Exercice 10 Soit (E) : $\ln(x) = -x$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

① a) Soit $f(x) = \ln(x) + x$; $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le théorème de la bijection, } \exists! \alpha \in]0,+\infty[\,/\, \ln(\alpha) + \alpha = 0}$

b) grâce à Python, après un "from math import *", on obtient :

$\log(2) \simeq 0.69 \Rightarrow \ln(1/2) = -\ln(2) \simeq -0.69$

$\log(3) \simeq 1,09 \Rightarrow \ln(2/3) = \ln(2) - \ln(3) \simeq -0.40$

D'où

$$\begin{cases} f(1/2) = \ln(1/2) + 1/2 < 0 \\ f(2/3) = \ln(2/3) + 2/3 > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\alpha \in]1/2 ; 2/3[}$

c)

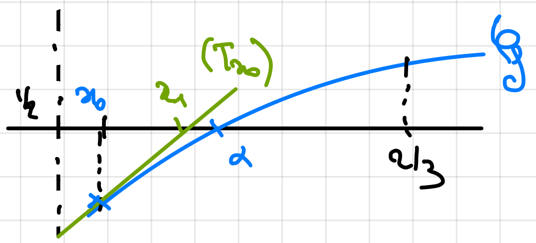
```
def dichotomie(n:int) -> list :
    f = lambda x: log(x) + x
    a, b = 1/2, 2/3
    cpt = 0
    while b-a > 10**(-n):
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0 :
            b = c
        else :
            a = c
        cpt += 1
    return round(c, n), cpt
```

Exemple : dichotomie(5) renvoie : 0.56714, 15.

② a) $x_0 \in [1/2, \alpha]$; Exprimons la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$



Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; on a $x_1 = g(x_0)$

On étudie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $x_{n+1} = g(x_n)$

b) (i) Variations de g sur $[1/2, \alpha]$

$$\forall x>0, \quad g(x) = x - \frac{\ln(x)+x}{1+x}\cdot x = \frac{(1+x)x - x\ln x - x^2}{1+x}$$

$$= \frac{x}{1+x}(1-\ln(x))$$

$$g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}(1-\ln(x)) + \frac{x}{1+x}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-\ln(x)-1-x}{(1+x)^2} = -\frac{f(x)}{(1+x)^2}$$

or $f(x) < 0 \ \forall x \in [1/2, \alpha]$
donc
$g'(x) > 0 \ \forall x \in [1/2, \alpha]$

Conclusion : $\boxed{g \text{ est croissante sur } [1/2, \alpha]}$

→ Montrons que $I = [1/2, \alpha]$ est un intervalle stable par g :

$$g(1/2) = \frac{1/2}{1+1/2}(1-\ln(1/2)) = \frac{1}{3}(1+\ln(2)) \simeq \frac{1.69}{3} > \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{\overbrace{f(\alpha)}^{f(\alpha)=0}}{f'(\alpha)} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} < \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} < g(1/2) \leq g(\alpha) = \alpha$$

(car g croissante sur I)

Conclusion $\boxed{g([1/2, \alpha]) \subset [1/2, \alpha]}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 \in [1/2, \alpha]$.

On commence par montrer par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I = [1/2, \alpha]$ (Immédiat car $g(I) \subset I$)

La suite (x_n) est donc majorée.

Par ailleurs, $\forall x \in I$, $g(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$ (car $f(x) \leq 0$ et $f'(x) > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n \geq 0$.

<u>Conclusion</u> $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante et majorée par } \alpha}$

(iii) le théorème de la limite monotone assure que : $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 0} \text{ converge.}}$

Par ailleurs,
$\forall x \in I$, $\quad g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

or g continue sur I donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\ell)$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \ell = g(\ell) \Leftrightarrow \ell = \alpha.$

<u>Conclusion</u> $\boxed{(x_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } \alpha \,/\, f(\alpha) = 0.}$

c) (i) Mq $\forall t \in [1/2, \alpha]$, $|f(t)| \leq 3(\alpha - t)$

$\forall t \in [1/2, \alpha]$, $f'(t) = \dfrac{1}{t} + 1$; $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$

f' est décroissante sur I avec $f'(1/2) = 3$; $f'(\alpha) > 1$.
Donc $\sup\limits_{t\in I} |f'(t)| = f'(1/2) = 3$.

f est de classe C^1 sur $I = [1/2, \alpha]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, $\forall t \in I$:

$\exists\, c \in]1/2, \alpha[\,/\, |f(t) - f(\alpha)| = |f'(c)||t - \alpha|$

ou encore:
$$|f(t) - f(\alpha)| \leq 3|\underbrace{t - \alpha}_{<0}| \quad [\text{et } f(\alpha) = 0 \ldots]$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\forall t \in [1/2, \alpha],\ |f(t)| \leq 3(\alpha - t)}$

(ii) Montrons que $\forall x \in I$, $0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2$.

(i) On a vu que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$, donc $g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha - g(x) \geq 0$.
(ii) A nouveau le TAF cette fois appliqué à g : $\exists\, c \in]x, \alpha[\, /$
$\alpha - g(x) = g(\alpha) - g(x) = g'(c).(\alpha - x) = -\dfrac{f(c)}{1+c}(\alpha - x)$

$\Rightarrow |\alpha - g(x)| = \dfrac{|f(c)|}{1+c} |\underbrace{\alpha - x}_{>0}| \leq \dfrac{3}{1+c} |\alpha - c|(\alpha - x) < 3(\alpha - x)^2$

car $\frac{1}{2} < x < c < \alpha \Rightarrow -c < -x$
$\Rightarrow 0 < \alpha - c < \alpha - x$

Conclusion $\boxed{\forall x\in[1/2,\alpha],\ 0\le \alpha-g(x)\le 3(\alpha-x)^2}$

(iii) On prend $x_0=1/2$;
Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$0\le \alpha-x_n\le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\quad (R_n)$$

- $n=0$: (R_0) est vraie car

$1/2\le\alpha\le 2/3$ donc $0\le \alpha-x_0\le 2/3-1/2=1/6=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$

- On suppose (R_n) vraie pour n fixé $(n\ge 0)$
- Alors $\frac{1}{2}\le x_{n+1}\le\alpha \Rightarrow \alpha-x_{n+1}\ge 0$

Par ailleurs :

$$\alpha-x_{n+1}=\alpha-g(x_n)\le 3(\alpha-x_n)^2\le 3.\frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2$$
$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

Conclusion $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le\alpha-x_n\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

d) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\le 10^{-p}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\le 3.10^{-p}\Leftrightarrow 2^k\ln\left(\frac{1}{2}\right)\le\ln(3)-p\ln(10)$

$\Leftrightarrow 2^k\ge\frac{p\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}\Leftrightarrow k\ge\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{p\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}\right)$

On écrira par exemple :

```
def newton(p):
    g = lambda t:(t/(1+t))*(1-log(t))
    x = 1/2
    n0= int(log((p*log(10)-log(3))/log(2))/log(2))+1
    for k in range(1, n0+1):
        x = g(x)
    return round(x,p), n0
```

Application

dichotomie(10) renvoie 0.5671432904, cpt = 31

newton(10) renvoie la même valeur mais avec n0 = 5