# 4 T.D. Concepts de base des probabilités.

## Exercice 1 ❤ : Obtention de formules combinatoires

**I/ Formule de Pascal.**
On suppose un ensemble $E$ de cardinal $n$. Soit $a \in E$. On prélève $p$ éléments de $E$. En mettant en évidence une partition de l'ensemble des tirages possibles, retrouver la formule de Pascal.

**II/ Formule du binôme de Newton.**
On considère une urne $U$ composé de $N = a + b$ boules dont $a$ sont blanches. On effectue $n$ tirages successifs avec remise.

① Déterminer le cardinal des tirages possibles.

② Soit $T_k$ l'événement : « $k$ boules sont blanches parmi les $n$ boules tirées ». Déterminer $\mathrm{Card}(T_k)$ en précisant les valeurs de $k$.

③ Mettre en évidence une partition de $\Omega$ et conclure sur la formule du Binôme de Newton.

**III/ Formule** $\displaystyle\sum_{k=a}^{n} \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1} = S.$

① *Démonstration analytique.* Utiliser la formule de Pascal et mettre en évidence un télescopage qui permet de retrouver ce résultat.

② *Démonstration combinatoire.* On considère une urne $U$ contenant $n+1$ boules dont $b$ sont noires et $a+1$ sont blanches. On extrait les boules une à une jusqu'à vider l'urne.

**a.** Combien de tirages différents sont possibles ?
**b.** Soit $M_k$ l'événement : « La dernière boule blanche occupe la $(k+1)$-ième place ». Déterminer $\mathrm{Card}(M_k)$ pour des valeurs de $k$ qu'on précisera.
**c.** En déduire la formule annoncée.

## Exercice 2 ❤ : Tirages avec et sans remise

**I/ Tirage avec remise de $n$ boules d'une urne $U$ contenant des boules de deux couleurs distinctes** :

On supposera cette urne $U$ composée de $N$ boules de deux couleurs différentes : $N_b$ boules de couleur Blanche et $N_r$ boules de couleur Rouge (supposées numérotées) et on notera $p_1$ et $p_2$ les proportions respectives de boules de couleur Blanche et Rouge.

① *Modélisation :*

**a.** *Version 1 :* Écrire une fonction `tirageARv1.py` d'argument le nombre $n$ de tirages, le nombre $N_b$ de Blanches et $N_r$ de rouges, qui utilise la fonction `randint()` pour simuler cette expérience aléatoire et renvoyer une liste formée de 1 à chaque fois qu'une boules blanches est tirée, 0 sinon.

✐ Pour chaque question, on traitera à titre d'exemple le cas pour lequel on effectue 10 tirages dans une urne contenant 7 blanches et 3 rouges.

**b.** *Version 2 :* Une urne est composée de boules blanches en proportion $p_1$ $(0 < p_1 < 1)$. On effectue $n$ tirages avec remise dans cette urne. Écrire une fonction `tirageARv2.py` dont les paramètres d'entrée sont $n$ et $p_1$, qui utilise cette fois la fonction `random()` et qui modélise sous forme de liste le résultats de ce tirage.

**c.** Proposer une fonction Python `freqBoulesBlanches(n, p1, m)` permettant de simuler $m$ fois cette expérience (avec $m$ supposé grand) et renvoyant la fréquence d'apparition de $k$ boules blanches pour $k \in [\![0, n]\!]$.

② Partie mathématique :

**a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**b.** Si $r_1$ est le nombre de boules Blanches obtenues, quelles sont les valeurs possibles prises par $r_1$ ?

**c.** Combien de tirages amènent $r_1$ boules Blanches puis $r_2$ boules Rouges ?

**d.** Combien de tirages amènent $r_1$ boules de couleur Blanche ?

**e.** *Synthèse :* Soit $X$ variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à l'issue d'un tel tirage.
Préciser la loi de $X$, à savoir : préciser $X(\Omega)$ et $\forall k \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = k)$.
Confrontez vos résultats à ceux obtenus dans la partie informatique.

**II/ Tirage avec remise de $n$ boules d'une urne $U$ contenant des boules de trois couleurs distinctes** :

L'urne $U$ est cette fois composée de $N$ boules de trois couleurs distinctes, à savoir Blanches, Rouges et Vertes, en nombre respectifs $N_1$, $N_2$ et $N_3$ et donc dans les proportions respectives $p_1$, $p_2$ et $p_3$ où $p_i = N_i/N$.

① *Modélisation :*

**a.** *Version 2 :* Une urne est composée de boules blanches en proportion $p_1$ $(0 < p_1 < 1)$ et de boules Rouges en proportion $p_2$. On effectue $n$ tirages avec remise dans cette urne. Écrire une fonction `tirageAR-3C.py` dont les paramètres d'entrée sont $n$, $p_1$ et $p_2$, qui utilise la fonction `random()` et qui modélise sous forme de liste le résultats de ce tirage.

**b.** Proposer une fonction Python `freqCouleurs(n, p1, p2, m)` permettant de simuler $m$ expériences (avec $m$ grand) telles que celle décrite ci-dessus et renvoyant sous forme de tableau à double entrée la fréquence d'apparition de $i$ boules blanches et $j$ boules Rouges pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.

② Partie mathématique :

**a.** Combien de tirages amènent $r_1$ boules de couleur Blanche, $r_2$ boules de couleur Rouge puis $r_3$ boules de couleur Verte dans cet ordre ?

**b.** Combien de tirages amènent $r_1$ boules Blanches, $r_2$ boules Rouges et $r_3$ boules Vertes ?

**c.** En déduire la probabilité d'obtenir $r_1$ Blanches et $r_2$ Rouges.

**III/** On extrait **par poignée** $n$ boules d'une urne $U$.

On suppose cette urne $U$ composée de $N$ boules numérotées de deux couleurs différentes Blanches et Rouges dans les proportions respectives $p_1$ et $p_2$.

① *Modélisation :*

**a.** Compléter la fonction `tirageSR.py` afin de modéliser un tirage successif sans remise de $n$ boules dans une urne composée de $N$ boules dont un proportion $p_1$ est blanche.

**b.** Compléter la fonction `freqB-tirageAR.py` qui simule la réalisation de 1000 tirages avec remise de $n$ boules dans une urne composée d'une proportion $p_1$ de boules blanches et qui retourne un tableau de 2 lignes, $n+1$ colonnes, formé sur la première ligne du nombre de boules blanches possibles et sur la seconde des fréquences respectives du nombre de boules blanches obtenues au cours des 1000 tirages.

② Partie mathématique :

**a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**b.** Combien de tirages amènent $r_1$ boules de couleur $c_1$ ?

**c.** Répondre à nouveau à ces deux questions si les tirages ont lieu successivement sans remise.

## Exercice 3 ✶ :

On considère 5 pièces de monnaie : 3 parfaitement équilibrées, une donnant pile avec la probabilité $0,6$ et la dernière donnant pile avec la probabilité $0,7$.

① On tire au hasard l'une des 5 pièces et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

② On tire au hasard l'une des 5 pièces et on la lance. On obtient face. Quelle est la probabilité que le lancer ait été effectué avec l'une des 2 pièces truquées ?

✐ *Indications* : La réalisation des événements est conditionnée par le choix de l'une au l'autre des pièces de monnaies. Penser à décrire un système complet d'événements et à appliquer la FPT.

## Exercice 4 ✶ :

Un bus est prévu tous les matins en direction du boulevard Guist'hau, destination appelée $A$. Si un matin donné, il est à l'heure, il a une chance sur 4 d'être à l'heure le lendemain. S'il est en retard un matin, il a 9 chances sur 10 d'être à l'heure le lendemain. Le premier jour, le bus est à l'heure.
Calculer la probabilité que le bus soit à l'heure le $n$-ième jour.
Que se passe-t-il au bout d'un an ?

✐ On fera intervenir un système complet d'événements de 2 possibilités contraires le $n$-ième jour.

## Exercice 5 : ✶ ✶

On effectue des doubles lancers d'un dé jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou de 7 apparaisse.

① Soit $E_n$ l'événement : « une somme de 5 apparaît au $n$-ième lancer et sur les $n-1$ premiers doubles lancers, ni la somme 5 ni celle de 7 n'apparaît ». Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.

② Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.

③ Écrire une fonction Python simulant cette expérience aléatoire. En réalisant $s = 1000$ fois cette expérience, proposez une façon de valider votre réponse à la question précédente.

④ Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.

⑤ Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.

## Exercice 6 : ✶✶

Des cavaliers, sur une épreuve de puissance, tentent de franchir des barres placées successivement sur les trous numérotés $1, 2, \cdots, n, \cdots$. On suppose les sauts indépendants entre eux et on suppose que la probabilité de succès à la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. Soit $X$, la v.a.r. égale au numéro du dernier saut réussi.

① Trouver la loi de X.

② Écrire une fonction Python permettant de simuler les passages successifs d'un cavalier sur cette épreuve.

③ Calculer grâce à elle la hauteur moyenne franchie par les cavaliers.

④ On admet que $\mathbb{E}(X)$ existe si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument et, sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si elle existe.

## Exercice 7 ✶✶✶ :

Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
On admet que, pour justifier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire dénombrable infinie $X$, il suffit de vérifier la convergence absolue de la série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ et que sous cette condition, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$.

① Montrer que : $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n - 1) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n + 1) =$

$$= \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n).$$

② **a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n) - N\mathbb{P}(X > N)$ (✐ On pensera à des télescopages...)

**b.** En déduire que $\mathbb{E}(X)$ existe si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n)$ converge et que que, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

③ *Application :* Un cinéma édite des tickets dont le verso représente quatre affiches de films possibles. En réunissant ces quatre affiches, on gagne une place gratuite (on supposera les distributions indépendantes).

**a.** Calculer la probabilité qu'au bout de $n$ séances, il manque encore une affiche (on pourra introduire l'événement $A_i$ : « ne pas obtenir l'affiche n°$i$ au bout de $n$ séances » et appliquer la formule du crible.

**b.** Soit $X$, variable aléatoire égale au nombre de films vus pour disposer pour la première fois de la collection complète. Exprimer $\mathbb{P}(X > n)$ à l'aide de 3.a). En déduire que $X$ admet une espérance et la calculer.

## Exercice 8 ✶✶✶ (oral agro-véto 2015) :

Deux joueurs $E$ et $F$ jouent à un jeu. Chacun dispose d'une urne contenant dix tickets. Dans l'urne de $E$, il y en a $x$ qui sont gagnants ($x \geq 2$), dans celle de $F$, il y en a $y$.
$E$ commence : il tire simultanément deux tickets de son urne ; il gagne si les 2 sont gagnants. S'il ne gagne pas, c'est $F$ qui joue, en tirant un ticket de son urne. $F$ remporte la partie si ce ticket est gagnant. Sinon, c'est $E$ qui reprend la main, et le jeu se poursuit selon les mêmes modalités jusqu'à l'obtention d'un gagnant.

① Simulation informatique.

**a.** Écrire une fonction `tirageF(y)` simulant le tirage d'un ticket dans une urne contenant $y$ tickets gagnants, $10 - y$ perdants, renvoyant 1 si le ticket est gagnant, 0 sinon.
On pourra utiliser la bibliothèque `random` au sein de laquelle la fonction `randint(a,b)` renvoie un nombre entier aléatoire dans $[\![a, b]\!]$.

**b.** Écrire de même une fonction `tirageE(x)` simulant un tirage de 2 tickets dans une urne contenant $x$ tickets gagnants, $10-x$ perdants, renvoyant 1 si les 2 tickets tirés sont gagnant, 0 sinon.

**c.** Écrire une fonction `jeu(x,y)` qui simule une partie complète, consistant en une suite d'essais de $E$ et $F$ jusqu'à l'obtention d'un vainqueur. Cette fonction renverra 1 si $E$ est le gagnant, 2 si c'est $F$.

② Étude mathématique.

**a.** Calculer la probabilité, que l'on notera $p$, que $E$ gagne à son premier tirage.
Calculer la probabilité, que l'on notera $p'$, que $F$ gagne à son premier tirage, sachant que $E$ a perdu.

**b.** Calculer la probabilité que la partie se termine avec le gain de $E$ à son $n$-ième tirage.
Montrer que la probabilité que $E$ gagne la partie est $\dfrac{p}{1 - qq'}$, où $q = 1 - p$, $q' = 1 - p'$.

**c.** Montrer que la probabilité que $F$ gagne la partie est $\dfrac{p'q}{1 - qq'}$.

**d.** Ecrire une fonction qui renvoie la liste des valeurs de $x$, $x$ entier, $2 \leq x \leq 9$ pour lesquelles $f(x) = \dfrac{10x(x-1)}{90 + x - x^2}$ est entier.

**e.** Montrer que pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que $y = f(x)$.
En déduire le ou les couple(x) $(x, y)$ pour lequel (lesquels) la partie est équitable.

## Exercice 9 ✶✶✶ (oral agro-véto 2022) :

On dispose d'une pièce équilibrée et de deux urnes. L'urne U contient 1 boule blanche et 2 boules rouges, tandis que l'urne V contient 1 boule blanche et 3 boules rouges.
On suit le protocole suivant :

- **Étape 1** on effectue des lancers successifs de la pièce jusqu'à obtention du premier Face. On note alors $X$ le numéro du lancer amenant Face pour la première fois.
- **Étape 2** Si le premier face est obtenu lors du k-ième lancer, on effectue $k$ tirages d'une boule avec remise dans U, suivis d'une succession infinie de tirages d'une boule avec remise dans V.

On note $Y$ le numéro du tirage dans les urnes amenant une boule blanche pour la première fois.

Ainsi, si on a obtenu la succession *pile, pile, face*, alors $X$ vaut 3 , on effectue alors 3 tirages dans $U$, puis une succession de tirages dans $V$.

Si on obtient les couleurs de boules suivantes successivement *rouge, rouge, rouge, rouge, blanche*, alors $Y$ vaut 5 .

① Écrire une fonction permettant de simuler une réalisation de $Y$.

② Soient $n, s$ deux entiers naturels non nuls. Rappeler les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k$ et $\displaystyle\sum_{k=s}^{+\infty} q^k$ où $q$ est un réel.
On précisera les conditions de validité des formules énoncées.

③ **a.** Préciser la loi de $X$, ainsi que son espérance et sa variance.
**b.** Soit $\ell$ un entier naturel non nul. Déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant \ell)$.

④ Déterminer $\mathbb{P}(Y = 1), \mathbb{P}(Y = 2)$.

⑤ Démontrer que pour tout $\ell \geqslant 1, \mathbb{P}(Y = \ell) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \frac{2}{5}\frac{1}{3^\ell}$.

⑥ À l'aide du programme réalisé en première question, donner une estimation de l'espérance de $Y$. Quel résultat du cours utilise-t-on ?

⑦ Vérifier que $Y$ admet une espérance et la calculer.

## Exercice 10 ✶✶✶ (oral agro-véto 2022) :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On étudie la diffusion d'une information.

- A l'instant $n = 0$, une seule personne possède cette information et la trouve intéressante.
- Si une personne trouve cette information intéressante à un instant $n \in \mathbb{N}$, elle la diffuse à $N$ nouvelles personnes qui n'étaient pas au courant jusqu'alors, et qui sont alors au courant à l'instant $n + 1$.
- Il y a une probabilité $p \in ]0, 1[$ qu'une personne donnée trouve cette information intéressante, à tout instant.
- On suppose par ailleurs que toutes les personnes mises au courant sont différentes les unes des autres. Ainsi, une personne n'est jamais mise au courant en même temps par deux personnes différentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de nouvelles personnes ayant reçu l'information à l'instant $n$ exactement et qui l'ont trouvée intéressante.

① Ecrire en Python une fonction `X(n, N, p)` qui prend en arguements des entiers `n` et `N`, un flottant $p \in ]0, 1[$, qui simule l'expérience décrite et qui retourne le nombre de personnes qui reçoivent l'information à l'instant `n` et qui vont ensuite la transmettre.

② Déterminer la loi de $X_1$ et son espérance.

③ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
Justifier que $(u_n)$ est croissante. En déduire qu'elle converge (on ne cherchera pas à déterminer la limite).

④ **a.** Expliquer à l'aide d'une interprétation pourquoi nous avons l'égalité : $\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_{n+1} = 0) = u_n^k$.

**b.** En considérant un système complet d'événements relatif à $X_1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^N$$

⑤ Dans la suite de l'énoncé, on se place dans le cas où $N = 2$. La suite étudiée vérifie donc la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^2$$

**a.** Montrer que les limites possibles sont 1 et $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$.

**b.** On se place dans le cas où $p \leq \dfrac{1}{2}$. Comparer alors 1 et $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$. Quelle est alors la limite de la suite $(u_n)$ ? Interpréter ce résultat.

**c.** On se place dans le cas où $p > \dfrac{1}{2}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto (1 - p + px)^2$.

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}\right]$, $f(x) \in \left[0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}\right]$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)$.