# Devoir surveillé 1 : Suites numériques et fonctions (1H30)

*Le sujet se compose de deux exercices et d'un problème. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.*
*Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de* $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.*

**Exercice 1 :**

Soit $f$ définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

① Donner l'ensemble de définition de $f$, son ensemble de continuité et son ensemble de dérivabilité.

② Les bibliothèques `numpy` et `matploltlib.pyplot` ayant été importées, donner le moyen de représenter le graphe de $f$ sur son ensemble de continuité.

③ Calculer la dérivée de $f$ et dresser son tableau de variation.

④ Donner l'allure de la fonction en précisant la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

**Exercice 2 :**

Pour tout entier $n$ non nul, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$

① Démontrer que, pour tout $x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.

② Montrez que $u$ et $v$ sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
*On note $\gamma$ la limite de $u$ (Ce réel est appelé la constante d'Euler).*

③ À partir de quel entier est-on assuré que $u_n$ est une approximation de $\gamma$ à $10^{-3}$ près ?

④ Écrire une fonction Python d'argument un entier naturel $p$ et qui renvoie une valeur approchée à $10^{-p}$ près de $\gamma$

## Problème :

Soit $t$ un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g : x \longmapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de $g$.
   b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c) Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $x_{n+1}$.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer de même le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

6. Déduire alors de la question 1. que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera $L$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de $L$ à l'aide de $u_n$ et $v_n$. En déduire que pour tout réel $t$ strictement positif, on a :

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$$

   $L$ est un nombre réel dépendant de la donnée de $x_0$, c'est-à-dire de $t$.
   Nous pouvons alors considérer la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. Écrire une fonction Python `estimef(t)` qui retourne une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $L$ pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Indiquer comment tracer le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[0.1, 5]$ grâce à Python.

9. Déterminer $f(1)$.

10. Déterminer par encadrement :

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{t-1}$$

   En déduire que $f$ est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

**- FIN -**