

3

T.D. séries numériques réelles



Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente. Combinaison linéaire de séries convergentes.

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.

Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.

Convergence et somme de la série exponentielle.

Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Convergence absolue.

Exercice 1 ♥ : Travailler avec les séries de référence

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}; & b) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}; & c) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}; & d) \sum_{n \geq 1} \ln(n) \\
 e) \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}; & f) \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{(\sqrt{2})^n}; & g) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 2^n}{n!}; & h) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^3}
 \end{array}$$

Exercice 2 ★ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}; \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1+2+\dots+n}{1+2^3+\dots+n^3}; \quad c) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad d) \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

Exercice 3 ★ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2(n)}; \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n \ln(n^2+1)}; \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}; \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + \frac{1}{2^n}}$$

Exercice 4 ** : Équivalences et théorème de comparaison

Montrer la convergence de $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ et la divergence de $\sum \ln \left(\frac{2 + \sin(1/n)}{2 - \sin(1/n)} \right)$.

Exercice 5 ♥ :

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n \cdot \exp(-u_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

- ① Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
- ② Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6 ♥ :

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- ① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- ② Conclure que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On notera par la suite S sa limite.
- ③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $S = \ln(2)$
- ④ En distinguant selon la parité de n , montrer que $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $\ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ** :

Soit un entier naturel k non nul fixé. Pour tout entier n on définit :

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx; J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^k} \text{ et } u_n = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

- ① Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$. Calculer $J - I_n$.
- ② Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme pour $k = 1$ et $k = 2$.

Exercice 7 * :**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt.$$

- ① Écrire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2, \tan^4, \tan^6, \tan^8$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
- ② Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
- ③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$ et $u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$.
- ④ De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n+1} + u_n$, donner un majorant de u_n .
Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- ⑤ Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- ⑥ La série de terme général u_n est-elle convergente ?
- ⑦ Écrire une fonction prenant n en argument et renvoyant une valeur approchée de u_n .
- ⑧ Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a. Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad (1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t)$.

b. Montrer que $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.

c. En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.

(D'après Oral Agro-véto 2019)