MATHEMATIQUES
Révisions d'analyse

Exercice 1 :

Soit f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

① *Donnons l'ensemble de définition de f et de dérivabilité de f :*
Pour l'ensemble de définition :

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow 1+x \neq 0 \text{ et } (1-x)(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1 \text{ (tableau de signe)}$$

Conclusion : $\boxed{D_f =]-1,1]}$.
Pour l'ensemble de dérivabilité, on rappelle que la fonction « racine carrée » n'est pas dérivable en 0 et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$.
Conclusion : $\boxed{D_{f'} =]-1,1[}$

② *Les bibliothèques* ***numpy*** *et* ***matplotlib.pyplot*** *ayant été importées, donnons le moyen de représenter le graphe de f sur son ensemble de dérivabilité :*
On pourra se contenter de faire :

```
X = np.linspace(-0.9,0.99,100)
f = lambda x:x*np.sqrt((1-x)/(1+x))
plt.plot(X,f(X),'r-')
```

③ *Calculons la dérivée de f et dresser son tableau de variation :*
Un calcul rapide donne : $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
Pour l'étude de signe, sur $]-1,1[$, $(1+x)\sqrt{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $1-x-x^2$.

$$1-x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Dès lors, $1-x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$.
On note alors que $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas dans l'ensemble de définition de f' car :

$$4 < 5 < 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow -4 < -1-\sqrt{5} < -3 \text{ et donc } x_1 < -3/2$$

En revanche, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]-1,1[$ puisque $1 < -1+\sqrt{5} < 2$...
Conclusion : $\boxed{f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-1,x_2] \text{ et } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]x_2,1[}$

④ Donner l'allure de la fonction. ✐ *Remarque :* On prendra soin à indiquer la tangente verticale en $x = 1$ et à mettre en évidence l'asymptote verticale d'équation $x = -1$.
Intéressons-nous maintenant à l'équation de la tangente en 0 et à sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$:

— *première méthode :* On rappelle que la tangente en 0 admet pour équation $y = f(0) + f'(0)x$. On connait ici l'expression de $f'(x)$ donc il est immédiat d'obtenir $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Dès lors, la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ admet pour équation $y = x$.
Pour étudier sa position par rapport à la courbe, on évalue le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1\right) = x\left(\sqrt{1 - \frac{2x}{1+x}} - 1\right)$$

Or $u = \dfrac{-2x}{1+x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc on peut utiliser $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{u}{2}$ soit

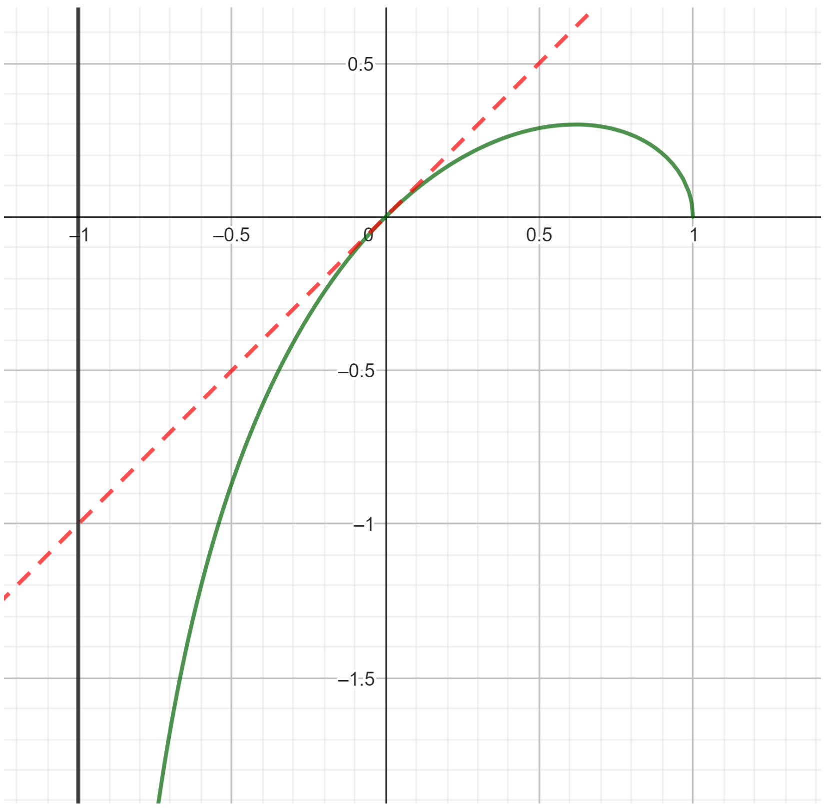
$$f(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} x\left(-\frac{x}{1+x}\right) = -\frac{x^2}{1+x} \underset{x \to 0}{\sim} -x^2$$

On en déduit que $f(x) - x$ est négatif au voisinage de 0.
Conclusion : $\boxed{\text{La courbe représentant } f \text{ est sous sa tangente au voisinage de } 0}$

— *seconde méthode :* On fait directement le DL de f au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = x\sqrt{1 - \frac{2x}{1+x}} \underset{0}{=} x\sqrt{1 - 2x(1 - x + \circ(x))} \\ &= x\sqrt{1 - 2x + \circ(x)} = x(1 - x + \circ(x)) \text{ car } \sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \circ(u) \\ &= x - x^2 + \circ(x^2) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x) - x \underset{0}{=} -x^2 + \circ(x^2) \text{ - on retrouve la conclusion précédente}}$



Problème : G2E 2010

Lu dans le rapport de jury : « *Le minimum sur les suites récurrentes n'est guère connu : sens de variation, majoration ou minoration par un nombre fixe, détermination de la limite obtenue par le point fixe de la fonction f.*
Une suite majorée par 1 *et croissante ne converge pas nécessairement vers* 1*. Deux suites l'une décroissante, l'autre croissante, ne sont adjacentes que si leur différence tend vers* 0. »

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) *Etudions le signe de g* :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$.
   Or, si $0 < x < 1$, $\sqrt{x} < 1$ et si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$.

   Conclusion : $\boxed{g(x) > 0 \text{ si } x \in]0,1[,\ g(x) < 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats trouvent que g est négative sur $\mathbb{R}$. La plupart des réponses manquent de concision. Citons par exemple l'étude de la limite en $+\infty$ de la fonction g qui n'a aucun intérêt par rapport à la question posée. Trop de candidats donnent comme réponse le tableau de variation de g et semblent avoir oublié en cours de travail que c'est le signe qui devait être étudié.* »

   b) *Montrons que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$* : Supposons que $t \geq 1$ et démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   i. *Initialisation* : Pour $n = 0$, $x_0 = t \geq 1$ donc $x_1 = \sqrt{x_0} \geq 1$.
      Par ailleurs : $x_1 - x_0 = \sqrt{x_0} - x_0 = g(x_0) \leq 0$ d'après 1.a).
      D'où $1 \leq x_1 \leq x_0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   ii. *Hypothèse* : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n fixé ($n \geq 0$).

   iii. *Hérédité* : La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante. Donc :
   $$1 \leq x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{x_{n+1}} \leq \sqrt{x_n} \Leftrightarrow 1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

   iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n}$

   On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, minorée par 1.
   Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

   Déterminons sa limite qu'on note l : On a $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc en passant à la limite en l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :
   $$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l = \sqrt{l}$$
   Or
   $$l = \sqrt{l} \Leftrightarrow (l^2 = l \text{ et } l \geq 0) \Leftrightarrow (l = 0 \text{ ou } l = 1).$$
   Par ailleurs la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 donc $l = 0$ est impossible.

   Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l = 1}$.

c) *Étudions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$* : Je choisis une autre forme de rédaction mais le raisonnement précédent s'applique tout aussi bien en notant que si $t < 1$, alors $0 < t < \sqrt{t} < 1$ ou encore $0 < x_0 < x_1 < 1$...
Ici, je commence plutôt par noter que si $0 < x_0 = t < 1$ alors $0 < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ce qui est évident par récurrence puisque si $x \in]0,1[$, alors $\sqrt{x} \in]0,1[$. L'intervalle $I =]0,1[$ est dit stable par $x \longmapsto \sqrt{x}$.
Par ailleurs cette fonction est strictement croissante sur I donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Elle est par ailleurs bornée par 0 et 1 donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.
Pour déterminer sa limite, il suffit de savoir si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît ou décroît... c'est justement ce que nous donne la question 1.a).
En effet, $x_n \in]0,1[$ donc $g(x_n) = \sqrt{x_n} - x_n > 0$. Autrement dit :

$$x_{n+1} > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduite que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente on conclut que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *Questions très diversement traitées. Les meilleurs font une récurrence, utilisent l'étude de g pour l'initialisation, la croissance de la fonction racine pour l'hérédité et citent la continuité de cette même fonction pour conclure sur la valeur de la limite de la suite (x_n). Beaucoup de candidats semblent croire qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1.* »

On considère maintenant les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) = 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_{n+1}^2 - 1) \\ &= 2^n\left(-x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1\right) = -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats étudient le discriminant de l'expression $-x^2 + 2x - 1$ pour déterminer son signe* ».

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_n - 1}{x_n} = 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1}^2} \\ &= \frac{2^n}{x_{n+1}^2}\left(2x_{n+1}(x_{n+1} - 1) - (x_{n+1}^2 - 1)\right) = \frac{2^n}{x_{n+1}^2}(x_{n+1} - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats croient que la suite (u_n) est positive et essaient de conclure en utilisant que x_n est plus grande que 1, ce qui est faux pour $t < 1$* ».

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = 2^n(x_n - 1) - 2^n\dfrac{x_n - 1}{x_n} = 2^n\dfrac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} = 2^n\dfrac{(x_n - 1)^2}{x_n} \geq 0.$

5. *Montrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes :*
   On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée.
   Or, d'après 4. on a : $u_n \geq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par v_0.

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$. (Théorème de la limite monotone).

   Lu dans le rapport de jury : « *Les résultats précédents ne permettent pas de dire que les suites sont adjacentes. Certains candidats veulent conclure en écrivant « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minore par v_n elle est donc convergente ». L'argument correct est « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0 elle est donc convergente ».*

   De même, en notant que $v_n \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0.
   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

6. *Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L :*
   Rappelons que l'énoncé nous indique que $v_n = \dfrac{u_n}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Or, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ d'après la question 1. et ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$.
   Donc si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ont même limite notée } L}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *On voit parfois que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2^n ou plus souvent 0 car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1 ».*

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et toutes deux ont pour limite L.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n \leq L \leq u_n}$.

   En particulier, pour $n = 0$, on a : $v_0 \leq L \leq u_0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x_0} \leq L \leq x_0 - 1$, avec $x_0 = t$.

   Conclusion : $\boxed{1 - \dfrac{1}{t} \leq L \leq t - 1}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

   L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t. Nous considérons donc désormais la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. *Écrivons une fonction Python* `estimef(t)` *qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$:*

Nous avons besoin, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$, de déterminer à 10^{-3} près $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Pour chaque valeur de t, nous allons donc construire par récurrence une valeur approchée de L en utilisant les définitions des suites (x_n), (u_n) et (v_n).
Nous commençons par initialiser x_0 à t, u_0 à $2^0(x_0 - 1) = t - 1$ et v_0 à $u_0/x_0 = u_0/t$.
Le nombre de répétition n'étant pas connu, nous répéterons le calcul de chacun de ces termes tant que $u_n - v_n > 1e - 3$.
Dès que $u_n - v_n \leq 1e - 3$ nous retournerons $(u_n + v_n)/2$ comme valeur approchée de L.

Une écriture possible de la fonction demandée est donc :

```
from math import *

def estimf(t):
   n = 0
   x = t
   u,v = t-1,u/t
   while u-v > 1e-3: # on rappelle que :v_n < u_n, ∀n ∈ ℕ
      n += 1
      x = sqrt(x)
      u = 2**n*(x-1)
      v = u/x
   return (u+v)/2
```

Pour donner une représentation graphique de f, on importera la bibliothèque `matplotlib.pyplot` ainsi que la bibliothèque `numpy` et on écrira :

```
T = np.linspace(0.5,5,100)
Y = [estimef(t) for t in T] # liste avec les valeurs de f(t)
plt.plot(T,Y,'r-')
```

Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

9. Il suffit de considérer l'inégalité obtenue en 7 en prenant $t = 1$. Alors $\boxed{f(1) = 0}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

10. L'encadrement obtenu en 7. s'écrit désormais $1 - \dfrac{1}{t} \leq f(t) \leq t - 1$ ou encore $\dfrac{t-1}{t} \leq f(t) \leq t - 1$.

    Pour obtenir un encadrement de $\dfrac{f(t)}{t-1}$, il reste à diviser par $t - 1 \neq 0$:

    — Si $t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$ alors : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq 1$

    — Si $t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1$, alors $1 \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq \dfrac{1}{t}$

    Par théorème d'encadrement des limites, on obtient : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{f(t)}{t-1} = 1$

On rappelant que $f(1) = 0$ d'après 8., cette limite s'écrit : $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = 1$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *L'immense majorité des candidats pense à utiliser le théorème d'encadrement des limites mais oublie de séparer les cas $t > 1$ et $t < 1$* ».