

Suites implicites

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.
 si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
 sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

- ① Montrer que l'application $f_n(x) = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est strictement positive.
On notera par la suite a_n cette solution.
- ② Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de a_2 .
- ③ Quelle est la monotonie de la suite (a_n) ? Montrer que cette suite est convergente.
- ④ On pose $u_n = n^2 a_n$. A l'aide de la fonction Python, représenter graphiquement cette suite.
Que dire de sa convergence?
Démontrer cette conjecture et donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- ⑤ On pose $g(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
 - a) Montrer que cette fonction est croissante sur $[a_2, 1]$ et donner son tableau de variation sur $[a_2, 1]$.
 - b) Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[a_2, 1]$.
 - c) On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est monotone et converge vers a_2 .

...D'après Agro-véto 2018