SUJET 1 -

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

① On considère pour tout entier $n \geq 2$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n - ln(x) - n$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n.
b) *On rappelle et on admet l'inégalité suivante :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$ (*)
En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0, n^{-1/n}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-1/n}, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

② **Étude de la suite** (v_n).
La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geq 2$, $v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.

a) Justifier en utilisant si besoin (*) que $f_n((2n)^{1/n}) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geq 2$, $v_n \leq (2n)^{1/n}$.
b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n.
le sujet rappelait comment utiliser la fonction `plot` *du module* `matplotlib.pyplot`

c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite l.
d) *On admet le résultat suivant : si* $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
Déterminer un équivalent de $v_n - l$.

③ **Étude de la suite** (u_n).

a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8.
b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).
c) Justifier que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = 0$ puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.