

## Correction devoir surveillé 2 : Suites numériques, fonctions et statistiques

### Exercice 1 :

Soit  $a \in ]0, 1[$ . On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 = a$$

① Montrons que la suite  $(u_n)$  est monotone, convergente et déterminons sa limite :

- Par hypothèse, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ , ce qui assure que  $(u_n)$  est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ . On montre alors par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, 1[$  :
  - a)  $u_0 = a \in ]0, 1[$
  - b) On suppose que  $u_n \in ]0, 1[$  pour  $n$  fixé ( $n \in \mathbb{N}$ ).
  - c) Alors,  $0 < 1 - u_n < 1$  et donc  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \in ]0, 1[$ .
  - d) Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée. Elle est convergente.

- Notons  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . Alors par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :  
 $L = L - L^2 \Leftrightarrow L = 0$ .

**Conclusion :** La suite  $(u_n)$  est décroissante et converge vers 0

② Montrons que la série  $\sum u_n^2$  est convergente et déterminons sa somme en fonction de  $a$  :

On note que  $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$  et on rappelle qu'étudier la série  $\sum u_n^2$  est étudier la suite  $(S_n)$  des sommes partielles définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \text{ par télescopes}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_0 = a$ .

**Conclusion :** La série  $\sum u_n^2$  converge et sa somme  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$  vaut  $a$ .

③ Montrons que la série  $\sum \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  est divergente :

On note que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k > 0$  et donc  $\ln(u_k)$  est défini pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Comme précédemment, on écrit que  $\sum \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = (T_n)$  où :

$$T_n = \sum_{k=0}^n \ln \left( \frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \sum_{k=0}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \text{ par télescopes}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0^+$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = -\infty$ .

**Conclusion :** La série  $\sum \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  est divergente

④ Étudions la nature de la série  $\sum u_n$  :

Commençons par démontrer que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \sum u_n$  et  $\sum w_n$  de même nature :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{w_n} = 1 \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, 0 < \frac{1}{2} < \frac{u_n}{w_n} < \frac{3}{2}$$

D'où,  $\forall n > N$ ,  $\frac{v_n}{2} < u_n < \frac{3}{2}v_n$  si on suppose que  $\sum v_n$  est une série à termes positifs.

Par application du théorème de convergence par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que :

- Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum \frac{1}{2}v_n$  converge et donc  $\sum v_n$  converge.
- Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum \frac{3}{2}v_n$  converge et donc  $\sum u_n$  converge.

**Conclusion :** Si  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \sum u_n$  et  $\sum w_n$  de même nature

Dès lors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left( \frac{u_n - u_n^2}{u_n} \right) = \ln(1 - u_n)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  donc  $\ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -u_n$  ou encore  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = -v_n$

De plus, d'après la question 3.,  $\sum v_n$  diverge donc  $\sum -v_n$  diverge et l'équivalence qui précède assure que  $\sum u_n$  et  $\sum -v_n$  sont de même nature.

**Conclusion :** La série  $\sum u_n$  diverge

## Exercice 2 :

- ① a) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  parce qu'elle est somme de deux fonctions continues et strictement croissantes (on pouvait aussi dériver...) et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Par théorème de la bijection,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  vers  $\mathbb{R}$  et en particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  admet un unique antécédent, et donc  $(E_n)$  admet une unique solution.

- b) Nous sommes à l'écrit et non à l'oral, il fallait lire « écrire un algorithme **permettant** d'obtenir les valeurs approchées de  $x_n$  à  $10^{-3}$  près et de les représenter graphiquement ».

Pour ça, on va écrire l'algorithme de dichotomie mais il nous faut trouver pour chaque entier  $n$  non nul, deux valeurs  $a$  et  $b$  telles que  $f(a) < n$  et  $f(b) > n$ ... et l'énoncé, à cette étape

de l'énoncé, ne nous aide pas beaucoup!

On va prendre des valeurs les plus simples à calculer :

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \ln(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0 < n$$

et

$$f(e^n) = \ln(e^n) + e^n = n + e^n > n$$

*Remarque* : Ceux d'entre vous qui citeront la question 2.b) pour dire que  $x_n < n$  auront aussi des points pour avoir fait une bonne lecture du sujet...

Dès lors, une rédaction possible est la suivante :

```

1 from math import log
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     return log(x)+x
6
7 def dichot(a,b,f,e):
8     while abs(b-a) > e:
9         c = (a+b)/2
10        if f(a)*f(c) < 0:
11            b = c
12        else:
13            a = c
14    return c
15
16 def x():
17    abs = list(range(1,11))
18    ord = [dichot(1/e,exp(n),lambda x: f(x) -n,10**(-3)) for n in abs]
19    plt.plot(abs,ord,'o')
20    plt.show()
21    return ord

```

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors  $f(x_n) = n < n + 1 = f(x_{n+1})$ . Par stricte croissance de  $f$ , on a donc  $x_n < x_{n+1}$ , et la suite  $(x_n)$  est donc strictement croissante.

② a) La fonction  $x \mapsto x - \ln x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , de dérivée  $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ .

Ainsi, elle est croissante sur  $[1, \infty[$  et décroissante sur  $]0, 1]$ , et atteint donc son minimum en 1, qui vaut 1.

Ainsi, on a bien  $\ln x < x$  pour tout  $x > 0$ .

b) On a pour tout  $n$ ,  $f(n) \geq n = f(x_n)$  et donc  $x_n \leq n$  par stricte croissance de  $f$ .

De plus, on a  $f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\frac{n}{2} + \frac{n}{2} < n$  par la question 2a, et donc  $x_n \geq \frac{n}{2}$  par stricte croissance de  $f$ .

c) Par théorème de minoration, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

## Problème : Variations autour des modèles discrets de dynamique des populations

On nous rappelle que dans le modèle malthusien, l'accroissement relatif de population est indépendant de  $P$  et on a :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Question préliminaire :** Justifions pourquoi toute population dont la dynamique suit un modèle malthusien n'a que deux comportements possibles :

D'après l'équation qui précède, on a :

$$P_{n+1} = (1 + r)P_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

La suite  $(P_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 1 + r$  avec  $r = f - d > -1$  car  $f \in \mathbb{R}_+$  et  $0 < d < 1$ .

Dès lors,  $q = 1 + r > 0$  et, au regard des propriétés des suites géométriques, il n'y a que deux comportements possibles :

- Si  $0 < q < 1$  la suite  $(P_n)$  est strictement décroissante de limite nulle. La population s'éteint.
- Si  $q > 1$  la suite  $(P_n)$  est strictement croissante de limite infinie. La population s'accroît indéfiniment vers un effectif infini.

*Remarque :* On pourrait ajouter le cas improbable pour lequel on a exactement  $q = 1$  et pour lequel la population serait constante au cours du temps, d'effectif stable égale à  $P_0$ .

La critique de ce modèle repose surtout sur la modélisation du comportement de la population quand  $q = 1 + r > 1 \Leftrightarrow r > 0$  car il est difficile d'imaginer que l'accroissement d'une population ne soit pas limité par son environnement, par des problèmes de ressources disponibles et de compétition entre individus.

Des modèles ont donc été imaginés qui pallient cette difficulté en montrant que de grandes valeurs de  $P_n$  conduisent à de plus petites valeurs de  $P_{n+1}$ . Nous allons aborder ici deux modèles de ce type qui mettent en évidence, en dehors de tout phénomène extérieur à la population (de type prédation), les effets d'une compétition entre individus.

Dans ces deux cas, les hypothèses préalables qui doivent être vérifiées sont : la variation par individu  $\frac{\Delta P}{P}$  doit être nulle pour  $P = K$ , positive si  $P < K$  et négative si  $P > K$ .

## Partie I : Présentation des modèles.

On considère les expressions suivantes qui ne dépendent plus linéairement de  $P$  :

$$\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1 \text{ et } \frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 \text{ où } r, K \in \mathbb{R}_+, R_0 = r + 1 \text{ et } M = \frac{K}{R_0 - 1}$$

① Montrons dans chaque cas que l'accroissement relatif  $\Delta P/P$  vérifie les hypothèses précédentes :

a) Premier cas :  $\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1$

Si  $P = K$ , alors  $1 - \frac{P}{K} = 0$  et donc  $\frac{\Delta P}{P} = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

De plus :

$$P < K \Leftrightarrow \frac{P}{K} < 1 \text{ car } K > 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{P}{K} > 0 \Leftrightarrow e^{r(1-P/K)} > 1 \text{ car la fonction exp est croissante et } r > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{P} > 0$$

Ce qui prouve que le premier modèle vérifie les premières hypothèses concernant la capacité d'accueil de l'environnement.

b) Second cas :  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1$  où  $r, K \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $R_0 = r + 1$  et  $M = \frac{K}{R_0 - 1}$

Si  $P = K$ , alors  $\frac{P}{M} = \frac{K}{M} = R_0 - 1$ . Donc  $1 + \frac{P}{M} = R_0$  et  $\frac{\Delta P}{P} = 1 - 1 = 0$ .

Par ailleurs :

$$P < K \Leftrightarrow \frac{P}{M} < \frac{K}{M} \text{ car } M > 0 \text{ puisque } r > 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{P}{M} < 1 + R_0 - 1 = R_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_0}{1 + P/M} > 1 \text{ car } 1 + \frac{P}{M} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 > 0$$

Ce qui suffit à justifier que le second modèle vérifie également les premières hypothèses concernant la capacité d'accueil de l'environnement.

② On regarde ce qui se passe pour de petits effectifs de population ( $P_n$  proche de 0).

— Dans le premier modèle :  $r \cdot (1 - P/K) \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$ .

Si on suppose par ailleurs que le taux intrinsèque  $r$  d'accroissement naturel (lié aux seules fécondité et mortalité) est proche de zéro, alors

$$e^{r(1-P/K)} - 1 \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r(1 - P/K) \sim r$$

Autrement dit, sous la condition de faibles valeurs de  $r$ , on a pour de petits effectifs de

population :  $\frac{\Delta P}{P} \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$

☞ Remarque : On pouvait aussi dire que :  $\lim_{P \rightarrow 0} (e^{r(1-P/K)} - 1) = e^r - 1$ .

Dès lors

$$e^{r(1-P/K)} - 1 \underset{P \rightarrow 0}{\sim} e^r - 1 \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$$

— Dans le second modèle :  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0 - 1 - \frac{P}{M}}{1 + \frac{P}{M}} = \frac{r - \frac{P}{M}}{1 + \frac{P}{M}}$ .

D'où

$$\frac{\Delta P}{P} \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$$

**Conclusion :** Les deux modèles se comportent donc, lorsque les effectifs de la population sont faibles, comme des modèles malthusiens. Autrement dit, les phénomènes de compétition et la disponibilité des ressources sont supposés ne jouer aucun rôle sur le développement de la population lorsque les individus ne sont pas nombreux.

✍ *Note :* Le premier modèle sera appelé par la suite « modèle de Ricker », le second « modèle de Beverton-Hott ».

## Partie II : Analyse mathématique.

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = xe^{r(1-\frac{x}{K})}$  et  $g(x) = \frac{R_0 x}{1 + \frac{x}{M}}$

① Associons à chaque modèle la relation  $P_{n+1} = f(P_n)$  et la relation  $P_{n+1} = g(P_n)$  :

a) *Modèle de Ricker :*

$$\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1 \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = P_n (e^{r(1-P_n/K)} - 1) \Leftrightarrow P_{n+1} = P_n e^{r(1-P_n/K)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

On a donc  $P_{n+1} = f(P_n)$  avec  $f : x \mapsto xe^{r(1-x/K)}$ .

b) *Modèle de Beverton-Hott :*

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = \frac{R_0 P_n}{1 + P_n/M} - P_n \Leftrightarrow P_{n+1} = \frac{R_0 P_n}{1 + P_n/M}, \forall n \in \mathbb{N}$$

On a donc  $P_{n+1} = g(P_n)$  avec  $g : x \mapsto \frac{R_0 \cdot x}{1 + x/M}$  avec  $R_0 = r + 1$  et  $M = \frac{K}{R_0 - 1} = \frac{K}{r}$

② a) *Modèle de Ricker :* Étudions  $f$  définie par  $f : x \mapsto xe^{r(1-x/K)}$  :

i.  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  par composition et produit de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

ii.  $\forall x \geq 0, f'(x) = e^{r(1-x/K)} - \frac{rx}{K} e^{r(1-x/K)} = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) e^{r(1-x/K)}$

iii.  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{rx}{K} \geq 0$  car  $e^{r(1-x/K)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$

Dès lors,  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{rx}{K} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{K}{r}$  car  $r, K > 0$

iv. On a de façon évidente  $f(0) = 0$ .

Déterminons la limite de  $f$  en l'infini :  $f(x) = xe^{r(1-x/K)} = e^r \cdot xe^{-rx/K}$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } x = o(e^{ax}) \text{ avec ici } a = \frac{r}{K} > 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{rx/K}} = 0$$

La courbe représentant  $f$  admet donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

$x$	0	$K/r$	$+\infty$
$f'(x)$	$e^r$	+	0 -
$f(x)$	0	$M$	0

b) *Modèle de Beverton-Hott* : Étudions  $g : x \mapsto \frac{R_0 \cdot x}{1 + x/M}$ .

i.  $M > 0$  donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$

ii.  $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{R_0(1 + x/M) - \frac{R_0}{M}x}{(1 + x/M)^2} = \frac{R_0}{(1 + x/M)^2} > 0$

iii. On a  $g(0) = 0$ .

iv.  $g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{R_0 x}{\frac{x}{M}} = R_0 M = \frac{r+1}{r} K = L$ .

On en déduit que la courbe représentant  $g$  admet en l'infini une asymptote horizontale d'équation  $y = L$  avec  $L > K$  car  $\frac{r+1}{r} > 1$

v. Tableau de variation :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$r+1$	+
$g(x)$	0	$L$

③ Recherche des points fixes, c'est-à-dire des réels  $x$  tels que :  $x \in \mathbb{R}_+ / f(x) = x$  :

a) *Modèle de Ricker* :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x e^{r(1-x/K)} = x \Leftrightarrow x [e^{r(1-x/K)} - 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{r(1-x/K)} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } r(1-x/K) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = K \end{aligned}$$

$f$  admet donc deux points fixes :  $x^* = 0$  ou  $x^* = K$

Observons le deuxième point fixe  $x^* = K$ .

— Si  $0 < r < 1$ , alors  $x_m = \frac{K}{r} > K$

— Si  $r > 1$ , alors  $\frac{K}{r} < K$

b) *Modèle de Beverton-Hott* - Recherche des points fixes :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{R_0 x}{1 + x/M} = x \Leftrightarrow x \left[ \frac{R_0}{1 + x/M} - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } R_0 = 1 + \frac{x}{M} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = M(R_0 - 1) = K$$

$g$  admet donc, comme  $f$ , deux points fixes :  $x^* = 0$  ou  $x^* = K$

④ Tracé de l'allure des courbes en faisant apparaître la droite d'équation ( $y = x$ ).

a) *Modèle de Ricker* :

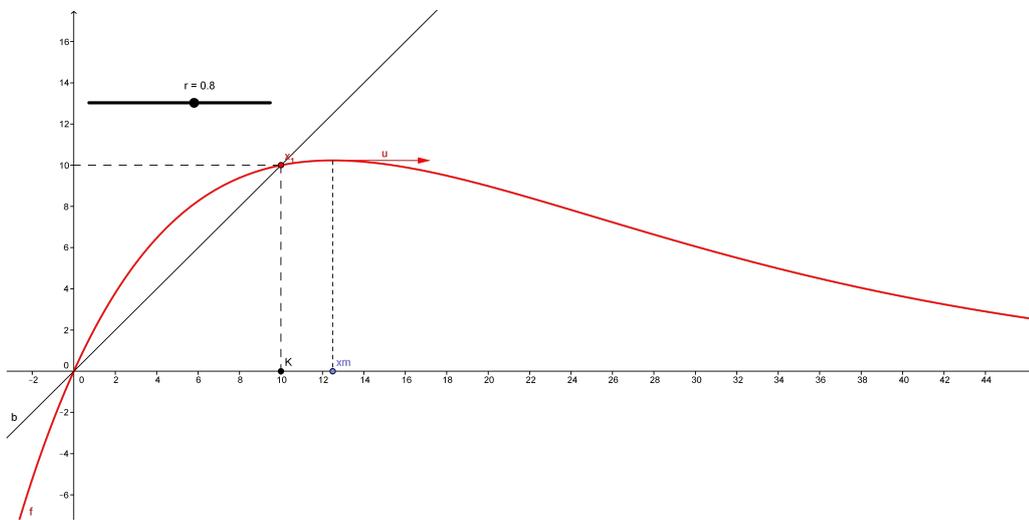


FIGURE 1 – Ricker pour  $r < 1$

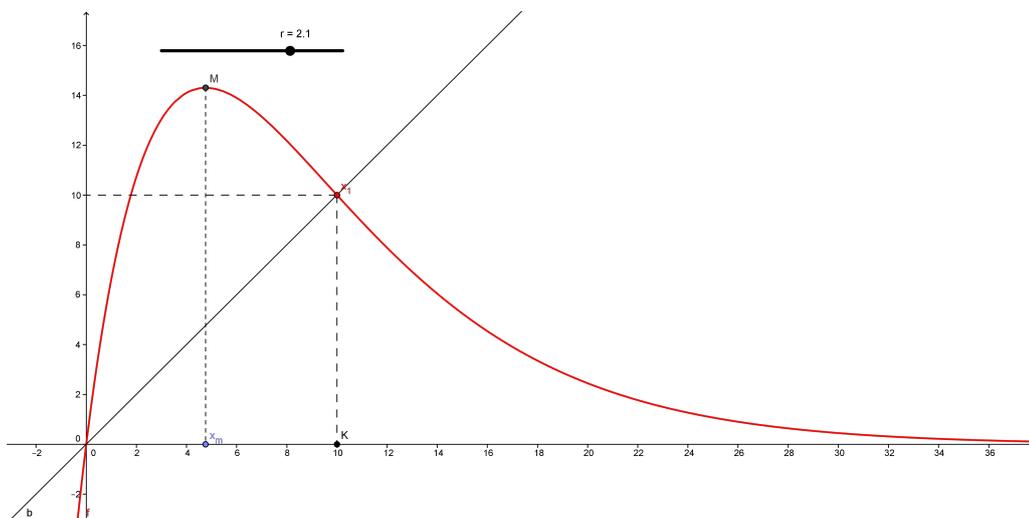


FIGURE 2 – Ricker pour  $r > 1$

b) *Modèle de Beverton-Hott* :

Nous obtenons le graphe suivant :

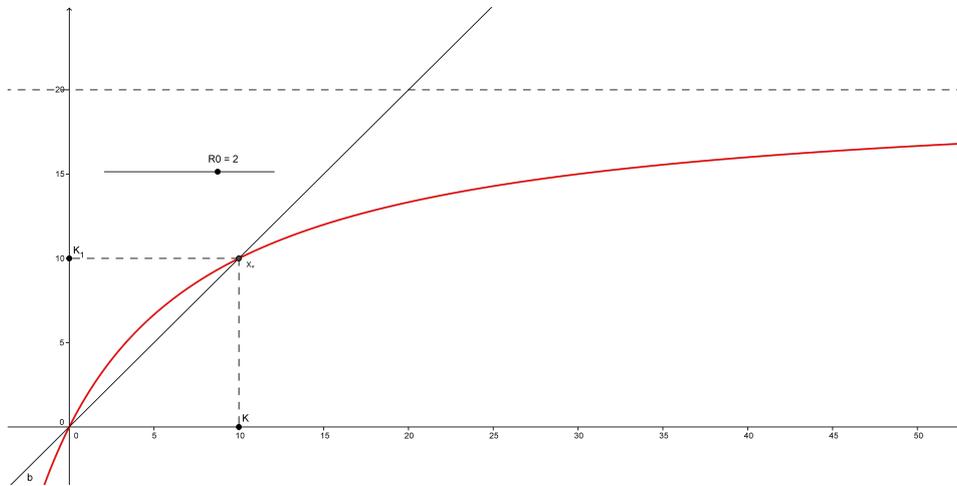


FIGURE 3 – Beverton-Hott

⑤ *Déterminons les états stationnaires pour les modèles de Ricker et de Beverton-Hott* :

Par définition, tout état stationnaire est une solution constante du modèle.

Autrement dit, les états stationnaires vérifient  $f(x^*) = x^*$  et  $g(x^*) = x^*$

D'après la question 2., les modèles de Ricker et de Beverton-Hott ont donc les mêmes états stationnaires, à savoir  $x_1^* = 0$  et  $x_2^* = K$ .

*Déterminons les conditions sur  $r$  pour que, dans chacun des deux modèles, les états d'équilibre soient stables ou instables* :

a) *Modèle de Ricker* : On rappelle que  $\forall x \geq 0$ ,  $f'(x) = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) e^{r(1-x/K)}$

— Pour  $x_1^* = 0$ ,  $f'(0) = e^r$  donc  $|f'(x_1^*)| > 1$  puisque  $r > 0$ .

**Conclusion** :  $x_1^* = 0$  est un état stationnaire instable.

— Pour  $x_1^* = K$ ,  $f'(K) = (1 - r)e^0 = 1 - r$ .

Donc

$$|f'(K)| < 1 \Leftrightarrow |1 - r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 2$$

**Conclusion** :  $x_2^* = K$  est un état stationnaire instable si  $r > 2$ , stable si  $r \in ]0, 2[$

b) *Modèle de Beverton* : On rappelle que  $\forall x \geq 0$ ,  $g'(x) = \frac{R_0}{(1 + x/M)^2}$

— Pour  $x_1^* = 0$ ,  $g'(0) = R_0 = 1 + r > 1$  donc  $|g'(x_1^*)| > 1$ .

**Conclusion** :  $x_1^* = 0$  est un état stationnaire instable pour le modèle de Beverton.

— Pour  $x_1^* = K$ ,  $g'(K) = \frac{R_0}{(1 + K/M)^2} = \frac{R_0}{R_0^2} = \frac{1}{R_0} < 1$  car  $R_0 > 1$ .

**Conclusion** :  $x_2^* = K$  est un état stationnaire stable pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$

### III. Identification expérimentale des paramètres

On dispose des effectifs de deux populations sur onze années, l'une dont la dynamique peut être modélisée par un modèle de Ricker et l'autre par un modèle de Beverton-Hott. On cherche dans chaque cas à déterminer expérimentalement  $K$  et  $r$ .

- ① Dans le cas du modèle de Ricker, on a :  $P_{n+1} = P_n e^{r(1-P_n/K)}$  ou encore  $\frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{r(1-P_n/K)}$ .

Les populations ayant un effectif strictement positif (on suppose  $P_0 > 0$ ), on compose par le logarithme népérien et on obtient :

$$\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right) = -\frac{r}{K}P_n + r.$$

Ce qui permet de conclure que  $\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right) = a_1 P_n + b_1$  avec  $a_1 = -\frac{r}{K}$  et  $b_1 = r$ .

Tandis que dans le cas du modèle de Beverton-Hott, on a :  $P_{n+1} = \frac{R_0 P_n}{1 + \frac{P_n}{M}}$ .

Soit

$$\frac{1}{P_{n+1}} = \frac{1 + \frac{P_n}{M}}{R_0 P_n} = \frac{1}{R_0 P_n} + \frac{1}{M R_0}$$

Ce qui permet de conclure :  $\frac{1}{P_{n+1}} = a_2 \frac{1}{P_n} + b_2$  avec  $a_2 = \frac{1}{R_0}$  et  $b_2 = \frac{1}{M R_0}$ .

- ② Expliquons comment déterminer graphiquement les paramètres  $r$  et  $K$  à partir des effectifs de population relevés durant les dix dernières années :

— Dans le cas du modèle de Ricker, on calcul pour chaque année (sauf la dernière) le rapport de deux effectifs successifs et on trace le nuage des points de coordonnées  $(P_n, \ln(P_{n+1}/P_n))$ . Les coefficients de la droite de régression permettent alors d'obtenir une valeur approchée de  $a_1$  et de  $b_1$ . Pour conclure il suffit d'écrire :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{r}{K} \\ b_1 = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = -\frac{r}{a_1} = -\frac{b_1}{a_1} \\ r = b_1 \end{cases}$$

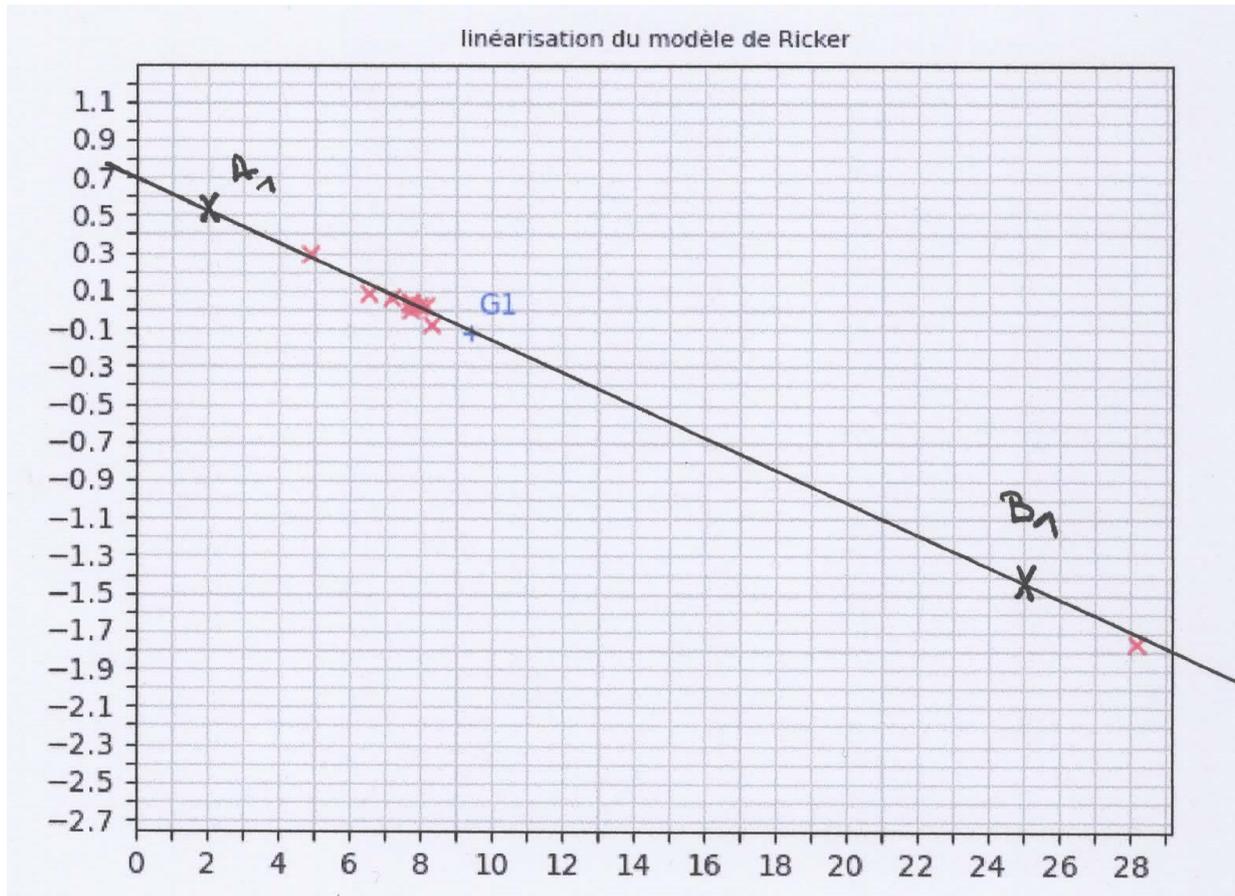
— Dans le cas du modèle de Beverton-Hott, on trace le nuage de points  $(P_n^{-1}, P_{n+1}^{-1})$  ainsi que la droite de régression dont les coefficients permettent d'approximer  $a_2 = \frac{1}{R_0}$  et  $b_2 = \frac{1}{M R_0}$ .

Pour conclure il suffit de rappeler que  $r = R_0 - 1$  et  $M = \frac{k}{R_0 - 1} = \frac{k}{r}$ . Dès lors :

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{R_0} \\ b_2 = \frac{1}{M R_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_0 = 1 + r = \frac{1}{a_2} \\ b_2 = \frac{r}{K R_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{a_2} - 1 \\ K = \frac{r}{b_2 R_0} \end{cases}$$

*Application* : On exploite l'approche précédente sur les recensements effectués (en tonnes) sur les deux populations pendant les onze dernières années en utilisant les nuages de points fournis en annexe 1 (page 7).

**Pour le modèle de Ricker :**



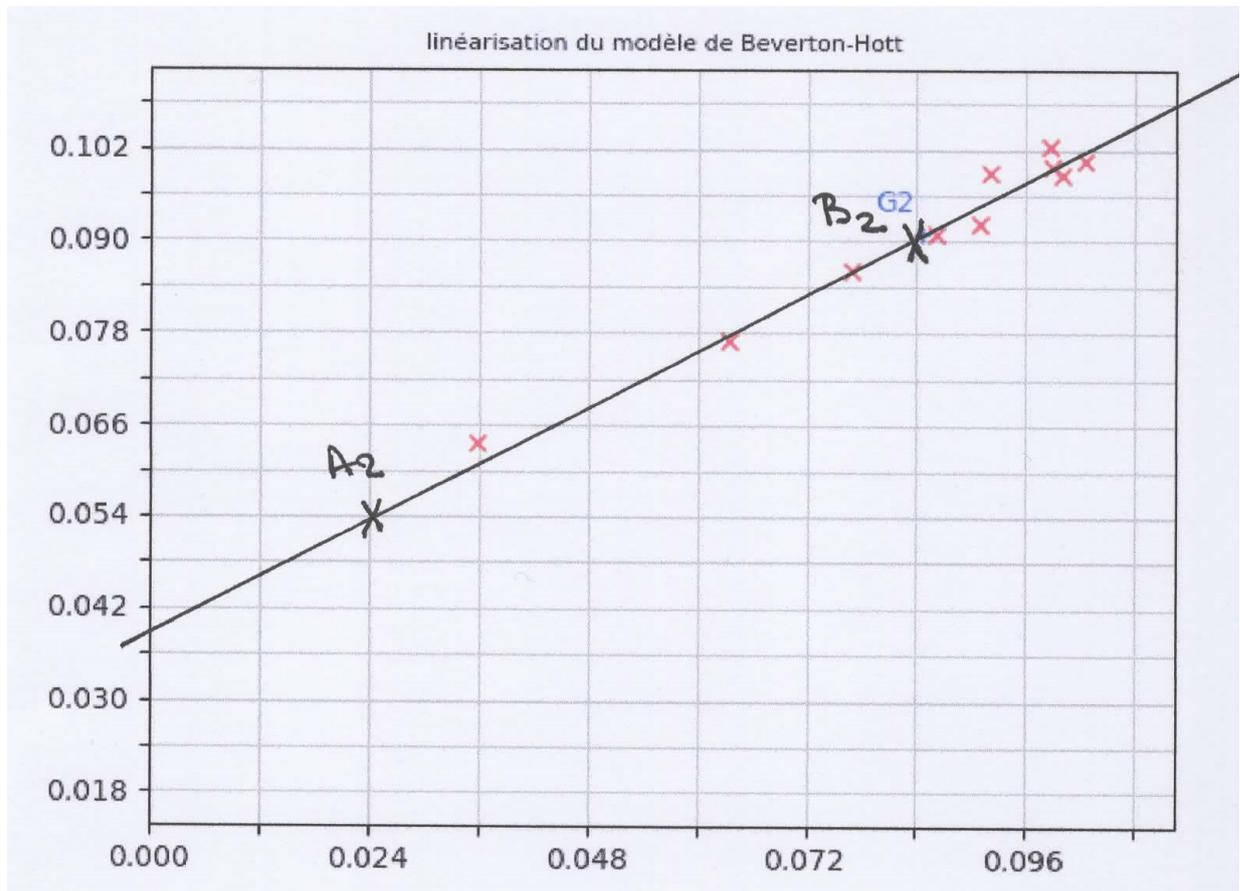
On trace à la main la droite de régression en notant qu'elle doit passer par le point  $G_1$  et on sélectionne deux points  $A_1(2, 0.5)$  et  $B_1(25, -1.5)$  afin d'estimer son coefficient directeur  $a_1$ . On obtient :

$$b_1 \approx 0.7 \text{ et } a_1 \approx \frac{-1.5 - 0.5}{25 - 2} = -\frac{2}{23}$$

Soit, d'après la question précédente :

$$r_1 = b_1 \approx 0.7 \text{ et } K_1 = -\frac{b_1}{a_1} \approx -\frac{7}{10} \cdot \frac{23}{-2} = 7 \cdot \frac{23}{20} = \frac{164}{20} = \frac{80.5}{10} = 8.05$$

Pour le modèle Beverton-Hott :



On trace à la main la droite de régression en notant qu'elle doit cette fois passer par le point  $G_2$  et on sélectionne deux points  $A_2(0.024, 0.054)$  et  $B_2(0.084, 0.090)$  afin d'estimer son coefficient directeur  $a_2$ . En notant que les graduations sont espacées de 0.012, on obtient :

$$b_2 \approx 0.039 = \frac{39}{1000} \text{ et } a_2 \approx \frac{0.090 - 0.054}{0.084 - 0.024} = \frac{90 - 54}{84 - 24} = \frac{36}{60} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Soit, d'après la question précédente :

$$r_2 = \frac{1}{a_2} - 1 \approx \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \approx 0.66 \text{ et } K_2 = \frac{r_2}{b_2 R_0} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{39}{1000} \cdot \frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1000}{13 \times 5} = \frac{2000}{190} = \frac{200}{19} \approx 10.5$$

③ **Prétraitement informatique des données.**

Dans cette partie, on suppose que le fichier Python débute par l'importation du module `matplotlib.pyplot` et par la définition d'une liste `Lp` contenant les effectifs successifs de la population étudiée. Ainsi, dans le premier cas :

```
Lp = [28, 4.86, 6.55, 7.15, 7.67, 7.94, 8.12, 8.27, 7.67, 7.67, 8.05]
```

- a) Écrivons une fonction `lnQuotient` qui prend en argument une liste de nombres (supposés non nuls) `L` et qui renvoie la liste de longueur `len(L)-1` composée des valeurs  $\ln(L[k+1]/L[k])$  :

On commence par noter que les indices de la liste `L` varient entre 0 et `len(L)-1`, on doit avoir  $k+1 \leq \text{len}(L)-1$  soit  $k \leq \text{len}(L)-2$ . Une écriture possible est la suivante :

```
1 def lnQuotient(L):
2     n = len(L)-1
3     return [log(L[k+1]/L[k]) for k in range(n)]
```

- b) Écrivons une fonction `inv` qui prend en entrée une liste de nombres (supposés non nuls) `L` et qui renvoie la liste composée des inverses de ces nombres :

Une écriture possible est :

```
def inv(L):
    return [1/k for k in L]
```

- c) La liste `Lp` étant donnée, complétons les lignes de codes suivantes afin qu'elles effectuent, pour le modèle de Ricker, le tracé des points tel qu'il est proposé dans l'annexe 1 :

On utilise la fonction `lnQuotient` en retenant que la dernière valeur de `Lp` n'a pas été évaluée. Soit :

```
plt.plot(Lp[:-1], lnQuotient(Lp), 'rx') # tracé du nuage de points
plt.plot(np.mean(Lp[:-1]), np.mean(lnQuotient(Lp)), 'b+') # tracé
du centre de gravité
plt.show()
```

On fait de même pour le modèle de Beverton-Hott, en utilisant cette fois la fonction `inv(L)` qui permet d'inverser tous les termes d'une liste `L` (ici les onze termes de la liste). On l'applique à la liste `Lp` des effectifs de population et, pour tracer  $1/P_{k+1}$  en fonction de  $1/P_k$ , on récupère pour les abscisses les 10 premiers termes de la liste `inv(Lp)` et pour les ordonnées les 10 derniers termes de la liste `inv(Lp)`. Soit :

```
L_inv = inv(Lp)# on inverse tous les termes
plt.plot(L_inv[:-1], L_inv[1:], 'rx')
plt.plot(np.mean(L_inv[:-1]), np.mean(L_inv([:-1])), 'b+')
plt.show()
```

- ④ **Écriture des fonctions statistique.** Pour cette question, on s'interdit d'utiliser les commandes préprogrammées de Python qui renvoient la somme, la moyenne ou la variance. Avant chaque fonction, on écrira brièvement le raisonnement suivi et la formule qu'elle est censée calculer.

- a) Écrivons une fonction *moyenne* qui prend en entrée une liste  $X$  (non vide) de nombres réels et qui renvoie la moyenne des éléments de la liste :

Si les éléments de la liste  $X$  sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ .

Pour calculer la moyenne, il suffit donc de calculer la somme  $S$  des  $x_k$  puis diviser par  $\text{len}(X)$ .

<pre>def moyenne(X):     s = 0     for k in range(len(X)):         s += X[k]     return s/len(X)</pre>	ou	<pre>def moyenne(X):     s = 0     for x in X:         s += x     return s/len(X)</pre>
--	----	---

- b) Écrivons une fonction *variance* qui prend en entrée une liste  $X$  (non vide) de nombres réels et qui renvoie la variance des éléments de la liste.

On rappelle la formule de la variance :  $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$ .

Il suffit, pour calculer la variance, de calculer la moyenne des termes de la liste au carré auxquels on soustraira le carré de la moyenne calculé précédemment.

Ce qui donne :

<pre>def variance(X):     s = 0     for k in range(len(X)):         s += X[k]**2     return s/len(X)- moyenne(X)**2</pre>	ou	<pre>def variance(X):     s = 0     for x in X:         s += x**2     return s/len(X)- moyenne(X)**2</pre>
---	----	--

- c) Complétons le programme suivant afin qu'il renvoie la valeur de la covariance de  $X$  et  $Y$  si elle existe et le booléen *False* sinon :

On rappelle deux formules pour calculer la covariance, mais au regard des deux dernières lignes du programme, sachant qu'il nous faut retourner  $1/nx \cdot S$ , la formule recommandée est :

$$s_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

☞ On acceptera aussi en le justifiant que :

$$s_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k y_k - \bar{x} \cdot \bar{y})$$

```
def cov(X,Y):
    " " " Entree : X,Y (liste). " " "
    nx = len(X) ; ny = len(Y)
    if nx != ny or nx == 0:
        return(False)
    else:
        S = 0
        for k in range(nx):
            S = S+(X[k]-moyenne(X))*(Y[k]-moyenne(Y))
        y = 1/nx*S
        return(y)
```

d) La fonction Coef retourne les valeurs  $a$  et  $b$  selon les formules de cours :

```
def Coef(X,Y):
    a = cov(X,Y)/variance(X)
    b = moyenne(Y)-cov(X,Y)/variance(X)*moyenne(X)
    return([a,b])
```

e) La liste  $L_p$  des effectifs de population étant donnée, on donnera une estimation de  $r$  et de  $K$  selon le modèle de Ricker en écrivant :

```
1 Xr = Lr[:-1]
2 Yr = lnQuotient(Lr)
3 [a1, b1] = Coef(Xr, Yr)
4 print("r_vaut:", b1)
5 print("K_vaut:", -b1/a1)
```

Pour le modèle de Beverton-Hott :

```
1 L_inv = inv(Lp)
2 Xbh = L_inv[:-1]
3 Ybh = L_inv[1:]
4 [a2, b2] = Coef(Xbh, Ybh)
5 r2 = 1/a2-1
6 print("r_vaut:", r2)
7 print("K_vaut:", r2/(b2*(r2+1)) )
```

f) Écrivons une fonction Python *modeleRicker* d'arguments  $K$ ,  $r$ ,  $P_0$  et  $n$  et retournant la liste  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$  des effectifs successifs de la population dans le cas du modèle de Ricker : Cette question est très classique et ne présente pas de difficulté. On pensera à initialiser la liste avec la population initiale  $P_0$  nommée  $a$  dans le programme Python. On confrontera graphiquement ce résultat avec les données expérimentales de la liste  $L_p$  en traçant sur le même graphique les données expérimentales. Ce qui peut donner :

```

1 def modeleRicker(K: float, r: float, a: float, n: int) -> List[float]:
2     L = [a]
3     for k in range(1, n+1):
4         P = a*exp(r*(1-a/K))
5         L.append(P)
6         a = P
7     return L
8
9 X = np.arange(0, n+1) # {0,...,n-1}
10 Lp_r = modeleRicker(K1, r1, P0, n) # = [Lp_r[0], ..., Lp_r[n-1]]
11 plt.plot(X, Lp_r, 'ro--') # tracé des valeurs modélisées
12 plt.plot(X, Lp, 'b+') # tracé des données expérimentales (len(Lp) = n)

```

Et pour le modèle de Beverton-Hott :

```

1 def modeleBHott(K: float, r: float, a: float, n: int) -> List[int]:
2     R0 = r+1
3     M = K/(R0-1)
4     L = [a]
5     for k in range(1, n+1):
6         P = R0*a/(1+a/M)
7         L.append(P)
8         a = P
9     return L
10
11 X = np.arange(0, n) # {0,...,n-1}
12 Lp_bh = modeleBHott(K2, r2, P0, n) # =[Lp_bh[0], ..., Lp_bh[n-1]]
13 plt.plot(X, Lp_bh, 'ro--') # tracé des valeurs modélisées
14 plt.plot(X, Lp, 'b+') # tracé des données expérimentales (len(Lp)=n)

```

## IV. Interprétation des modèles.

- ① Si  $0 < r < 1$  et  $P_0 < K$  étudier les suites  $(P_n)$  dans chaque modèle et conclure sur la dynamique de la population modélisée.

C'est le cas le plus simple mais il faut justifier rigoureusement le comportement des deux suites...

- On commence par noter que dans les deux cas, l'intervalle  $[0, K]$  est un intervalle stable. Or  $P_0 \in ]0, K[$ , donc on montre par récurrence que  $P_n \in ]0, K[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Les fonctions  $f$  et  $g$  sont croissantes sur  $]0, K[$  donc les suites  $(P_n)$  sont monotones pour les deux modèles.  
En effet, on montre par récurrence que :  $sg(u_1 - u_0) = sg(u_{n+1} - u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La monotonie des deux suites découle donc de l'étude du signe de  $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$  (pour Ricker) et de  $u_1 - u_0 = g(u_0) - u_0$  pour le modèle de Beveron-Hott.
- Cela étant, même si on ne fait pas référence à la monotonie de la suite  $(P_n)$ , il nous faut étudier le signe de  $f(P_n) - P_n$  et  $g(P_n) - P_n$  sur l'intervalle  $[0, K]$ .

— Commençons par le modèle de Ricker : D'après la question II.3.a), on a :

$$f(x) > x \Leftrightarrow x[e^{r(1-x/K)} - 1] > x \Leftrightarrow r(1 - x/k) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < K$$

Il découle que pour tout  $P_n \in ]0, K[$ ,  $f(P_n) = P_{n+1} > P_n$ .  
La suite  $(P_n)$  est croissante.

— Poursuivons par le modèle de B.H. : Toujours d'après la question II.3.a), on a :

$$g(x) > x \Leftrightarrow \frac{R_0 x}{1 + x/M} > x \Leftrightarrow x \left[ \frac{R_0}{1 + x/M} - 1 \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 > 1 + \frac{x}{M} \Leftrightarrow 0 < x < M(R_0 - 1) = K$$

Il découle que pour tout  $P_n \in ]0, K[$ ,  $g(P_n) = P_{n+1} > P_n$ .  
La suite  $(P_n)$  est croissante.

**Conclusion** : Pour les deux modèles,  $(P_n)$  est croissante et majorée par  $K$ .

d) Enfin on note que  $f$  et  $g$  sont continues sur l'intervalle  $[0, K]$  donc par passage à la limite :

Dans les deux cas la suite  $(P_n)$  converge vers le seul point fixe possible  $K$

② On suppose les paramètres suivants :  $K = 10$ ,  $r = 0.7$ ,  $P_0 = 29$ .

Associons à chacune des évolutions ci-dessous le modèle de Ricker ou de Beverton-Hott :

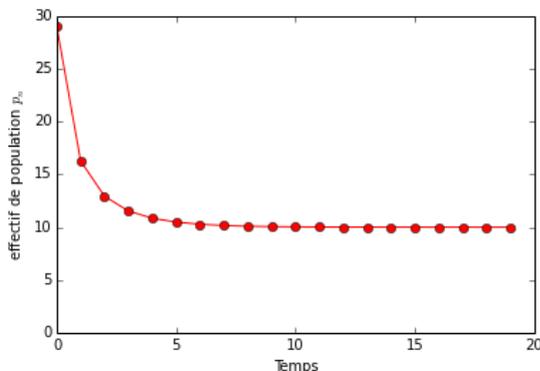


FIGURE 4 – Jeu d'essai 1.1

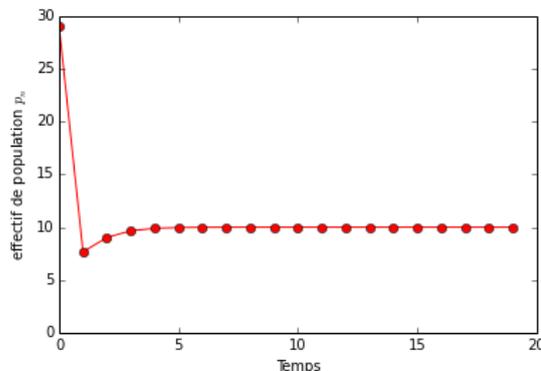


FIGURE 5 – Jeu d'essai 1.2

Nous avons  $r = 0.7$  donc dans chacun des modèles la capacité d'accueil  $K = 10$  est un état stationnaire stable. Ce que confirment les deux graphes.

La population initiale  $P_0 = 29$  est très supérieure à la capacité d'accueil du milieu.

Si on observe la courbe représentant  $f$  associée au modèle de Ricker, on note que  $f(P_0) \approx 6$  autrement dit  $P_1 < 10$ . Par ailleurs,  $I = [0, K]$  est stable par  $f$  qui est croissante sur cet intervalle, donc la suite  $(P_n)$  est monotone à partir de  $n = 1$ , majorée par  $K$ . Elle converge.

**Conclusion** : Le jeu d'essai 1.2 représente le modèle de Ricker.

Si on observe maintenant la courbe représentant  $g$ , on note qu'elle est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

L'intervalle  $I_2 = [10, +\infty[$  est stable par  $g$  et  $P_0 = 29 \in I_2$  donc la suite  $(P_n)$  est monotone à partir de  $n = 0$ . La courbe est par ailleurs sous la droite d'équation  $(y = x)$  donc  $P_{n+1} < P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est monotone, décroissante.

**Conclusion :** Le jeu d'essai 1.1 représente le modèle de Beverton-Hott.

- ③ On s'intéresse cette fois au cas  $1 < r < 2$ . En considérant les paramètres :  $K = 10$ ,  $r = 1.7$  et  $P_0 = 14$  (jeux d'essai 2.1 et 2.2) déterminons laquelle de ces deux évolutions suit un modèle de Ricker, un modèle de Beverton-Hott :

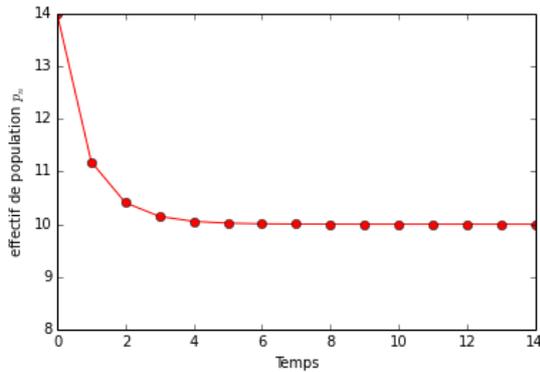


FIGURE 6 – Jeu d'essai 2.1

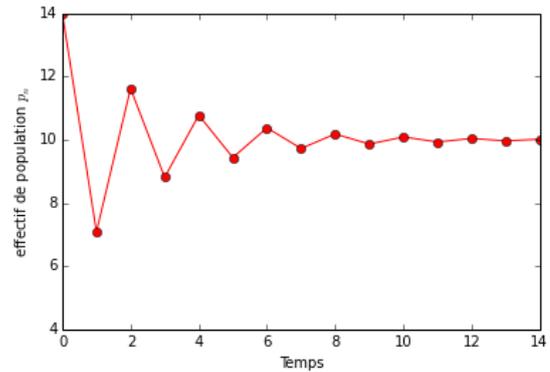


FIGURE 7 – Jeu d'essai 2.2

Nous avons cette fois  $r = 1.7$ . Encore une fois les deux modèles ont  $K = 10$  comme état stationnaire stable.

Dans le cas du modèle de Beverton-Hott, pour tout  $P_0 \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(P_n)$  qui découle de l'équation logistique :  $P_{n+1} = g(P_n)$  est monotone puisque  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui n'est pas le cas de la fonction  $f$ .

**Conclusion :** Le jeu d'essai 2.1 est issue du modèle de Beverton-Hott

le jeu d'essai 2.2 du modèle de Ricker

- ④ On considère enfin les paramètres  $K = 10$ ,  $r = 2.3$  et  $P_0 = 5$  (jeux d'essai 3.1 et 3.2).

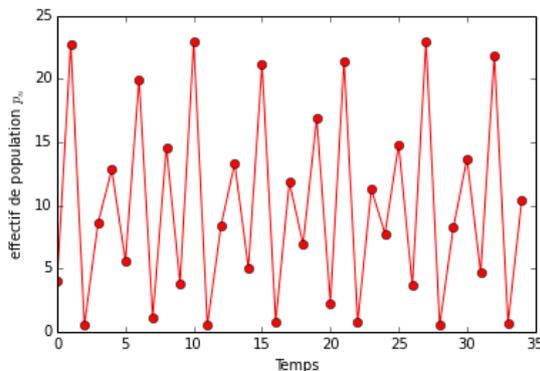


FIGURE 8 – Jeu d'essai 3.1

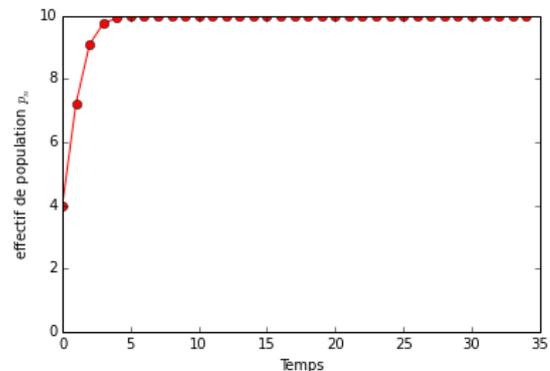


FIGURE 9 – Jeu d'essai 3.2

$r = 2.3 > 1$  donc la capacité d'accueil est stable pour le modèle de Beverton-Hott et instable pour le modèle de Ricker.

La figure 8 illustre cette instabilité.

**Conclusion :** Le jeu d'essai 3.1 illustre le modèle de Ricker, le 3.2 celui de Beverton.

- ⑤ Écrivons une fonction Python **logistique** qui permette, connaissant  $K$ ,  $r$ ,  $P_0$  et  $n$  de déterminer la liste  $(P[0], P[1], \dots, P[n])$  des effectifs successifs de la population dans le cas du modèle de Ricker :

```
def logistique(K,r,P0,n):
    P=np.zeros(n+1)
    P[0]=P0
    for k in range(n):
        P[k+1]=P[k]*np.exp(r*(1-P[k]/K))
    return P
```

- ⑥ Les modèles de Ricker et de Beverton-Hott décrivent deux types distincts de dynamique des populations.

La différence provient essentiellement du fait que l'équation logistique du modèle de Ricker :  $P_{n+1} = f(P_n)$  repose sur une fonction qui tend vers 0 pour de grandes valeurs de  $P_n$  tandis que le modèle de Beverton-Hott s'appuie sur une fonction  $g$  croissante qui admet une asymptote horizontale d'équation  $y = \frac{R_0}{R_0 - 1}K$ .

Dans le premier modèle (Ricker), si la population dépasse de beaucoup la capacité d'accueil de l'environnement, la population s'effondre dans son ensemble, modélisant l'effet d'une hausse importante de la mortalité et d'une baisse de la fertilité lorsque les ressources deviennent trop rares. On parle de modèle de concurrence.

Dans le second modèle, aussi grande soit la population par rapport à la capacité d'accueil du milieu, le nombre d'individus survivant à l'étape de temps suivant sera entre  $K$  et  $\frac{R_0}{R_0 - 1}K$  et la suite  $(P_n)$  aura une décroissance lente jusqu'à  $K$ . Il modélise un phénomène de rivalité au cours duquel certains individus s'accaparent les ressources disponibles au profit de leur clan et empêchent ainsi la population de s'effondrer.