1 T.D.1 Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;
Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.

⚠ *Les objectifs* : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$)
Suites équivalentes.

Exercice 1 ✶ :

① Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.
Valider votre réponse grâce à un programme Python.

② Même question pour la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 2 ✶ :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$.

Montrer que la suite (u_n^2) est arithmétique et en déduire $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n$.

Exercice 3 ✶ : Les suites usuelles

① Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par leur premier terme et une relation de récurrence. On indiquera leur nature :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n/3$, $v_1 = 2$;
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$, $u_0 = -10$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n^2$ et $v_0 = 1$ (✐ Un opération préalable est nécessaire...)

② Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n + u_{n-1} - \dfrac{2}{(n-1)!} = 0$

a. Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = n!u_n$.
b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
d. Écrire un programme Python qui détermine le plus petit entier n tel que l'écart à la limite soit inférieur à 10^{-4}.

③ Expression dans chaque cas de u_n en fonction de n. Écrire des fonctions Python permettant de valider graphiquement vos résultats.

a. $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$ et $u_0 = -1$, $u_1 = 3$.
b. $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$
c. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = -2$.
d. $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Exercice 4 ✶ : Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

① Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).

② Écrire une fonction Python `suite(n)` qui calcule u_n

③ Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$:

a. Montrer par application du théorème des accroissements finis que :

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

b. En déduire que $u_n < \ln(2) < u_n + \dfrac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
✐ *Indication* On pourra penser à mettre en place des télescopages.

c. Conclure sur une fonction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$.

Exercice 5 ✶ : Télescopages

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

① Calculer S_n pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire que (S_n) converge dans $\mathbb{R}$.

② En déduire que (T_n) converge.

Exercice 6 ✶✶ Suites adjacentes :

Pour tout entier n non nul, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$

① Démontrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.

② Montrez que u et v sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
On note γ la limite de u (Ce réel est appelé la constante d'Euler).

③ À partir de quel entier est-on assuré que u_n est une approximation de γ à 10^{-3} près ?

④ Montrer que la suite A_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge vers une limite ℓ.
indication : on pourra commencer par étudier les suites (A_{2n}) et (A_{2n+1})

⑤ Montrer que pour tout entier n non nul, $A_{2n} + H_{2n} = H_n$. En déduire la valeur de ℓ.
Noter que le résultat de la question 2. peut se formuler en :
$\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $(\varepsilon_n)_n$ est une suite suite réelle convergeant vers 0.

Exercice 7 ✶✶✶ (oral Agro-Véto 2017) : suites équivalentes

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in]0; \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin(u_n)$.

① Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.

② Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.

③ Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).

④ Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictement à partir du rang n_0. (On utilisera une expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}).

⑤ Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$ Conclure sur la convergence de (u_n).

⑥ Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n} u_n$.

⑦ En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{u_n}{n}$, montrer que :

$$(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-n^2}{6} x_n^3, \text{ puis que } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

⑧ En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$,
vérifier la conjecture faite à la question 7.

Exercice 8 ✶✶✶ (oral Agro-Véto 2022) :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On définit la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$

① Écrire en Python une fonction `moyenneSuite()` qui prend en argument une fonction f et un entier naturel n et qui renvoie s égale à $\dfrac{f(0) + \cdots + f(n)}{n+1}$. On rappelle que pour définir une fonction (sans lui donner de nom) directement en argument d'une fonction Python, on pourra utiliser la syntaxe « `lambda x: formule` ». Ainsi on testera :
`moyenneSuite(lambda x:exp(x/(x+1)), 100)`, `moyenneSuite(lambda x:exp(x/(x+1)), 1000)`, `moyenneSuite(lambda x:(-1)**x, 1000)` et `moyenneSuite(lambda x:(-1)**x, 1001)`.
Que constate-t-on ?

② On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

- **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Vérifier que la suite $\left(\dfrac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
- **b.** On suppose dans les deux questions suivantes que (u_n) tend vers $L \in \mathbb{R}$.

  Montrer que pour tout entier naturel plus grand que 1 :

  $$L \leq s_n \leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$$
- **c.** Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers L.
- **d.** Réciproquement, on suppose que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers L.

③ Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

- **a.** Vérifier que $v_n = \sup\{|u_k|, k \geq n\}$ est bien défini.
- **b.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante de limite nulle.
- **c.** En déduire que la suite (s_n) converge vers 0

④ On suppose maintenant que la suite (u_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite des moyennes $(s_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers L. Donner un exemple simple prouvant que la réciproque est fausse.

⑤ On considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $w_0 = 1$, et $w_{n+1} = w_n + e^{-w_n}$.

- **a.** Étudier la monotonie et la convergence éventuelle de la suite $(w_n)_{n\geq 0}$.
- **b.** Prouver que $\underset{n\to\infty}{lim} (e^{w_{n+1}} - e^{w_n}) = 1$
- **c.** En déduire un équivalent de w_n, lorsque n tend vers l'infini.