$\boxed{\text{Exercice 12\_TD2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},$
$f_n(x) = nx^3 + n^2 x - 2$

① $f_n \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ car fonction polynôme de degré 3.

$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
avec $f_n(x) \underset{\infty}{\sim} nx^3$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = +\infty$

f_n est continue, strictement croissante. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs $f_n(0) = -2 < 0$

On applique alors le théorème de la bijection :

Conclusion : $\boxed{\exists ! \, a_n \in \mathbb{R}_+^* \;/\; f_n(a_n) = 0}$

② On applique l'algorithme de dichotomie sur $[0,1]$ en notant que $f_n(1) = n + n^2 - 2 > 0 \;\; \forall n \geq 1$

```
f = lambda n,x : n*x**3 + n**2*x - 2
```

```
def dichotomie(n,a,b):
    c=(a+b)/2
    while b-a>1e-3:
        if f(n,a)*f(n,c) <= 0:
            b=c
        else:
            a=c
        c=(a+b)/2
    return c
```

Cette fonction permet d'obtenir $\boxed{a_2 \simeq 0{,}4534}$

(et $f_1(x) = x^3 + x - 2 \;/\; f_1(1) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 1}$)

③ La dichotomie précédente permet de supposer que (a_n) décroît.

Démontrons-le ...

$$f_n(a_n) = 0 \Leftrightarrow n a_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0$$

$$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2$$

$$= (n+1)a_n^3 + (n^2+2n+1)a_n - 2$$

$$= f_n(a_n) + \underbrace{a_n^3 + (2n+1)a_n}_{>0 \text{ car } a_n>0}$$

Donc $f_{n+1}(a_n) > f_n(a_n) = 0$

ou encore $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$

or f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $a_{n+1} < a_n$; Conclusion $\boxed{(a_n)_{n\geq 1} \text{ décroît}}$

Par ailleurs, $(a_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geq 1} \text{ converge}}$

(4) On pose $u_n = n^2 a_n$

Écrivons une fonction Python pour estimer la nature de cette suite (u_n):

```
def graphe(n):
    X=[k for k in range(1,n+1)]
    Y=[k**2*dichotomie(k,0,1) for k in X]
    plt.plot(X,Y,'ro')
    plt.grid()
    plt.show()
```

!) En prenant soin d'appliquer l'algorithme de dichotomie avec $\varepsilon = 10^{-6}$, on obtient une convergence vers $\ell = 2$.

Démontrons-le : $f_n(a_n) = n a_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0$

ou encore $\forall n \geq 1,\ n a_n^3 + u_n - 2 = 0$

or $f_n(1/n) = \frac{1}{n^2} + n - 2 > 0 \ \forall n \geq 2$ Donc $0 < a_n < 1/n < 1$

Soit $0 < a_n^3 < 1/n^3 < 1$ et donc $0 < n a_n^3 < 1/n^2$

or $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$ donc, par théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^3 = 0$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 2}$

on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} \cdot a_n = 1$, soit $\boxed{a_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}}$

(5) On pose $g(x) = \dfrac{2x^3+1}{3x^2+2}$; $g \in C^1(\mathbb{R})$

a) $$g'(x) = \frac{6x^2(3x^2+2) - 6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2}$$

$$= \frac{6x^4+12x^2-6x}{(3x^2+2)^2} = \frac{6x(x^3+2x-1)}{(3x^2+2)^2}$$

Le signe de $g'(x)$ dépend sur $[a_2, 1] \subset \mathbb{R}_+^*$ du signe de :

$$x^3+2x-1 = \frac{1}{2} f_2(x).$$

or, on se souvient que $f_2(a_2) = 0$ et que f_2 est croissante sur $[a_2, 1]$

donc $f_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a_2, 1]$.

En conséquence $g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a_2, 1]$.

<u>Conclusion</u> $\boxed{g \text{ est croissante sur } [a_2, 1]}$

L'énoncé nous demande son tableau de variation :

x	a_2		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	>0	$\nearrow$	$3/5$

$$g(a_2) = \frac{2a_2^3+1}{3a_2^2+2} > 0$$

$$g(1) = 3/5$$

b) $g(x) - x = \dfrac{2x^3+1}{3x^2+2} - x = \dfrac{2x^3+1-3x^3-2x}{3x^2+2} = -\dfrac{x^3+2x-1}{3x^2+2}$

$$= -\frac{2x^3+4x-2}{6x^2+4} = -\frac{f_2(x)}{f'_2(x)}$$

On rappelle que f_2 est positive sur $[a_2,1]$ et strictement croissante sur $[a_2,1]$

Donc $\forall x \in [a_2,1]$, $\dfrac{f_2(x)}{f'_2(x)} \geq 0$

Ou encore : $\boxed{\begin{array}{l} g(a_2) - a_2 = 0 \\ \forall x \in]a_2,1], \ g(x) - x < 0 \end{array}}$

c) Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $v_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$ $v_{n+1} = g(v_n)$.

(i) On a obtenu que $g(a_2) = a_2$ donc d'après (5) a) $g([a_2,1]) \subset [a_2,1]$.

$v_0 = 1 \in [a_2,1]$ donc par récurrence on a :

$\forall n \geq 0$, $v_n \in [a_2,1]$.

(ii) D'après (5) a), g est strictement croissante sur $[a_2,1]$ donc la suite (v_n) est monotone.

(iii) D'après (5) b), $\forall x \in [a_2,1]$, $g(x) - x \leq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(v_n) - v_n = v_{n+1} - v_n \leq 0$.

→ la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

(iv) Elle est décroissante et minorée par a_2
Donc elle converge vers $\ell \in [a_2,1]$ / $g(\ell) = \ell$
[car g est continue sur $[a_2,1]$ ...)

Soit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\ell = a_2$