle (ED_1) : $y' + 3y = t$ et $y(0) = 1$.

① Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$.

② Vérifier votre réponse en utilisant la fonction **eulerExplicite()** sur l'intervalle $I = [0, 3]$.

2 Les équations différentielles d'ordre 1. Rappel de cours

Méthode *méthode générale de résolution*

- *S'il n'est pas imposé, on détermine le domaine de définition de l'équation.*
- *On résoud l'équation homogène $(\mathcal{H})$ (par une méthode que l'on verra plus loin)*
- *On trouve une solution particulière de $(\mathcal{E})$.*
- *On obtient la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de $(\mathcal{H})$.*
- *Dans le cas d'un problème de Cauchy, on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.*

Propriété *cas d'une équation homogène*

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

avec a une fonction continue sur I.

Comme a est continue sur I, elle admet une primitive A.
Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = Ce^{-A(t)} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

Soit y'+ay = g(t) avec $a \neq 0$ constante

Expression de g	Forme de la solution particulière y_p
$g(x) = P(x)$ [Polynôme]	$y_p(x) = Q(x)$, $deg(Q) = deg(P)$
$g(x) = P(x)e^{mx}$, $(m \neq -a)$	$y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, $deg(Q) = deg(P)$
$g(x) = P(x)e^{mx}$, $(m = -a)$	$y_p(x) = Q(x)$, $deg(Q) = deg(P) + 1$
$g(x) = Acos(\omega t) + B\sin(\omega t)$	$y_p(x) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Méthode

Solution particulière dans le cas général (Variation de la constante

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t) = g(t) \qquad (\mathcal{E})$$

avec a et g des fonctions continues sur I.
Comme a est continue sur I, elle admet une primitive A. Il existe une solution particulière de la forme :

$$\forall t \in I, y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

où $C : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.
On injecte y_p dans l'ED, ce qui permet d'obtenir $C'(t)$ et donc $C(t)$ par une recherche de primitive. Une solution particulière en découle...

3 Équations autonomes d'ordre 1

3.1 définition

Définition

équation différentielle scalaire autonome d'ordre 1

On appelle équation différentielle scalaire autonome d'ordre 1 toute équation différentielle du type :

$$y'(t) = F(y(t))$$

avec y l'inconnue qui une fonction dérivable et F une fonction continue.

Remarque 1 : Les équations différentielles 1., 2. et 6. de l'introduction sont de telles équations.

Remarque 2 : Le programme officiel stipule : « Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée. »

Exemple 1 : Soit : (ED) $y'(t) = 2y(t) - y^2(t)$, avec $y(0) = 1$

① Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$ est solution de cette équation.

② Utiliser les méthode Euler explicite pour tracer une solution approchée de cette équation.

✐ Le devoir maison consacré au modèles malthusiens et logistiques est l'occasion de se confronter à une étude guidée de l'équation autonome d'ordre 1

$$y'(t) = r\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)y(t) \text{ où } (r, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

L'équation ci-dessus est un cas particulier de ce cas général.

Remarque 2 : Avant d'aborder ce devoir, on pourra lire une introduction sur les équations autonomes d'ordre 1 appliquées à la dynamique des populations écrite par François Rechenmann, directeur de recherche à l'Inria Rhône-Alpes, spécialiste de bio-informatique, que vous trouverez sur la page »(https ://interstices.info/systemes-dynamiques-et-equations-differentielles/).
ou encore en flachant le QR-code suivant :

Exemple 2 : Le modèle de Gompertz Il s'agit d'un autre modèle de dynamique de populations dont le choix est de moduler le coefficient r de façon logarithmique avec l'équation différentielle :

$$N'(t) = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) \qquad (\mathcal{G})$$

Ici encore l'équation n'est pas linéaire. Comme précédemment, K désigne la capacité de charge du milieu et r est un réel strictement positif appelé taux de croissance *per capita*.
Cette équation, si on est guidé, peut se résoudre par séparation des variables :

$$N'(t) = r\left(\ln(K) - \ln(N(t))\right)N(t) \Leftrightarrow -\underbrace{\frac{-N'(t)}{N(t)}}_{u'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{\ln\left(\frac{K}{N}\right)}}_{\frac{1}{u(t)}} = r$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient :

$$-\left(\ln(\ln K - \ln N(t)) - \ln(\ln K - \ln N_0\right) = rt$$

Et en passant à l'exponentielle :

$$\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = \ln\left(\frac{K}{N_0}\right)e^{-rt}$$

puis

$$N(t) = K\exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-rt}\right)$$

Utiliser à nouveau le notebook et la fonction `eulerExplicite()` pour approcher cette solution et faire varier les paramètres r et N_0.

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

4.1 Rappels de cours

Propriété

cas d'une équation homogène

Les solutions générales de l'ED homogène $y'' + ay' + by = 0$ *dépendent du signe du discriminant* Δ *de l'équation caractéristique associée :* $r^2 + ar + b = 0$.

- *Si* $\Delta > 0$, *il y a deux racines réelles* r_1 *et* r_2 *et*

$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si* $\Delta = 0$, *il y a une racine double* $r_0 \in \mathbb{R}$.

$$y_h(t) = e^{r_0 t}(\lambda_1 t + \lambda_2) \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si* $\Delta < 0$, *il y a deux racines conjuguées* $z_1 = \alpha + i\beta$ *et* $z_1 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$y_h(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))\, e^{\alpha t} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

soit $y'' + ay' + by = g(x)$

- *Une solution évidente existe. C'est le cas si* g *est une constante, si c'est une fonction polynomiale (auquel cas* y_p *est également polynomiale) ou bien si l'énoncé nous a fait étudier au préalable une fonction qui répond à la question...*
- *L'énoncé nous donne la forme de la solution particulière. Elle dépend de paramètres réels et il suffit de la replonger dans l'ED pour les obtenir et répondre à la question (cf Tac O tac « analyse » du site internet).*

4.2 A nouveau l'algorithme d'Euler ?

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle : $\begin{cases} y'' + ay' + by & = 0 \\ y(0) = y_0, y'(0) & = v_0 \end{cases}$ (E).

On considère la matrice colonne $Y(t)$ définie par : $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A.Y(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'équation est devenue matricielle et du premier ordre.

En utilisant la notation usuelle : $v(t) = y'(t)$, on obtient une nouvelle formulation :

$$\begin{cases} v'(t) & = -av(t) - by(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}, \text{ où } y(0) = y_0 \text{ et } v(0) = v_0$$

Ce qui permet d'envisager de le résoudre par la méthode d'Euler vue dans la première partie.

On écrit pour ça : $\begin{cases} v(t+h) &= v(t) + hv'(t) = \\ y(t+h) &= y(t) + hy'(t) = \end{cases}$

On en déduit une forme récurrente facile à programmer puisque, y_0 et v_0 étant connus :

$$\boxed{\begin{cases} v_{n+1} &= (1-ah)v_n - bhy_n \\ y_{n+1} &= hv_n + y_n \end{cases} = \begin{pmatrix} 1-ah & -bh \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

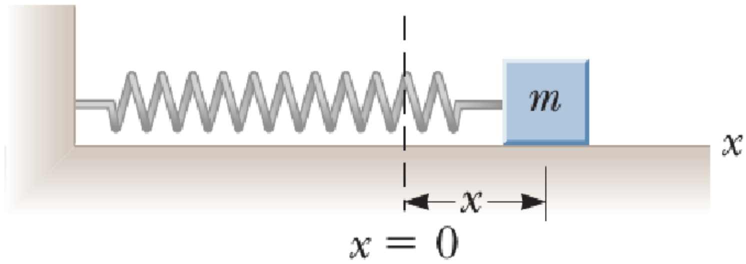
Compléter la fonction Python `simulSolutionEe(y0,v0)` proposée dans le Notebook.

4.3 Équations linéaires d'ordre 2 : mise en pratique.

① Soit l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

a. Donner sa solution et la tracer sur l'intervalle $I = [0, 3]$.
b. Confrontez graphiquement votre solution approchée à la solution exacte.

② On suppose un point matériel de masse m attaché à un ressort horizontal, sans masse, de raideur k et de longueur au repos l_0. Le système est supposé en équilibre à la position l_e.



A l'instant initial, la masse est déplacée, sans vitesse, d'une longueur x_0 par rapport à la position d'équilibre. Alors, si $x(t)$ désigne l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre à l'instant t, on a dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\ddot{x}^2 + \omega^2 x = 0 \text{ où } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

On considère pour permettre une simulation numérique que $x_0 = 0.1m$, $\dot{x}(0) = 0m.s^{-1}$ et $\omega = 10$ rad.s^{-1}.

a. Rappeler quelle est la solution analytique de cette équation.
b. Confronter la solution approchée et la solution analytique de cette équation et de tracer la trajectoire de phase. Commenter ce graphique.
c. <u>Justification :</u> On s'intéresse à l'énergie du système qui, à l'instant t, est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{m}{2}\left(v^2(t) + \omega^2 x^2(t)\right)$$

Il est facile de vérifier par dérivation que l'énergie est une constante du mouvement... Or ce n'est pas tout à fait le cas pour lorsqu'on approche v et x par la méthode précédentes.

En effet $E_{n+1} = \frac{m}{2}\left(v_{n+1}^2 + \omega^2 x_{n+1}^2\right)$ et en remplaçant par l'expression obtenue en 4.b) on obtient pour Euler explicite : $E_{n+1} = (1 + \omega^2 h^2)E_n$.