SUJET 3 -

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n. Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n e^{r(1-y_n/p)}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance de la population ($r > 0$).

① Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$. Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$?
Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.

② Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.

③ Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \longmapsto \alpha x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

④ Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha = x$ sur $\mathbb{R}_+$ selon la valeur de α.

⑤ a) Écrire une fonction Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaître les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impairs en rouge.
On rajoutera par exemple l'option `color ='blue'` ou `color = 'red'` pour choisir la couleur du graphe.

b) Tester votre programme dans le cas où $x_0 = 0.5$. Quel est le comportement de la suite pour $\alpha = 4$ ou $\alpha = 7$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.

⑥ On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.

a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \longmapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, $|f'_\alpha(x)| \leq M$.

c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.

d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
On procède par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$ puis que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.

e) On admet que $f_\alpha(\alpha e^{-1}) > 1$. Montrer que pour tout $x \in [1, \mu_\alpha]$, $f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.

f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour tout $n \geq n_0 + 1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leq M|x_n - \ln(\alpha)|$.

g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.