2 Fonctions d'une variable réelle

Les objectifs : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien (ln), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal (log), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) et valeur absolue ($|\cdot|$).
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{\ }$ et arctan). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.
Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.
Développements limités (développements usuels : *exp*, *cos*, *sin*, $x \longmapsto 1/(1+x)$, $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$). Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1 ✶ : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$$a)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4};\qquad b)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x;\qquad c)\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}$$

$$d)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right)e^{\cos x};\qquad e)\lim_{x\to a}\frac{\arctan x-\arctan a}{e^x-e^a};$$

$$f)\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(1-\cos x)}{x^3\ln(1+x)};\qquad g)\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\tan x;\qquad h)\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}$$

$$i)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x};\qquad j)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x}\left(\arctan\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)$$

✐ On montrera, avant de déterminer la dernière limite, que :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 ✶✶✶ : Continuité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = ne^{-x} - x$$

① Montrer que f_n s'annule en un unique point x_n et que $x_n > 0$.

② Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

③ Montrer que : $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n} = 1$

...D'après Agro-véto 2003

Exercice 3 ✶ : Calculer là où c'est possible la dérivée des fonctions suivantes

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin\sqrt{x}}{1-\sin\sqrt{x}}}$; $\quad f_2 : x \mapsto \tan^4(x^4+1)$; $\quad f_3 : x \mapsto \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\quad f_4 : x \longmapsto 2x - \sin 2x$

$f_5 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{1-2x}$; $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x-1}}{(x-2)^2}$; $\quad f_7 : x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\quad f_8 : x \longmapsto \ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 4 ❤ : Continuité et dérivabilité

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

① $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

② $g(x) = x^2\left(1-\dfrac{2}{\ln x}\right)$

Exercice 5 ✶ : Dérivabilité

① **a.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x$. En déduire que $\forall x \in]0,1[,\ 1+x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

b. En déduire la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{kn} \frac{1}{p}$ où k est un entier naturel non nul fixé.

② Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$. Montrer que, s'il existe trois points de la courbe de f qui sont alignés, alors f'' s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
✐ *Indication : On utilisera successivement le théorème des accroissements finis et le théorème de Rolle.*

Exercice 6 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $I = [0,\pi]$ dans $[-1,1]$.
On note A la réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(0)$, $A(-1/2)$ et $A(\sqrt{3}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\sin(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de A.

...D'après Agro-véto 2015

Exercice 7 ✶ : Développements limités

Déterminer les développements limités suivants :

1) $\dfrac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 ; 2) $e^x\dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 3 en 0 ; 3) $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0

4) $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 en 0 ; 5) $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ à l'ordre n en 0 6) $\dfrac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 3 en 1

Exercice 8 ❤ : Développements limités et branches infinies

Déterminer le comportement asymptotique des deux fonctions ci-dessous :

$$f : x \longmapsto (x-2)e^{1/x} \text{ et } g : x \longmapsto x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Exercice 9 ✶✶ : Suites définies par une fonction

Nous étudions les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Sans recours aux résultats connus sur les suites arithmético-géométriques, justifier **graphiquement**, selon la valeur de u_0, la nature de la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Même question pour la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

② Nature et limite éventuelle de la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n+1}{v_n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
On écrira une fonction python permettant de valider graphiquement cette réponse.

③ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in [-2, +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$

- **a.** Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$. Étudier cette fonction et tracer son graphe.
- **b.** Montrer que l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est monotone et l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (✐ On ne cherchera pas à le déterminer)
- **c.** Appliquer le théorème des accroissement finis pour montrer l'existence de $k \in]0,1[$ tel que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. Conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

④ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$

- **a.** Faire l'étude de $f : x \longmapsto \dfrac{2+x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b.** Montrer que l'intervalle $I = [3/2; 3]$ est stable par f et en déduire l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- **c.** La suite (u_n) est-elle monotone ? Préciser son comportement.
- **d.** Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{8}{9}$ et conclure que (u_n) converge vers α.
- **e.** Majoration de l'erreur : Déterminer un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 10 ✶✶✶ : oral Agro-véto 2021

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction g continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $g(a_k)g(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α.

On considère l'équation (E) : $\ln(x) = -x$ dont on cherche les solutions éventuelles sur $\mathbb{R}_+^*$.

① **a.** Montrer que l'équation (E) possède une unique solution α.
b. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$, justifier que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.
c. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, qui renvoie α à 10^{-n} près en donnant le nombre de partages de l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ nécessaires pour trouver cette approximation.

② **La méthode de Newton**.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x + \ln(x)$$

a. Soit $x_0 \in [\frac{1}{2}, \alpha]$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.
Faire un schéma rapide permettant de comprendre la manière dont x_1 est construit. Pour cela on dessinera $\mathcal{C}_f$ ainsi que sa tangente en x_0.
On introduit alors la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

b. i. Étudier les variations de g sur $[\frac{1}{2}, \alpha]$ puis montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $g(x) \in [\frac{1}{2}, \alpha]$.
ii. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in [\frac{1}{2}, \alpha]$ est croissante et majorée par α.
iii. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

c. i. Montrer que pour tout $t \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $|f(t)| \leq 3(\alpha - t)$.
ii. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$: $0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2$.
iii. On prend $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq \alpha - x_n \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$.

d. Écrire en langage Python une fonction qui prend en argument un entier n et qui renvoie α à 10^{-n} près en utilisant la méthode de Newton et donne le rang de la suite (x_n) correspondant à cette valeur approchée. Comparer la fonction mettant en oeuvre l'algorithme de dichotomie et celle mettant en oeuvre la méthode de Newton.

Exercice 11 ✶✶ : Suite implicite - exemple 1

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

① Calculer $f_n'(x)$ puis $f_n''(x)$. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

② **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

b. A l'aide de l'outil informatique de votre choix, conjecturer le comportement de (u_n) et conjecturer la limite de nu_n.

③ Compléter le programme suivant pour trouver u_n avec une précision de e, valeur réelle strictement positive.

```
def f(n,x):
   f=1/(1+exp(x))+n*x
   return f

def dichotomie(n,e):
   a,b = ...
   while b-a ... :
      c = (a+b)/2
      if f(n,a)*f(n,c) ... :
         ...
      else:
         ...
   return ...
```

④ Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

⑤ Justifier que la suite (u_n) converge vers 0 et calculer la limite de nu_n.

⑥ Montrer que $u_n + \dfrac{1}{2n} \equiv -\dfrac{1}{8n^2}$. Le contrôler à l'aide de la fonction `dichotomie`.

...D'après Agro-véto 2015

Exercice 12 ✶✶✶ (oral Agro-Véto 2015) : Suite implicite - exemple 2

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

① Montrer que l'application $f_n(x) = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est strictement positive. On notera par la suite a_n cette solution.

② Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de a_2.

③ Quelle est la monotonie de la suite (a_n) ? Montrer que cette suite est convergente.

④ On pose $u_n = n^2 a_n$. A l'aide de la fonction Python, représenter graphiquement cette suite.
Que dire de sa convergence ?
Démontrer cette conjecture et donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

⑤ On pose $g(x) = \dfrac{2x^3+1}{3x^2+2}$.

a. Montrer que cette fonction est croissante sur $[a_2, 1]$ et donner son tableau de variation sur $[a_2, 1]$.
b. Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[a_2, 1]$.
c. On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est monotone et converge vers a_2.

...D'après Agro-véto 2018