SUJET 2 -

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \ln(1 + 5x + x^n)$.

① a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet, pour tout entier naturel n, une unique solution positive α_n.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq \alpha_n \leq 1$.

② Préciser les trois premiers termes de la suite (α_n).

③ A l'aide d'un programme Python, et en utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de α_3 au centième près, puis (en adaptant éventuellement le programme précédent pour avoir une valeur approchée de α_n), émettre une conjecture à propos des deux questions suivantes :
a) La suite (α_n) est-elle monotone ?
b) Converge-t-elle vers 1 ?

④ a) Soit x un réel positif. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
b) En déduire la monotonie de la suite (α_n).

⑤ Montrer que la suite (α_n) converge.

⑥ On suppose dans cette question que la limite l de la suite (α_n) vaut 1. Pourquoi a-t-on alors, à partir d'un certain rang n_0, que $\alpha_n \geq 2/5$? Que peut-on en déduire ?

⑦ Déterminer la limite de la suite (α_n).